Examen

AVIS:
- Le sujet comporte deux exercices. Ces exercices doivent être traités en commun par tout le groupe, qui rend une copie commune.
- Les deux exercices sont assez différents. Le premier exercice est assez court et assez facile d'un point de vue technique, mais il est formulé de manière ouverte, et il faut faire preuve d'autonomie pour le résoudre. Au contraire, le second exercice est d'une difficulté technique plus grande, mais les questions y sont beaucoup plus détaillées pour vous guider vers la solution.
- Nous vous conseillons de commencer par le premier exercice. Nous vous donnerons éventuellement des indications après 30 à 45 minutes. Ne passez pas trop de temps sur le premier exercice (une heure et demie au grand maximum).
- Vous pouvez mentionner les pistes de recherche que vous explorez, même si elles n'aboutissent pas à une solution. Il n'est pas nécessaire de résoudre entièrement les deux exercices pour obtenir une excellente note.

Exercice 1 : Suites récurrentes et calculatrices –

On veut calculer la suite de nombres définie ainsi : le premier nombre de la suite est 1 ; le deuxième est $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; le troisième est la somme du premier et du deuxième ; le quatrième est la somme du deuxième et du troisième ; et ainsi de suite, chaque terme de la suite étant la somme des deux précédents.

On calcule les premiers termes de la suite avec Maple, en demandant à Maple de faire tous les calculs avec une précision de 4 chiffres. Voici les valeurs obtenues:

1 , $-.6180$, $.3820$, $-.2360$, $.1460$, $-.0900$, $.0560$, $-.0340$, $.0220$, $-.0120$, $.0100$, $-.0020$, $.0080$, $.0060$, $.0140$, $.0200$, $.0340$, $.0540$, $.0880$, $.1420$, $.2300$, $.3720$, $.6020$, $.9740$, 1.576 , 2.550 , 4.126 , 6.676 , 10.80 , 17.48 , 28.28 , 45.76 , 74.04 , 119.8 , 193.8 , 313.6 , 507.4 , 821 , 1328 , 2149 , 3477 , 5626 , 9103 , 14730 , 23830 , 38560 , 62390 , 101000 , 163400 , 264400 , 427800 , 692200 $\dots$

La suite semble donc tendre vers $+\infty$.

On fait maintenant la même chose en demandant à Maple de calculer avec 8 chiffres. Voici les valeurs obtenues :

1 , $-.61803400$, $.38196600$, $-.23606800$, $.14589800$, $-.09017000$, $.05572800$, $-.03444200$, $.02128600$, $-.01315600$, $.00813000$, $-.00502600$, $.00310400$, $-.00192200$, $.00118200$, $-.00074000$, $.00044200$, $-.00029800$, $.00014400$,

$-.00015400$,	$-.00001000$,	$-.00016400$,	$-.00017400$,	$-.00033800$,	$-.00051200$,	
$-.00085000$,	$-.00136200$,	$-.00221200$,	$-.00357400$,	$-.00578600$,	$-.00936000$,	
$-.01514600$,	$-.02450600$,	$-.03965200$,	$-.06415800$,	$-.10381000$,	$-.16796800$,	
$-.27177800$,	$-.43974600$,	$-.71152400$,	-1.1512700 ,	-1.8627940 ,	-3.0140640 ,	
-4.8768580 ,	-7.8909220 ,	-12.767780 ,	-20.658702 ,	-33.426482 ,	-54.085184 ,	
-87.511666 ,	-141.59685 ,	-229.10852 ,	-370.70537 ,	-599.81389 ,	-970.51926 ,	
-1570.3332 ,	-2540.8525 ,	-4111.1857 ,	-6652.0382 ,	-10763.224 ,	-17415.262	$\dots$

La suite semble maintenant tendre vers $-\infty$...

Quelle est le véritable comportement de la suite ? Expliquer pourquoi Maple se trompe, et, plus précisément, pourquoi on obtient deux réponses différentes. Que peut-on prévoir si on demande à Maple de calculer avec une précision de 100 chiffres ?

