Licence Math. Appliquées 2004-05
Géométrie

Feuille 7

Dans la suite E désigne un plan affine euclidien orienté, on note $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs de $\vec{E}$ et $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$ leur angle orienté (un réel modulo 2π). Si a, b sont deux points de E on note ab leur distance euclidienne.

Préliminaire: triangles directs et signe des angles
Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\vec{E}$. Montrer qu'il existe un unique réel $\theta \in]-\pi, \pi]$ représentant $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$. Vérifier que $|\theta|$ est l'angle géométrique entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base directe si et seulement si $0 < \theta < \pi$ (l'angle est "positif"). En déduire, une définition de "triangle direct" utilisant le "signe" des angles orientés.

Exercice 1. Angles à la base d'un triangle isocèle
1) Montrer que les angles orientés à la base d'un triangle sont opposés si et seulement si le triangle est isocèle.

2) Montrer qu'un triangle est isocèle si et seulement si les angles géométriques à la base du triangle sont égaux.

Exercice 2. Somme des angles d'un triangle
Soit a, b, c trois points deux à deux distincts du plan.

1) On pose $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}})$, $\beta = (\widehat{\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ba}})$, $\gamma = (\widehat{\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}})$, et on veut montrer que $\alpha+\beta+\gamma = 0 (\mathrm{mod} 2\pi)$. Pour cela, on considère la composée $f = \rho_{b,\beta} \circ \rho_{c,\gamma} \circ \rho_{a,\alpha}$.

1.a) Montrer que $\overrightarrow{\rho_{a,\alpha}}$ envoie $\overrightarrow{ab}$ sur un vecteur positivement colinéaire à $\overrightarrow{ac}$.

1-b) Montrer que $\vec{f}$ envoie $\overrightarrow{ab}$ sur un vecteur négativement colinéaire à $\overrightarrow{ab}$. Quelle est la nature de f ? Conclure.

2) On suppose que les points a, b, c ne sont pas alignés, on introduit les angles géométriques $\widehat{A} = \widehat{bac}, \widehat{B} = \widehat{abc}, \widehat{C} = \widehat{acb}$ et on veut montrer que $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$.

Montrer que les trois angles orientés α, β, γ ont le même signe (voir le préliminaire) et conclure.

Exercice 3. Formulaire dans un triangle

Soit pqr un triangle de E. On note:
- a, b, c les longueurs des côtés qr, rp, pq;
- $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ le demi-périmètre de pqr;
- R le rayon du cercle circonscrit;
- A, B, C les angles géométriques en p, q, r.

Etablir les formules suivantes:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R = \frac{abc}{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Exercice 4. Existence de l'orthocentre, symétriques de l'orthocentre

Soient a, b, c trois points non alignés de E. On note a', b', c' les *pieds des hauteurs du triangle abc*, issues respectivement de a, b, c (i.e. les projetés orthogonaux de ces points sur les côtés opposés).

1) Montrer que les droites (aa') et (bb') sont sécantes en un point h, puis (si $h \neq c$) que les droites (hc) et (ab) sont perpendiculaires (utiliser les cocyclicités de certains points avec a' et b').
Ainsi les trois hauteurs de abc sont concourantes en un point h (l'orthocentre de abc).

2) Montrer que les symétriques de h par rapport aux côtés de abc sont sur le cercle circonscrit à abc.

3) Dans $\mathbb{R}^3$ on considère le tétraèdre $abcd$ défini par $a = (0,0,0), b = (1,0,0), c = (0,1,0), d = (1,0,1)$. Rappeler la définition des hauteurs de $abcd$ et montrer qu'elles ne sont pas concourantes.
Ainsi un tétraèdre n'a pas, en général, d'orthocentre.

Exercice 5. La droite de Simson

Soient a, b, c trois points non alignés de E. Soit m un point du plan et a', b', c' les projections orthogonales de m sur $(bc), (ac)$ et (ab) respectivement.

Montrer que m est sur le cercle circonscrit à abc si et seulement si a', b', c' sont alignés (la droite contenant a', b', c' est alors appelée *droite de Simson de m relativement à abc*).

Exercice 6. Cercle d'Euler

Soit abc un triangle non rectangle d'orthocentre h. On note $p, p'p''$ le milieu de b, c, le pied de la hauteur issue de a et le milieu de a, h. On introduit de même q, q', q'', r, r', r''.

1) Montrer que les droites $(p''q''), (pq)$ et (ab) sont parallèles, ainsi que les droites $(p''q)$ et (cr'). Que dire du triangle $p''q''q$?

2) Montrer que $pqp''q''$ est un rectangle. Montrer que les neuf points $p, p', p'', q, q', q'', r, r', r''$ sont cocycliques.

Exercice 7. Bissectrices

Soient a, b, c trois points non alignés de E. On introduit les rotations r_a, r_b, r_c de centres respectifs a, b, c et d'angles respectifs $\alpha = \widehat{\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}}, \beta = \widehat{\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ba}}, \gamma = \widehat{\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}}$. On pose $s = r_b r_c r_a$. On introduit aussi les bissectrices intérieures $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ de abc, puis les symétries orthogonales $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ par rapport à ces droites, enfin la composée $\sigma = \sigma_b \sigma_c \sigma_a$.

1) Rappeler pourquoi s est une symétrie centrale (on notera i_c son centre).

2) Montrer que s préserve la droite (ab). En déduire que $i_c \in (ab)$.

3) Montrer que $s = \sigma^{\perp}_{(ab)} \circ \sigma$.

4) Déduire de ce qui précède que σ est la symétrie orthogonale par rapport à la perpendiculaire à (ab) en i_c. Montrer enfin que $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ sont concourantes.

Exercice 8. Cercle inscrit dans le triangle orthique

Soit abc un triangle non rectangle, d, e, f les pieds des hauteurs issues de a, b, c.

1) Montrer que les hauteurs de abc sont les bissectrices intérieures de def.

2) Soit ω le centre du cercle circonscrit à abc. Montrer que $(\omega b) \perp (fd), (\omega c) \perp (de), (\omega a) \perp (ef)$ (on pourra utiliser l'angle au centre).