Licence Math. Appliquées 2004-05
Géométrie

Feuille 5

Exercice 1. Produits scalaires.
1) Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Dans chacun des cas suivants, justifier que la formule proposée définit un produit scalaire sur E.
a) $E=\mathbb{R}^2$ et $\langle u_1,u_2\rangle = x_1x_2-2x_1y_2-2x_2y_1+5y_1y_2$ (avec $u_i=(x_i,y_i)$).
b) E est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2 et $\langle P,Q\rangle = P(0)Q(0)+P(1)Q(1)+P(2)Q(2)$. Montrer que pour tout polynôme P de degré ≤ 2 on a :

$$|P(2)-P(0)| \leq \sqrt{2}.\sqrt{P(0)^2+P(1)^2+P(2)^2}$$

c) E est l'espace vectoriel de fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$. Montrer que pour toute fonction continue $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ on a

$$\left(\int_{-1}^{1} f(t)dt\right)^2 \leq 2\int_{-1}^{1} f^2(t)dt.$$

2) Soit maintenant E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ une base quelconque de E. Construire un produit scalaire $\langle,\rangle$ sur E pour lequel $\mathcal{B}$ est une base orthonormée.

Exercice 2. Orthogonalité.
Pour toute partie $A\subset E$ on note $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs u de E tels que pour tout $a\in A$, on a $\langle u,a\rangle=0$.

1) Montrer que si $A\subset B$ alors $B^\perp\subset A^\perp$. Déterminer $\{0\}^\perp$ et $E^\perp$. Montrer que pour toute partie $A\subset E$, la partie $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E et que $A^\perp = \big(\mathrm{Vect}(A)\big)^\perp$.

2.a) Soit $(e_1,\cdots,e_n)$ une base orthonormée de E: donner une base orthonormée de l'orthogonal de $F=\mathrm{Vect}(e_1,\cdots,e_k)$. Pour tout sous-espace F de E de dimension k montrer que $F^\perp$ est de dimension $n-k$ et est un supplémentaire de F dans E.
b) La projection sur un sous-espace F dans la direction de $F^\perp$ s'appelle la projection orthogonale sur F ; on la notera $\pi_F^\perp$. La symétrie par rapport à F dans la direction de $F^\perp$ s'appelle la symétrie orthogonale par rapport à F ; on la notera $\sigma_F^\perp$.
Vérifier que toute symétrie orthogonale est une isométrie. Que dire de l'opposé d'une symétrie orthogonale ? Lorsque E est de dimension 3, décrire des symétries orthogonales par rapport à des sous-espaces de dimension $0,1,2$.

3) Montrer que pour tout sous-espace vectoriel F on a $(F^{\perp})^{\perp} = F$ puis que pour toute partie $A \subset E$, $(A^{\perp})^{\perp} =$Vect(A).

4) Montrer que $(A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$. Montrer que pour F, G deux sous-espaces vectoriels de E on a $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ et $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Exercice 3.

1) On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel.

a) Soit F le plan d'équation : $3x + 2y - z = 0$.

i) Déterminer une base de l'orthogonal G de F.

ii) Déterminer les matrices, dans la base canonique, des projections orthogonales sur F et G. Quelle est la somme de ces matrices ?

iii) Reprendre les questions ci-dessus avec $F = \text{Vect}\big((1, 0, -1), (1, 1, 1)\big)$.

b) Soit G la droite engendrée par $u = (1, 0, 1)$. Montrer que la projection orthogonale p sur G est définie par $p(v) = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle} u$. En déduire $q(x, y, z)$, où q est la projection orthogonale sur le plan F d'équation $x + z = 0$. Quelle est la distance de $(1, 1, 1)$ à F ?

2) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(1, 0, -1, 1)$ et $(1, 0, 1, 0)$. Trouver simultanément une base de $F^{\perp}$ et un système d'équations cartésiennes de F. Donner une méthode analogue pour obtenir un système d'équations cartésiennes d'un sous-espace $F \subset \mathbb{R}^n$ engendré par une suite $(u_1, \cdots, u_k)$.

3) Soit F un sous-espace de dimension k d'un espace vectoriel euclidien E. On suppose que $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée de E telle que $(e_1, \cdots, e_k)$ est une base de F. Montrer que l'application $u \mapsto \langle u, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle u, e_k\rangle e_k$ est la projection orthogonale de E sur F. Montrer que la distance d'un vecteur u à F est la norme de $\langle u, e_{k+1}\rangle e_{k+1} + \cdots + \langle u, e_n\rangle e_n$

Exercice 4. Le corps $\mathbb{C}$ comme plan réel euclidien.

Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes $x+iy$, considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour deux complexes u, v, on pose $\varphi(u, v) = \text{Re}(\bar{u}v)$ et $a(u, v) = \text{Im}(\bar{u}v)$.

1) Montrer que φ définit un produit scalaire sur le plan $\mathbb{C}$. Quelle est la norme associée ? Montrer que $(1, i)$ est une base orthonormée.

2) Montrer que a est le déterminant dans la base $(1, i)$. Calculer $\varphi^2(u, v) + a^2(u, v)$.

3) Montrer que les applications suivantes conservent la distance euclidienne sur $\mathbb{C}$:

$t_a : z \mapsto z + a$ (pour $a \in \mathbb{C}$ quelconque);

$r_u : z \mapsto u.z$ (pour $u \in \mathbb{C}$ de module 1);

$\sigma : z \mapsto \bar{z}$.

Vérifier que r_u et σ sont des endomorphismes du plan vectoriel réel $\mathbb{C}$; l'application t_a est-elle linéaire ?

Comparer $r_u \circ r_v$ et $r_v \circ r_u$, puis $r_u \circ \sigma$ et $\sigma \circ r_u$. Soit v un vecteur unitaire: montrer que la symétrie orthogonale s par rapport à la droite $D = \mathbb{R}.v$ de $\mathbb{C}$ se décompose d'une unique façon $s = r_u \circ \sigma$ et exprimer u en fonction de v.

4) Soit α, β deux nombres complexes. On considère l'application $f_{\alpha,\beta} : z \mapsto \alpha z + \beta \bar{z}$. Montrer que $f_{\alpha,\beta}$ est une application linéaire du plan vectoriel réel $\mathbb{C}$ dans lui-même. Montrer que $f_{\alpha,\beta}$ est une isométrie $\iff$ $|\alpha| = 1$ et $\beta = 0$, ou alors $\alpha = 0$ et $|\beta| = 1$. Que retrouve t-on dans le premier cas ? Montrer que dans le second cas $f_{\alpha,\beta}$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite qu'on précisera.

Exercice 5. Représentation des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$.
On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On rappelle qu'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ est une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

1) On note ℓ_1 l'application $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On définit de même ℓ_2. Vérifier que les ℓ_i sont des formes linéaires (*formes linéaires coordonnées*, parfois notées dx_i).

2) Pour tout $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ on considère l'application $f_\xi : (x_1, x_2) \mapsto \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$. Vérifier que les f_ξ sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$. Reconnaitre les application f_{e_1} et f_{e_2}. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$, exprimer l'application f_ξ d'abord en fonction du produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$, puis en fonction de f_{e_1} et f_{e_2}.

3) Montrer que toute forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ est un f_ξ pour ξ convenablement choisi.

4) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui envoie ξ sur f_ξ est un isomorphisme.

Ainsi toute forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ peut être représentée par un (unique) vecteur ξ de $\mathbb{R}^2$.

5) Reprendre les questions précédentes dans $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 1$ entier quelconque.

Exercice 6. Produit vectoriel, isométries de l'espace.

1) On fixe deux vecteurs u, v dans $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe un et un seul vecteur p tel que pour tout w on a $\langle p, w \rangle = \det(u, v, w)$ (le déterminant est pris dans la base canonique; on pourra considérer l'application $w \mapsto \det(u, v, w)$ et utiliser l'exercice précédent). On note $p = u \wedge v$.

2) Vérifier que $v \wedge u = -u \wedge v$. Calculer explicitement les coordonnées de $u \wedge v$ dans la base canonique (en fonction des coordonnées de u, v). Reprendre ce calcul dans une autre base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $(u \wedge v) \wedge w = -\langle v, w \rangle u + \langle u, w \rangle v$.