Exercice 2 : Approximation d'un réel par des rationnels –

Vous savez sans doute que le nombre π est irrationnel : il n'existe pas de nombres entiers p et q tels que π soit exactement égal à p/q. Par contre, on peut trouver des nombres rationnels aussi proche qu'on veut de π, par exemple en utilisant les approximations décimales : puisque $\pi =$ 3,14159265359..., on a

$$\begin{aligned} \pi &\simeq \tfrac{31}{10} && \text{avec une erreur plus petite que } 10^{-1} \\ &\simeq \tfrac{314}{100} && \text{avec une erreur plus petite que } 10^{-2} \\ &\simeq \tfrac{31415}{10000} && \text{avec une erreur plus petite que } 10^{-4} \\ &\simeq \tfrac{3141592}{1000000} && \text{avec une erreur plus petite que } 10^{-6}. \end{aligned}$$

Il y a d'autres approximation célèbres du nombre π. Par exemple,

$$\begin{aligned} \pi &\simeq \tfrac{22}{7} && \text{avec une erreur plus petite que } 10^{-2} \\ &\simeq \tfrac{333}{106} && \text{avec une erreur plus petite que } 10^{-4} \\ &\simeq \tfrac{355}{113} && \text{avec une erreur plus petite que } 10^{-6}. \end{aligned}$$

La deuxième série d'approximations a un rapport "qualité-prix" qui est bien meilleur que celui de la première série. Par exemple : dans la deuxième série, le rationnel $\frac{355}{113}$ est le quotient de deux nombres entiers de 3 chiffres chacun, et approche π à 10^{-6} près (le nombre $\frac{355}{113}$ vaut environ 3,1415929...) ; dans la première série, pour avoir une approximation de π à 10^{-6} près, il faut utiliser le rationnel $\frac{3141592}{1000000}$, qui est le quotient de deux nombres entiers de sept chiffres chacun.

Le but de cet exercice est d'apporter quelques réponses à la question suivante : *quelle précision peut-on obtenir en approchant π par un rationnel $\frac{p}{q}$ où les entiers p et q sont de taille fixée ?*

Comme souvent en mathématique, il est plus facile de traiter un problème général plutôt qu'un cas particulier. On ne s'intéressera donc pas spécialement à π, mais plutôt à tout les nombres réels en même temps.

Question 1. Approximation avec précision $\frac{1}{q}$

Le but de cette première question est de montrer que tout nombre réel dans [0,1] peut être approché par une suite de rationnels $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec une précision de l'ordre de $\frac{1}{q_n}$. On vous demande donc de montrer que :

Pour tout $\alpha \in [0,1]$, il existe une suite de rationnels $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers α telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n}.$$

Indication. Regardez la première série d'approximations rationnelles de π ci-dessus.

Question 2. Approximation avec précision $\frac{1}{q^2}$ (théorème de Dirichlet)

Dans cette question, on cherche à faire mieux qu'à la question précédente: on veut montrer que tout nombre réel peut être approché par une suite de rationnels $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec une précision de l'ordre de $\frac{1}{q_n^2}$. Notez que c'est beaucoup mieux qu'à la question précédente : par exemple, si q_n est un nombre à 4 chiffres, $\frac{1}{q_n}$ est de l'ordre de 10^{-4}, alors que $\frac{1}{q_n^2}$ est de l'ordre de 10^{-8}.

a. Principe des tiroirs Compléter l'affirmation suivante :
"si on a N nombres dans $[0,1]$, alors, parmi ces nombres, il y en a deux qui sont distants de moins de...".

b. Pour tout nombre réel x, on note $\{x\}$ la partie décimale de x, c'est-à-dire $\{x\} = x - E(x)$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Soit α un réel dans $[0,1]$, et N un entier strictement positif. En utilisant le principe des tiroirs ci-dessus, montrer qu'il existe deux entiers distincts q_1,q_2 dans $\{0,\dots,N\}$, tels que

$$|\{q_1\alpha\} - \{q_2\alpha\}| \leq \frac{1}{N}.$$

En déduire qu'il existe un rationnel $\frac{p}{q}$ avec $q \in \{1,\dots,N\}$ tel que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q.N}.$$

c. En utilisant la question précédente, montrer le théorème de Dirichlet:

