Partiel du 14 novembre 2007

Convolution, régularisation, approximations polynomiales

Question de cours. Approximations de l'unité. (environ 4 points)

Démontrer le résultat suivant :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée, $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité, et K un compact de $\mathbb{R}$. Alors $f * \rho_n$ converge uniformément vers f sur K quand n tend vers l'infini.

On rappellera ce que signifie "$(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une approximation de l'unité*".

Exercice 1 - Une preuve du théorème de Weierstrass (environ 6 points)

On considère une fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continue. Le but de cet exercice est de montrer, à l'aide d'une approximation de l'unité, qu'il existe une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f (on obtiendra ainsi une nouvelle preuve du théorème de Weierstrass).

Pour $n \geq 1$, on considère la fonction $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi_n(x) = \begin{cases} c_n.\left(1 - \left(\frac{x}{5}\right)^2\right)^n & \text{si } x \in [-5,5] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où c_n est choisi tel que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)dx = 1$.

1 - Trouver une majoration de c_n du type $|c_n| \leq a.n + b$, et montrer que la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

3 - Construire une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, à support dans $[-2,2]$, qui coïncide avec f en restriction à $[-1,1]$.

4 - Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, la fonction $\tilde{f} * \phi_n$ coïncide avec une fonction polynomiale sur $[-2,2]$.

5 - Dire pourquoi $\tilde{f} * \phi_n$ converge uniformément vers f sur $[-1,1]$, et conclure.

Exercice 2 - Approximation des fonctions croissantes (environ 8 points)

On considère une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et *croissante*. Le but de cet exercice est de montrer qu'on peut approcher f, en norme uniforme, par des fonctions polynomiales et *croissantes*. On fixe $\epsilon > 0$.

1 - Vérifier que l'on peut prolonger f en une fonction $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, bornée et croissante.

2 - Soit $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement positive et intégrable. Montrer que $\widetilde{f} * \rho$ est croissante.

3 - En utilisant les questions précédentes, montrer qu'il existe une fonction $f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1, croissante, telle que $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f_1(t) - f(t)| \leq \epsilon$.

4 - Montrer qu'on peut trouver une fonction $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, à dérivée strictement positive, telle que $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f_2(t) - f_1(t)| \leq \epsilon$.

5 - En utilisant le théorème de Weierstrass, montrer qu'on peut trouver une fonction $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynomiale, strictement croissante telle que $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f_3(t) - f_2(t)| \leq \epsilon$.

6 - Conclure.

Exercice 3 - Lemme de Riemann-Lebesgue (environ 3 points)

Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Démontrer que, pour tout fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable,

$$\int_a^b f(t).\sin(\lambda.t)\,dt \to 0 \quad \text{quand } \lambda \to +\infty.$$

On pourra utiliser un résultat de densité.