Licence Math. Fond. 2004-2005
Calcul intégral

Feuille n°7

Exercice 1

Soit $H = L_C^2([0,1])$ et $V = \left\{ f \in H; \int_0^1 f(t)\, dt = \int_0^{1/2} f(t)\, dt = 0 \right\}$.

a) Montrer que V est un sous-espace vectoriel fermé de H. .Déterminer une base de $V^{\perp}$.
b) Soit f la fonction $t \to t$. Calculer la projection orthogonale de f sur V dans H, puis calculer $dist(f,V)$.

Exercice 2

Soit $H = L_C^2([0;+\infty[)$ et $V = \left\{ f \in H; \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)te^{-t}dt = 0 \right\}$.

a) Montrer que V est un sous-espace vectoriel fermé de H.
b) Montrer que $\phi : t \to e^{-2t}$ définit un élément de H et déterminer la projection orthogonale de ϕ sur V dans H.

Exercice 3

a) Déterminer la quantité $\min\limits_{a,b,c \in IR} \int_{-1}^{1} \left| x^3 - (a + bx + cx^2) \right|^2 dx$.
b) En déduire $\max \int_{-1}^{1} x^3 g(x)\, dx$ où le maximum est pris pour toutes les fonctions g de $L^2(IR)$ vérifiant les conditions

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} xg(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 g(x)dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} |g(x)|^2 dx = 1.$$

Exercice 4

Soit (X, τ, μ) un espace mesuré et $(f_n)_{n \in IN}$ une suite d'éléments de $L_{IR}^2(X, \tau, \mu)$ deux à deux orthogonaux. Montrer que la série $\sum_{n \in IN} f_n$ converge (dans L^2) si et seulement si $\sum_{n \in IN} \| f_n \|_2^2$ est convergente (dans IR).

Exercice 5 : *projection sur le cône positif de* L^2

Soit (X, τ, μ) un espace mesuré et $E = L_{IR}^2(X, \tau, \mu)$. On pose $C = \{ f \in E; \quad f \geq 0 \;\; p.p. \}$.

a) Montrer que C est une partie convexe fermée de E.
b) Soit $f \in E$. Déterminer la projection orthogonale de f sur C dans E,

Exercice 6 : *Approximation dans* L^2

Pour $f \in L^2$ et $k \in IN^*$, on définit $T_k f$ de IR dans IR par $T_k f(x) = k \int_{\frac{n(x)}{k}}^{\frac{n(x)+1}{k}} f(t)\, dt$ où

$n(x)$ est l'entier tel que $\dfrac{n(x)}{k} \leq x < \dfrac{n(x)+1}{k}$.

a) Montrer que $T_k f \in L^2$ et que $\|T_k f\|_2 \leq \|f\|_2$ pour tout $k \in IN^*$.

b) Soit $f \in L^2$. Montrer que $T_k f \to f$ dans L^2 quand $k \to +\infty$.

Exercice 7

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n \in IN}$ une suite d'éléments de $L^2_{IR}(X, \mathcal{T}, \mu)$ et $f \in L^2$ telle que la suite $(f_n)_{n \in IN}$ converge faiblement vers f dans L^2.

a) Montrer que $\|f\|_2 \leq \liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|_2$.

b) On suppose de plus que $\|f_n\|_2 \to \|f\|_2$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in IN}$ tend vers f dans L^2.

Exercice 8

On note m la mesure de dénombrement sur $\mathcal{P}(IN)$. On note $l^2 = L^2_{IR}(IN, \mathcal{P}(IN), m)$.

a) Montrer que chaque élément de l^2 ne contient qu'un seul élément de l'espace quotient $\mathcal{L}^2_{IR}(IN, \mathcal{P}(IN), m)$.

b) Soit $\phi : IN^* \to IN^*$ bijective. Montrer que $\sum_{n \in IN^*} \frac{\phi(n)}{n^2} = \infty$

(on pourra commencer par montrer que $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\phi(p)} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$ pour tout $n \in IN^*$ et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Exercice 9

Soit $E = L^2_{IR}(IR, C)$ et soit U le sous-espace formé par les classes des fonctions paires . Montrer que U est fermé . Expliciter $U^\perp$ dans ce cas et montrer directement dans ce cas que E est somme Hilbertienne de U et $U^\perp$.

Exercice10

Soit $(H, \langle \ \rangle)$ un espace de Hilbert sur C, et T un opérateur linéaire continu sur H .

1) Soit $y \in H$. Montrer que l'application $x \to \langle T(x), y \rangle$ est une forme linéaire continue sur H. En déduire qu'il existe un unique opérateur linéaire continu $T^* : H \to H$ tel que

$$\forall x, y \in H, \quad \langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle .$$

Montrer que $(T^*)^* = T$ et que $\|T^*\| = \|T\|$.

2) On prend $H = L^2([0,1])$. Déterminer T^* lorsque :

a) $T(f) = hf$ où h est une fonction fixée.

b) $T(f)(x) = \int_{[0,1]} K(x,y) f(y) dy$ où $K \in L^2([0,1] \times [0,1])$. Cas particulier : $K(x,y) = 1_{[0,1]}(y)$.

Exercice11

Soit $(H, \langle \ \rangle)$ un espace de Hilbert sur C, et P un opérateur linéaire continu sur H tel que $P^2 = P$ (P est un projecteur). On suppose que $\|P\| \leq 1$;

1) Montrer que P^* est aussi un projecteur de norme ≤ 1.

