Dynamique des populations

Vers 1845, le mathématicien belge Pierre Verhulst a proposé un modèle pour décrire l'évolution d'une population dans un milieu fixe. On note p_n l'effectif de la population à l'année n. On suppose que la population admet un "effectif idéal" noté $p_{idéal}$. On veut que :

- s'il y a surpopulation à l'année n (c'est-à-dire si $p_n > p_{idéal}$), alors la population décroît entre l'année n et l'année $n+1$ (c'est-à-dire $p_{n+1} < p_n$), et décroît d'autant plus que la surpopulation est importante (c'est-à-dire que $p_{n+1} - p_n$ est d'autant plus grand que $p_n - p_{idéal}$ est grand),
- au contraire, s'il y a sous-population à l'année n, alors la population croît entre l'année n et l'année $n+1$, et croît d'autant plus que la souspopulation est importante.

La façon la plus simple de satisfaire ces conditions est de demander que $(p_{n+1} - p_n)/p_n$ (le taux de variation de la population entre l'année n et l'année $n+1$) soit proportionnel à $p_n - p_{idéal}$ avec un coefficient de proportionalité négatif $-k$. On obtient ainsi la loi d'évolution suivante: $p_{n+1} = p_n - k.p_n.(p_n - p_{idéal})$. Le paramètre k mesure "la violence des réactions du système". Pour que le modèle ne conduise pas à des résultats abérrants (population négative), on doit se restreindre au cas où la population varie dans l'intervalle $]0, p_{max}[$ où $p_{max} = (1 + k.p_{idéal})/k$.

Pour rendre les calculs plus agréables, plutôt que la population p_n, on va étudier la *population normalisée* $u_n := p_n/p_{max}$. Cette population normalisée varie dans l'intervalle $[0, 1]$. De la loi d'évolution de p_n, on déduit facilement la loi d'évolution de la population normalisée :

$$u_{n+1} = a.u_n.(1 - u_n)$$

où $a = k.p_{idéal} + 1$ est le paramètre qui mesure la violence des réactions du système. On notera f_a la fonction de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ définie par $f_a(x) = a.x.(1 - x)$; on a donc $u_{n+1} = f_a(u_n)$. L'effectif idéal de la population normalisée est :

$$u_{idéal} = (a - 1)/a.$$

Le problème est simple : la population u_n tend-t-elle sagement vers son effectif idéal $u_{idéal}$ quand n tend vers l'infini ? Sinon, que se passe-t-il ? A priori, la réponse dépend de la valeur du paramètre a, et de la population initiale u_0...

Question 1. équilibre stable

Dans cette question, le paramètre a est égal à 2. L'effectif idéal de la population est donc $u_{idéal} = 1/2$. Montrer que, quelque que soit la population initiale u_0 dans $]0, 1[$, la population u_n tend vers $u_{idéal}$ quand n tend vers $+\infty$.

Conseil. *Tracer le graphe de f_a sur $[0, 1]$ puis les premiers termes de la suite (u_n) pour différentes valeurs de u_0 pour comprendre ce qui se passe. Distinguer les cas $u_0 \leq \frac{1}{2}$ et $u_0 \geq \frac{1}{2}$.*

Question 2. Dédoublement de période

On augmente la valeur du paramètre a: dans cette question, on prend $a = \frac{10}{3}$. On va voir que les choses sont déjà moins simples que dans le cas de la question 1.

(i). — Si la population u_n converge, quelles sont les limites possibles? Les suites (u_n) qui tendent vers $u_{idéal}$ sont très spéciales, pourquoi ? *Vous pouvez utiliser votre cours.*

(ii). — On constate expérimentalement que pour "la plupart" des valeurs de la population initiale u_0 dans $[0, 1]$, la suite (u_{2n}) tend vers une limite l et la suite (u_{2n+1}) tend vers une limite $l' \neq l$. Déterminer les valeurs de l et l'.
Indications :

- *Comment obtient-on $u_{2(n+1)}$ en fonction de u_{2n} ? Et $u_{2(n+1)+1}$ en fonction de u_{2n+1} ?*
- *Quelle équation doivent vérifier l et l' ?*
- *Résoudre cette équation...*

(iii). — ($\star$) (facultatif) Prouver que, si la population initiale u_0 est assez proche de l, alors (u_{2n}) tend effectivement vers l et (u_{2n+1}) tend effectivement vers l'.