3-a) Montrer que pour tout vecteur unitaire a, l'application $q_a : x \mapsto \langle x, a \rangle a + x \wedge a$ est une isométrie directe de $\mathbb{R}^3$ fixant a. On note s_a le carré de q_a : montrer que s_a est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Soient a, b deux vecteurs unitaires de E. On définit une application $r_{a,b} : E \to E$ par $r_{a,b}(x) = x - 2\langle x, a \rangle a + 2(2\langle x, a \rangle \langle a, b \rangle - \langle x, b \rangle) b$.

b) Montrer que $r_{a,b}$ est une isométrie directe de E (on pourra considérer l'image d'une base orthonormée bien choisie). Déterminer $E_1(r_{a,b})$. Montrer que $r_{a,b} = s_b \circ s_a$. Montrer que deux symétries orthogonales par rapport à des droites orthogonales commutent.

c) Soit r une isométrie directe de E, $r \neq \mathrm{id}_E$.

i) Montrer que $\mathrm{Ker}(r - \mathrm{id}_E)$ est une droite D. Soit $P = D^\perp$.

ii) Soit $a \in P$ un vecteur unitaire. Montrer que $r' = r \circ s_a$ est une isométrie directe dont 1 et -1 sont valeurs propres. En déduire que $r' = s_b$ pour un certain vecteur unitaire $b \in P$.

iii) Montrer que pour toute isométrie directe r, il existe deux vecteurs unitaires a, b tels que $r = r_{a,b}$. Y a t-il unicité de cette écriture ?

Exercice 7. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $\det A$. En déduire que la suite (c_1, c_2, c_3) des vecteurs colonnes de A est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

2) Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à $\mathcal{B}$; soit $\mathcal{B}'$ la base ainsi obtenue.

3) Calculer la matrice de passage O de la base canonique à $\mathcal{B}'$. Montrer que O est orthogonale indirecte, et que c'est la matrice d'une symétrie. Diagonaliser O dans une base orthonormée.

4) Calculer la matrice de passage P de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Quelle particularité possède-t-elle ?

5) Montrer que A est le produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont positifs. Montrer l'unicité d'une telle décomposition.

Exercice 8. Pour trouver l'axe d'une rotation.

1) Soit A une matrice de $M_3(\mathbb{R})$. On pose $a_{21} = a$, $a_{31} = b$, $a_{32} = c$. Montrer que $(a, -b, c)$ est dans le noyau de $A - {}^tA$.

2) Soit R une matrice de $SO(3, \mathbb{R})$ qui n'est d'ordre 2 (ce n'est pas la matrice d'une symétrie orthogonale). Montrer que l'axe de R est dirigé par $(r_{21}, -r_{31}, r_{32})$.

Exercice 9. Soit E un plan vectoriel euclidien, r une isométrie directe de E et u_1, u_2, v_1, v_2 quatre vecteurs tels que $r(u_1) = v_1$, $\langle u_i, u_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$ pour tout $(i, j) \in \{1, 2\}^2$ et (u_1, u_2), (v_1, v_2) sont deux bases de même sens. Montrer qu'alors $r(u_2) = v_2$.

Exercice 10. Angle géométrique de deux vecteurs non nuls.
Pour u, v deux vecteurs non nuls de E, on pose

$$\overline{u, v} = \arccos\left(\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| . \|v\|}\right) \in [0, \pi]$$

1) Vérifier que $\overline{u,v} = \overline{\lambda u, \mu v}$ pour λ, μ deux réels non nuls de même signe. Vérifier que $\overline{u,v} = \overline{f(u), f(v)}$ si f est une isométrie ou une homothétie. Montrer que $\overline{u,v} = 0$ si et seulement si $\mathbb{R}^+ u = \mathbb{R}^+ v$, et que $\overline{u,v} = \pi$ si et seulement si $\mathbb{R}^+ u = \mathbb{R}^- v$.

2) Soit u, v, w trois vecteurs unitaires. On dit que w est entre u et v si $v = -u$ ou bien s'il existe $\lambda, \mu \geq 0$ tels que $w = \lambda u + \mu v$.

a) Montrer que si w est entre u et v alors on a toujours $\overline{u,v} = \overline{u,w} + \overline{w,v}$. Que se passe t-il si w est dans le sous-espace engendré par u, v mais pas entre u et v ?

b) Montrer qu'on a l'inégalité $\overline{u,v} < \overline{u,w} + \overline{w,v}$ si w n'est pas entre u et v (on pourra considérer le projeté orthogonal w_1 de w sur le sous-espace engendré par u et v, et montrer qu'il suffit de raisonner sur w_1).

