Licence Math. Fond. 2004-05
Calcul Intégral

Feuille 6

Exercice 1.
1. Montrer que l'intégrale $\int_{[-1,1]^2} \frac{2xy}{x^2+y^2} dxdy$ existe et vaut 0.
2. Que dire de $\int_{[-1,1]^2} \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} dxdy$?
3. Calculer $\int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx \right) dy$ et $\int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \right) dx$.Qu'en déduit-on ?

Exercice 2. **(examen 2003-2004)** En utilisant la fonction $f : (0, +\infty) \times (0 + \infty) \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = ye^{-y^2(1+x^2)}$, montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 3. On considère les espaces mesurés $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue et $([0, 1], \mathcal{P}_{[0,1]}, m)$ où m est la mesure de comptage.
1. Montrer que $\Delta = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$ est dans $\mathcal{B}_{[0,1]} \otimes \mathcal{P}_{[0,1]}$.
2. Calculer $\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} 1_\Delta dm \right) d\lambda$ et $\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} 1_\Delta d\lambda \right) dm$.
3. Comparer ce résultat au théorème de Fubini-Tonelli.

Exercice 4. Pour quelles valeurs du paramètre $\alpha > 0$ la fonction

$$f(x, y) = \frac{y \sin(x + y)}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

est-elle intégrable sur le domaine $[0, 1] \times [1, +\infty[$ muni de la mesure de Lebesgue?

Exercice 5. Montrer que $\int_{[0,1]^2} \frac{dx\,dy}{1-xy} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 6.

1. Pour tout $a > 0$ et tout $t > 0$, calculer $\int_0^a e^{-xt} \sin x\, dx$.

2. En déduire que pour tout $a > 0$, on a: $\int_0^a \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-at}(\cos a + t \sin a)}{1+t^2}\, dt$.

3. Retrouver ainsi $\lim_{a\to+\infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Exercice 7. A l'aide de $\int_{[0,1]\times[a,b]} x^y\, dxdy$, $0 < a < b$, calculer $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)}\, dx$.

Exercice 8. Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartenant à $C^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ avec $p \in]1, +\infty]$. Pour $h \in \mathbb{R}$, on note u_h l'application définie par $u_h(x) = u(x+h)$. On note p' l'exposant conjugué de p.

1. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes:

(i) $u' \in L^p(\mathbb{R})$;

(ii) Il existe $C > 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}$, on ait $\|u_h - u\|_{L^p} \leq C\,|h|$;

(iii) Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u\, \varphi' \right| \leq C\, \|\varphi\|_{L^{p'}}.$$

2. Montrer que dans (ii) et (iii) on peut choisir $C = \|u'\|_{L^p}$ et que c'est la meilleure constante possible.

3. Quelles implications restent vraies quand $p = 1$?

Exercice 9. Montrer que $\int_{[0,1]^2} \frac{dx\,dy}{1-xy} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 10. Soient A et B deux boréliens de $\mathbb{R}^n$ tels que $0 < \lambda(A) < +\infty$ et $0 < \lambda(B) < +\infty$, où λ désigne la mesure de Lebesgue.

a. Montrer que $f = \mathbf{1}_A * \mathbf{1}_B$ est continue non identiquement nulle.

b. Montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) \neq 0\} \subset A + B$.

c. Montrer que $A + B$ est d'intérieur non vide.

d. Généraliser le résultat de la question précédente au cas $\lambda(A) > 0$ et $\lambda(B) > 0$.

Exercice 11. Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \frac{\pi}{2} \leq x+y \leq \pi\}$ et

$$f(x,y) = e^{\frac{x-y}{x+y}} \cos(x+y).$$

Montrer que f est intégrable sur Δ (muni de la mesure de Lebesgue) et calculer son intégrale sur Δ.

Exercice 12. Calculer l'intégrale

$$\int_D (x-2y)^2 e^{(x+y)^2}\, dxdy\,,$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq y \leq x/2 \text{ et } x+y \leq 1\}$.

Exercice 13. Soit f une fonction borélienne de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, et A l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ dont les trois coordonnées sont positives. Montrer que

$$\int_A f(x+y+z)\, dxdydz = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(u)u^2\, du.$$

Exercice 14. Soient F l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $F(x,y) = (x+y,\ xy)$, et B un borélien de $\mathbb{R}^2$. Calculer $m(F^{-1}(B))$, où m désigne la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15. **(examen 2002-2003)** Étant donnée une fonction f on note $\check{f}(x) = f(-x)$. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ où $p \in [1,+\infty]$ et p' désigne l'exposant conjugué de p. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(z)\, h(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^n} g(z)\, (\check{f} * h)(z)\, dz.$$

Exercice 16. On se donne un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, avec μ sigma-finnie, et on munit $X \times X$ de la tribu produit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. On se donne une fonction positive A, définie sur $X \times X$ et mesurable pour $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. On suppose de plus qu'il existe $C_0 > 0$ tel que

$$\int_X A(x,y)d\mu(y) \leq C_0 \text{ pour tout } x \in X \tag{1}$$

et

$$\int_X A(x,y)d\mu(x) \leq C_0 \text{ pour tout } y \in X. \tag{2}$$

1. Montrer que si f est une fonction mesurable sur X (pour $\mathcal{A}$), la fonction $A(x,y)f(y)$ est mesurable pour tout $x \in X$.

2. Montrer que pour tout $f \in L^\infty(X, d\mu)$, on définit une fonction bornée Tf par

$$Tf(x) = \int_X A(x,y)f(y)d\mu(y) \tag{3}$$

pour tout $x \in X$, et que $|Tf(x)| \leq C_0||f||_\infty$.

3. Montrer que si $f \in L^1(X, d\mu)$, la fonction $A(x,y)f(y)d\mu(y)$ est intégrable (en y) pour μ-presque tout $x \in X$, la formule (3) définit une fonction Tf dans $L^1(X, d\mu)$, et $||Tf||_1 \leq C_0||f||_1$.

On se donne maintenant un exposant $p \in]1, +\infty[$ et une fonction f mesurable positive sur X, et on définit $Tf(x) \in [0, +\infty]$ par (3). [C'est possible à cause de la question 1.]

4. Dire pourquoi Tf est mesurable.

5. Montrer que

$$Tf(x) \leq C_0^{1-\frac{1}{p}} \left\{ \int_X A(x,y)f(y)^p \right\}^{1/p} \tag{4}$$

6. En déduire que $||Tf||_p^p \leq C_0^p||f||_p^p$.

7. On suppose maintenant que $f \in L^p(X, d\mu)$ pour un $p \in]1, +\infty[$, mais sans supposer que f est à valeurs positives. Montrer que pour μ-presque tout $x \in X$, la fonction $A(x,y)f(y)d\mu(y)$ est intégrable en y (ce qui permet de définit $Tf(x)$ par (3)), que Tf est mesurable, que $Tf \in L^p(X, d\mu)$, et que $||Tf||_p \leq C_0||f||_p$.