
Feuille d'exercices n° 2
Courbes paramétrées

Exercice 2.1.— (Tracé d'une courbe à partir de son tableau de variation)
Tracer l'allure de la courbe paramétrée $M : t \mapsto (x(t), y(t))$ dont le tableau de variation conjoint est le suivant :

t	-2		-1		0		1		2
$x'(t)$	-4	$-$	-2	$-$	0	$+$	2	$+$	4
	4								4
$x(t)$		$\searrow$	1	$\searrow$		$\nearrow$	1	$\nearrow$	
					0				
			2						2
$y(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	
	-2						-2		
$y'(t)$	9	$+$	0	$-$	-3	$-$	0	$+$	9

On tracera notamment les vecteurs vitesse donnés par le tableau.

Exercice 2.2.— (Tracer d'une courbe paramétrée, étape par étape)
On considère la courbe paramétrée définie par $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ avec $x(t) = \sin(t)$ et $y(t) = \sin(4t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. On se restreint pour l'instant aux valeurs de t dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.
  a. Donner le tableau de variation conjoint de $x(t)$ et $y(t)$.
  b. Tracer les tangentes à la courbes aux points $M(0)$, $M(\frac{\pi}{4})$, $M(\frac{\pi}{2})$.
  c. Tracer la portion de courbe obtenue lorsque t décrit $[0, \frac{\pi}{2}]$. On note $\mathcal{C}$ cet ensemble.
  d. Calculer $\sin(4t)$ en fonction de $\sin(t)$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. En déduire une fonction f dont $\mathcal{C}$ est le graphe.

2. On voudrait tracer le reste de la courbe.
  a. Calculer $M(-t)$ en fonction de $M(t)$. À quelle opération géométrique correspond cette formule ? En déduire le tracé de la courbe correspondant à $t \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$.
  b. De même, calculer $M(t + \pi)$ en fonction de $M(t)$. À quelle opération géométrique correspond cette formule ? Quelle portion de courbe peut-on maintenant tracer ?
  c. Finir le tracé de la courbe.

3. Calculer les *points doubles* de la courbe, c'est-à-dire trouver les points P du plan pour lesquels il existe deux temps $t_0, t_1 \in [0, 2\pi]$ tels que $M(t_0) = M(t_1) = P$. Vérifier que le résultat est compatible avec le dessin.

Exercice 2.3.— (Une description un peu étrange d'un morceau de cercle)
Quand on trace avec une calculatrice la courbe paramétrée d'équation $\gamma(t) = \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$, on trouve le cercle $\mathcal{C}$ de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

1. Expliquer pourquoi l'image de cette courbe paramétrée γ est incluse dans le cercle $\mathcal{C}$.

2. Donner le tableau de variation conjoint de γ. Quelle partie du cercle $\mathcal{C}$ est décrite ?

Exercice 2.4.— (Tracés de courbes)
Tracer les courbes paramétrées $t \mapsto (x(t), y(t))$ données par les formules suivantes.

1. $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \frac{t}{2} + \sin(t)$. Tracer d'abord la portion de courbe pour $t \in [0, 2\pi]$. Calculer ensuite $M(t+2\pi)$ en fonction de $M(t)$, et interpréter géométriquement la formule obtenue. En déduire le reste du tracé.

2. $x(t) = \sin(2t)$, $y(t) = \sin(3t)$. S'inspirer de l'exercice 2.2.

3. $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$.

4. $x(t) = 2(1 - \cos(t))$, $y(t) = \sin(2t) - 2\sin(t)$.

5. $x(t) = \dfrac{t}{1+t^4}$, $y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4}$. Comment se comporte la courbe quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$? Avec quelle direction s'approche-t-elle du point limite ?

6. $x(t) = \dfrac{1}{\cos(t)}$, $y(t) = \dfrac{1}{\sin(t)}$.

Exercice 2.5.— (Paramétrage de courbes)
Donner un paramétrage (avec intervalle de définition) des courbes suivantes :

1. le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 4,

2. la moitié du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 4, qui est situé dans le demi-plan $x \geq 0$,

3. la moitié du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 4, qui est situé dans le demi-plan $y \geq 0$,

4. le cercle de centre $(1, 2)$ et de rayon 4,

5. l'ellipse d'équation cartésienne $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$,

6. le segment reliant les points $(0, 1)$ et $(0, 2)$,

7. le segment reliant les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$,

8. le segment reliant les points $(0, 0)$ et $(2, 1)$.