Pour tout $\alpha \in [0,1]$, il existe une suite de rationnels $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers α telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Question 3. On peut *parfois* approcher avec une précision bien meilleure

On considère le nombre

$$\alpha_0 := 0{,}110001000000000000000001000000000...$$

où le $n$ième chiffre "1" est placé à la décimale $n!$: autrement dit,
- il y a un "1" à la première décimale $(1! = 1)$;
- il y a un "1" à la deuxième décimale $(2! = 2)$;
- il y a un "1" à la sixième décimale $(3! = 6)$;
- il y a un "1" à la ving-quatrième décimale $(4! = 24)$;
- *etc.*

a. Essais Quel est le *meilleur* n tel que le nombre $\frac{1}{10} = 0{,}1$ approche α_0 à 10^{-n} près ? Même question pour les nombres $\frac{11}{100} = 0{,}11$ et $\frac{110001}{1000000} = 0{,}110001$.

b. Généralisation Pour chaque entier n, trouvez un rationnel $\frac{p_n}{q_n}$ qui approche α_0 avec une précision de l'ordre de $\frac{2}{{q_n}^{n+1}}$.

c. Montrer que cette suite d'approximations est bien meilleure que celle donnée par le théorème de Dirichlet : par exemple, en déduire qu'il existe une suite de rationnels $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers α_0 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{100}}.$$

Question 4. On ne peut *pas toujours* approcher avec précision $\frac{1}{q^3}$

Le but de cette question est de montrer qu'en un certain sens, on ne peut pas améliorer le résultat du théorème de Dirichlet : certains nombre réels ne peuvent pas être approchés par une suite de rationnels $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec une précision de l'ordre de $\frac{1}{q_n^3}$.

a. Pour tout $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $p \in \{0, \dots q\}$, on considère l'intervalle

$$I_{p,q} = \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^3}\right].$$

On note l_q la somme des longueurs des intervalles $I_{0,q}$, $I_{1,q}$, ..., $I_{q-1,q}$, $I_{q,q}$. Calculer le nombre l_q, et montrer qu'il est plus petit que $\frac{4}{q^2}$.

b. On admet que la somme (infinie !)

$$\frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

existe et est un nombre strictement plus petit que 1/4. Montrer que la somme (infinie) des longueurs de tous les intervalles $I_{p,q}$ (pour $q \geq 4$ et $p \in \{0, \dots q\}$) est strictement plus petite que 1.

c. En déduire qu'il existe un nombre α_1 dans [0,1] qui n'est dans aucun des ensembles $I_{p,q}$ pour $q \geq 4$. On admettra le fait suivant, "intuitivement évident" : si une famille (finie ou infinie) d'intervalles recouvre l'intervalle [0,1], alors la somme des longueurs des intervalles de cette famille doit être supérieure ou égale à 1.

d. Montrer que, pour le nombre α_1 trouvé à la question précédente, il n'existe aucune suite de rationnels $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers α_1 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^3}.$$

Remarques

1– Voici une manière plus précise de définir le nombre α_0 introduit à la question 3 du deuxième exercice. On peut prouver que la suite donnée par

$$S_N := \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \cdots + \frac{1}{10^{N!}}$$

est une suite convergente ; on définit alors α_0 comme étant sa limite. On note habituellement cette limite par le symbole

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n!}}.$$

C'est ce qu'on appelle une *série convergente*. Les séries sont étudiées dans le cours de S3 (et de licence).

2– En utilisant d'autres méthodes, on peut trouver explicitement des nombres qui ont la même propriété que le nombre α_1 de la question 4, c'est-à-dire des nombres qui ne se laissent pas "bien approcher" par des suites de rationnels. L'exemple le plus célèbre de tel nombre est le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. La théorie mathématique qui étudie ces propriétés s'appelle *théorie des approximations diophantiennes*, et la méthode qui donne les meilleures approximations d'un nombre (comme $22/7$ et $333/106$ pour le nombre π) est le *développement en fractions continues*.

3– La théorie qui s'occupe (notamment) de la longueur d'une réunion infinie d'intervalles s'appelle la *théorie de la mesure*. On l'étudie en licence.