Université Paris Sud, Master Math. Fonda. et Appliquées, année 2006-07
Unité de valeur "Analyse et Mathématiques Fondamentales II"

Partiel d'Analyse du 30 mars 2007

Exercice 1. Dans tout cet exercice, on considère un espace de Banach $(E, \|.\|)$. Le but de l'exercice est d'obtenir une description des parties compactes de E. Rappelons que, si E est de dimension finie, on connait déjà une telle description : les parties compactes de E sont les fermés bornés. Ici, on cherche une caractérisation valable également lorsque E est de dimension infinie.

Notations. Pour $r > 0$, on note $B_E(0, r)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon r dans E. Étant donnée une partie X de E, on note $\mathrm{Conv}(X)$ *l'enveloppe convexe* de X, c'est-à-dire, l'ensemble des points $z \in E$ qui peuvent s'écrire sous la forme

$$z = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$$

où p est un entier strictement positif, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des réels positifs tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1$ et $x_1, \ldots, x_p$ sont des points de X. On notera $\overline{\mathrm{Conv}}(X)$ l'adhérence de l'enveloppe convexe de X. Si $A_1, \ldots, A_p$ sont des parties de E, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des réels on notera

$$\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_p A_p = \{\alpha_1 a_1 + \cdots + \lambda_p a_p \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_p \in A_p\}.$$

Énoncé de la caractérisation. On va montrer que, pour une partie A de E, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est compacte,

(ii) A est fermée, et il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de points de E qui converge vers 0 telle que A est contenue dans $\overline{\mathrm{Conv}}(X)$ où $X = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$.

1. ***Preuve de l'implication*** $(i) \Rightarrow (ii)$. Soit A une partie compacte de E.

a. Rappeler pourquoi A est fermée et bornée.

b. Soit r un réel tel que $A \subset B_E(0, r)$ (un tel r existe d'après la question a.). Construire par récurrence une suite $(A_j)_{j\geq 1}$ de parties *finies* de E telle que :

- pour tout $j \geq 1$, la partie A_j est contenue dans la boule $B_E(0, \frac{r}{2^{j-2}})$,
- pour tout $j \geq 1$, on a $A \subset \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2^2}A_2 + \cdots + \frac{1}{2^j}A_j + B_E(0, \frac{r}{2^{2j}})$.

c. Montrer que $A \subset \overline{\mathrm{Conv}}\left(\bigcup_{j\geq 1} A_j \cup \{0\}\right)$, puis terminer la preuve de l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$.

2. ***Preuve de l'implication*** $(ii) \Rightarrow (i)$**.**

a. Montrer que, si X est une partie précompacte de E, alors $\mathrm{Conv}(X)$ est également précompacte. *Indication. À $\epsilon > 0$ fixé, on considérera une partie finie R de X telle que tout point de X est ϵ-proche d'un point de R. On vérifiera, d'une part que tout point de Conv(X) est ϵ-proche d'un point de Conv(R), et d'autre part que Conv(R) est précompacte.*

b. En déduire que, si X est une partie compacte de E, alors $\overline{\mathrm{Conv}}(X)$ est également compacte.

c. Terminer la preuve de l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$.

Exercice 2. On note $\ell_c(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites réelles qui sont nulles à partir d'un certain rang (formellement : une suite réelle $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\ell_c(\mathbb{N})$ s'il existe un entier $N \geq 0$ tel que $a_n = 0$ pour tout $n \geq N$).

1. On munit $\ell_c(\mathbb{N})$ de la norme $\|a\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. Montrer que l'espace vectoriel normé ainsi obtenu n'est pas complet, et identifier un complété de cet espace.

2. On munit $\ell_c(\mathbb{N})$ de la norme $\|a\|_1 := \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. Montrer que l'espace vectoriel normé ainsi obtenu n'est pas complet, et identifier un complété de cet espace.

3. Plus généralement, montrer à l'aide du théorème de Baire que, si $\|.\|$ est une norme sur $\ell_c(\mathbb{N})$, alors $(\ell_c(\mathbb{N}), \|.\|)$ n'est pas complet.