Licence Math. Fond. 2004-05
Calcul Intégral

Feuille 5

Exercice 1. (Une extension de la formule d'intégration par parties aux fonctions intégrables.)

1. Pour $f \in L^1([0,1])$, on note $P_f(x) = \int_0^x f(t)dt$. Montrer que P_f est continue mais pas toujours dérivable. (Donner si possible deux exemples avec f bornée et non-bornée.)

2. Pour $f, g \in L^1([0,1])$, on note

$$\Psi(f,g) = \int_0^1 P_f(x)g(x)dx + \int_0^1 f(x)P_g(x)dx - P_f(1)P_g(1)\,.$$

a)Montrer que $\Psi(f,g)$ est bien défini et vérifie $|\Psi(f,g)| \leq 3||f||_1||g||_1$.

b) Rappeler pourquoi $\Psi(f,g) = 0$ si f et g sont continues. La preuve correspondante s'étend-elle directement au cas $f, g \in L^1$?

c) Montrer par un argument de densité que $\Psi(f,g) = 0$ si $f, g \in L^1([0,1])$.

Exercice 2. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive bornée telle que $\int h(x)dx = 1$. Pour $\epsilon > 0$ on pose $h_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}h(\frac{x}{\epsilon})$. Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que :

1. pour presque tout x, on a

$$|f * h_\epsilon - f| \leq \int |f(x - \epsilon t) - f(x)|h(t)dt.$$

2. pour tout $A > 0$, et pour presque tout x,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-A}^{A} h(t) \int |f(x - \epsilon t) - f(x)|h(t)dt = 0$$

(commencer par le cas où f est f est continue a support compact).

3. on a
$$\lim_{\epsilon\to 0} \|f * h_\epsilon - h\|_{L^1} = 0.$$

Exercice 3. (examen 2004-2005) Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et p un réel, avec $1 < p < +\infty$. Soient $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(X)$ et $f \in L^p(X)$. On dit que (f_k) *converge faiblement* vers f dans $L^p(X)$ (et on écrit $f_k \rightharpoonup f$) si
$$(*) \qquad \lim_{k\to\infty} \int f_k g d\mu = \int f g d\mu$$
pour tout $g \in L^q(X)$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que si (f_k) converge vers f dan $L^p(X)$ pour la norme alors $f_k \rightharpoonup f$ dans $L^p(X)$.

2. On suppose ici que $X = \mathbb{R}^n$ et que μ est la mesure de Lebesgue. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\mathbb{R}^n)$ telle que
$$(1) \qquad \text{il existe } M > 0 \text{ tel que } \|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq M \text{ pour tout } k \geq 1$$
Montrer que $(*)$ est vraie pour tout $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors $f_k \rightharpoonup f$.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f_k(x) = \mathbf{1}_{|x|\leq 1} e^{ikx}$. Montrer que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie (1), puis que (f_k) converge faiblement dans $L^p(\mathbb{R})$ vers une fonction f que l'on déterminera.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ définie par $f_k(x) = \Psi(x + kx_0)$ où $\Psi \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ et x_0 est un point fixé de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Montrer que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie (1), puis que (f_k) converge faiblement dans $L^p(\mathbb{R})$ vers une fonction f que l'on déterminera.

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f_k(x) = \frac{1}{k}\Psi(\frac{x}{k})$ où $\Psi \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$. Montrer que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie (1), puis que (f_k) converge faiblement dans $L^p(\mathbb{R})$ vers une fonction f que l'on déterminera.