2) Montrer que $\operatorname{Im} P = Ker(Id - P)$ et $Ker\, P = (\operatorname{Im} P)^\perp$

3) Calculer $\|x - P^* x\|^2$ et montrer que $Ker(Id - P) = Ker(Id - P^*)$.

4) En déduire que $Ker\, P$ est orthogonal à $\operatorname{Im} P$.

Exercice12

Si $f \in L^1([-\pi,\pi])$, on dénote par c_n ou $c_n(f)$ ses coefficients de Fourier et on pose $S_N(f) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}$.

1) Soit $f \in C^1([-\pi,\pi])$ telle que $f(-\pi) = f(\pi)$. Montrer que la série $\sum_{n\in Z} c_n e^{inx}$ converge normalement vers f .

2) Soit $g \in L^2([-\pi,\pi])$ telle que $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = 0$. On définit $f(x) = \int_{-\pi}^{x} g(t)dt$ pour $x \in [-\pi,\pi]$. Montrer que la série $\sum_{n\in Z} c_n e^{inx}$ converge normalement vers f .

3) Soit $f(x) = x$, $x \in [-\pi,\pi]$. Montrer que les sommes partielles de la série de Fourier ne convergent pas uniformément

Calculer $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$.

Montrer que (S_N) converge uniformément vers f sur tout compact de $]-\pi,\pi[$ (utiliser le critère d'Abel).

Montrer que la suite (S_N) converge simplement et déterminer sa limite.

4) Soit $f \in C^1([-\pi,\pi])$. Montrer que (S_N) converge uniformément sur les compacts de $[-\pi,\pi]$ et simplement sur $[-\pi,\pi]$ vers une fonction que l'on déterminera. Généralisation ?

5) Soit $f(x) = (x+\pi)^2$, $x \in [-\pi,\pi]$. Retrouver $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$.

Exercice13

1) Soient $f, g \in L^1_{2\pi}$. Montrer que $f * g \in L^1_{2\pi}$ et que $c_n(f*g) = \sqrt{2\pi}\, c_n(f) c_n(g)$.

2) Lorsque $f, g \in L^2_{2\pi}$, vérifier que $f * g \in C_{2\pi}$ et que la série de Fourier de $f * g$ est normalement sommable et de somme $f * g$.

3) Montrer que $(C_{2\pi}, +, ., *)$ est une C algèbre commutative et associative.

4) A l'aide de la fonction f 2π - périodique , telle que : $\forall t \in [0,\pi]$ $f(t) = t$ et de $f * f$ calculer les sommes suivantes : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$ et $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^8}$.

5) Montrer que $C_{2\pi}$ n'a pas d'élément neutre pour $*$.

6) Existe-t-il des diviseurs de 0 dans le pseudo-anneau $(C_{2\pi}, +, *)$.

7) résoudre l'équation $f * f = f$, d'inconnue $f \in C_{2\pi}$

8) Soient $N \in IN^*$, $(\alpha_1, ..., \alpha_N) \in C^N$ tel que $\alpha_1 \neq 0$, $P = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k X^k$;

Pour $f \in C_{2\pi}$, on note $P(f) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f^{[k]}$, où $f^{[k]} = f * ..... * f$ (k fois).

Résoudre l'équation $P(f) = 0$ d'inconnue $f \in C_{2\pi}$

Exercice14 *Théorème de Bernstein*
On note $C^{0,\alpha}_{2\pi}$, $0<\alpha<1$, l'espace des fonctions f $2\pi-$périodiques telles que
$|f(x+h)-f(x)|\leq c|h|^{\alpha}$ pour tout x et tout h.
1) On pose $g(t)=f(t+h)-f(t-h)$. Montrer que $c_n(g)=2ic_n(f)\sin nh$ et en déduire que

$$\sum_{n\in Z}|c_n(f)|^2|\sin nh|^2\leq c|h|^{2\alpha}.$$

2) Pour tout entier $p\geq 0$, en prenant $h=\pi 2^{-p-2}$ montrer que

$$\sum_{2^p\leq|n|\leq 2^{p+1}}|c_n(f)|^2\leq c2^{-2p\alpha}.$$

3) lorsque $1/2<\alpha\leq 1$, en déduire la convergence de la série $\sum_{n\in Z}|n|^{1/2+\alpha}|c_n(f)|^2$ puis celle de la série $\sum_{n\in Z}|c_n(f)|$.
4) Montrer que la série de Fourier de f est normalement sommable et de somme f.

Exercice15
On considère une suite $(f^m)\subset L^2([-\pi,\pi])$ telle que :
i) $\|f^m\|_2\leq C$
ii) Pour tout n, $c_n(f^m)\to c_n$ pour un $c_n\in C$.
1) Montrer que la série $\sum_{n\in Z}c_ne^{inx}$ converge dans L^2 vers une fonction f telle que $\|f\|_2\leq C$
(on dit que la suite (f^m) converge faiblement vers f).
2) Montrer que

$$\lim_{m\to\infty}(f^m,g)=(f,g)\quad,\quad\forall g\in L^2([-\pi,\pi]).$$

3) Si une suite $(f^m)\subset L^2([-\pi,\pi])$ satisfait la propriété (i) , montrer qu'on peut extraire une sous-suite satisfaisant (i) et (ii).

Exercice16
Soit I un intervalle de longueur 2π.
1) Montrer que $\lim_{|n|\to+\infty}c_n(f)=0$ pour toute fonction $f\in L^2(I)$.
2) Vérifier que l'on peut bien définir $c_n(f)$ pour $f\in L^1(I)$ et $n\in Z$ et déduire de la question précédente que $\lim_{|n|\to+\infty}c_n(f)=0$ pour toute fonction $f\in L^1(I)$.