Question 3. Régime chaotique

On augmente encore la valeur du paramètre a : dans cette question on prend $a = 4$. Quelque soit $p \in \mathbb{N}$, on note $f_a^p = f_a \circ f_a \circ \cdots \circ f_a$ (avec p fois la fonction f_a dans le second membre de l'égalité) ; par exemple, $f_a^3 = f_a \circ f_a \circ f_a$.

(i). — Tracer soigneusement le graphe de f_a sur $[0, 1]$.

Remarquer que, pour tout x, on a $f_a^{p+1}(x) = f_a(f_a^p(x))$. Quelles sont les valeurs de $f_a^p(x)$ qui conduisent à $f_a^{p+1}(x) = 0$? et à $f_a^{p+1}(x) = 1$? En déduire que, pour tout p, la fonction f_a^p prend la valeur 0.

($\star$) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction f_a^p prend la valeur 1, c'est-à-dire montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un nombre c_p dans $[0, 1]$ tel que $f_a^p(c_p) = 1$.

($\star\star$) Les questions ci-dessus étaient un échauffement : on a besoin d'un résultat plus précis. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $2^p + 1$ nombres

$$0 = b_{p,0} < b_{p,1} < b_{p,2} < \cdots < b_{p,2^p-1} < b_{p,2^p} = 1$$

tels que

$$f_a^p(b_{p,0}) = 0, \quad f_a^p(b_{p,1}) = 1, \quad f_a^p(b_{p,2}) = 0, \quad \ldots \quad , f_a^p(b_{p,2^p-1}) = 0, \quad f_a^p(b_{p,2^p}) = 1.$$

Autrement dit, la fonction f_a^p prend "beaucoup de fois", alternativement, les valeurs 0 et 1. Représenter l'allure du graphe de la fonction f_a^p pour $p = 2$, puis 3, puis...

(ii). — Fixons p. Pour chaque $k \in \{1, \ldots, 2^p\}$, on note $I_k = [\, b_{p,k-1}\, ,\, b_{p,k}\,]$. Quel est l'image de l'intervalle I_k par f_a^p ? Montrer que l'équation $f_a^p(x) = x$ possède une solution dans chacun des intervalles $I_{p,1}, I_{p,2}, \ldots, I_{p,2^p}$. Quel est le comportement de la population (u_n) si la population initiale u_0 est une solution de l'équation $f_a^p(x) = x$?

Commentaire. *On en déduit que, pour tout p, il existe une valeur initiale de la population pour laquelle telle que la population a un comportement périodique de période p. En particulier, l'évolution de la population dépend radicalement de la valeur de la population initiale : pour certaines valeurs de la population initiale, l'evoluation de la population est cyclique de période 3 ans, pour d'autres valeurs, elle est cyclique de période 11 ans, etc.*

(iii). — Fixons à nouveau p. Expliquer pourquoi l'un au moins des intervalles $I_{p,1}, I_{p,2}, \ldots, I_{p,2^p}$ est de longueur inférieure inférieure à $\frac{1}{2^p}$. En déduire qu'il existe deux valeurs de la population initiale u_0 et u_0', telles que $\mid u_0 - u_0' \mid < \frac{1}{2^p}$, et telles que les valeurs correspondantes u_p et u_p' de la population à l'année p sont telles que $\mid u_p - u_p' \mid = 1$.

Si on connait la population à l'année 0 avec une incertitude de $\frac{1}{10^9}$, avec quelle précision le modèle permet-il de prévoir la population à l'année 30 ? Qu'en pensez-vous ?

Commentaire. *Le phénomène entrevu ci-dessus est connu sous le nom de "sensibilité aux conditions initiales" : une toute petite perturbation des conditions initiales entraîne un changement radical dans l'évolution du système à moyen terme. Ce phénomène apparaît dans l'étude de nombreux systèmes, et rend impossible en pratique la prédiction du comportement à long terme de ces systèmes. C'est l'un des enseignements les plus importants de la "théorie du chaos".*