Exercice 11. Angle orienté de vecteurs.
Soit E un plan vectoriel euclidien orienté et (i, j) une base orthonormée directe de E. Déterminer les angles orientés de vecteurs suivants :
$\alpha_1 = \widehat{i, j}$, $\alpha_2 = \widehat{i, i+j}$, $\alpha_3 = \widehat{i, i-j}$, $\alpha_4 = \widehat{i-j, i}$, $\alpha_5 = \widehat{i+j, i-j}$, $\alpha_6 = \widehat{-i, j-i}$ $\alpha_7 = \widehat{-i-j, -j}$, $\alpha_8 = \widehat{f(i-j), f(i)}$ (pour f une isométrie de E).

Exercice 12. Composées d'isométries.
Soit E un plan vectoriel euclidien orienté.

1) Soit f une isométrie de E et σ la réflexion orthogonale par rapport à une droite D. Montrer que $f\sigma f^{-1}$ est la réflexion orthogonale par rapport à $f(D)$.

2) Montrer que tout produit de trois réflexions est une réflexion. Montrer que l'axe de la réflexion $\sigma = \sigma^{\perp}_{D_3} \circ \sigma^{\perp}_{D_2} \circ \sigma^{\perp}_{D_1}$ est dirigé par un vecteur u tel que $\widehat{u, u_3} = \widehat{u_1, u_2}$.

3) Montrer que pour tout f, g isométries on a $fgf^{-1}g^{-1}$ dans $SO(E)$. Réciproquement montrer que pour tout $r \in SO(E)$ il existe f, g telles que $fgf^{-1}g^{-1} = r$.

Exercice 13. Classification des isométries en dimension 3.
On se propose d'utiliser la classification des isométries du plan vectoriel euclidien pour obtenir celle des isométries de l'espace vectoriel euclidien de dimension 3.

1) Soit f une isométrie d'un espace vectoriel euclidien E de dimension quelconque et soit u un vecteur propre de f. Montrer qu'alors $f(u) = \pm u$ et que f préserve l'hyperplan orthogonal à la droite $\mathbb{R}.u$.

Dans la suite, E est un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et f une isométrie de E.

2) Montrer que f admet toujours 1 ou -1 comme valeur propre.

3) Soit u un vecteur propre unitaire de f, ε la valeur propre associée et soit P le plan orthogonal à la droite $\mathbb{R}.u$.

a) Suivant la nature de $f_{|P}$, montrer qu'il existe une base orthonormée (v, w) de P telle que la matrice de f dans $\mathcal{B} = (u, v, w)$ soit de l'une des formes ci-dessous:

$$R(\theta)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\qquad A(\theta)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\Sigma=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\qquad \rho=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

b) Réciproquement, montrer que toute application linéaire de E dans lui-même dont la matrice dans une base orthonormée est du type précédent est une isométrie de E.

c) Soit f une isométrie dont la matrice dans une base orthonormée est Σ ou ρ. Montrer que sa matrice dans une autre base orthonormée convenablement choisie est $A(0)$ ou $R(\pi)$.

d) Soit f une isométrie et $\mathcal{B}$ une base orthonormée telle que $\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B})=R(\theta)$ (ou $A(\theta)$). Montrer qu'on peut choisir une autre base orthonormée $\mathcal{B}'$ de même sens que $\mathcal{B}$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est $R(-\theta)$ (ou $A(-\theta)$).

4) Déduire de ce qui précède que pour toute isométrie f, il existe $\theta\in[0,\pi]$ et une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B})=R(\theta)$ ou $A(\theta)$. Dans les deux cas, calculer le déterminant de f et exprimer $\cos\theta$ en fonction de $\mathrm{Tr}(f)$.

Montrer que si f a une matrice de type R dans une certaine base orthonormée, elle ne peut avoir une matrice de type A dans une autre base orthonormée. Enfin, montrer que $\theta\in[0,\pi]$ est complètement déterminé par f (on l'appelle l'angle de f).

Une isométrie f admettant une matrice de type R (resp: A) dans une base orthonormée convenable s'appelle une rotation *(resp:* antirotation*); si $\theta=0$ alors f est l'identité (resp: une symétrie orthogonale par rapport à un plan), si $\theta=\pi$ on dit que f est un retournement - c'est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.*

5) Montrer que si f est une rotation d'angle θ alors f^{-1} est une rotation d'angle θ et $-f$ est une antirotation d'angle $\pi-\theta$. Que peut-on dire de deux rotations f,g de même angle telles que $\mathrm{Fix}(f)=\mathrm{Fix}(g)$ est une droite ?