Université Paris Nord – Licence 2 mention Physique-Chimie – Année 2014-2015
Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques

Feuille d'exercices n^{o} 4

Fonctions de plusieurs variables II : dérivées

Exercice 4.1.— Calculs de dérivées partielles
Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

$$c(x,y) = x^2 + y^3 \quad , \quad d(x,y) = x^2 y^3 \quad , \quad e(x,y) = y\ln(x)$$

$$f(x,y) = \ln(2x-y) \quad , \quad g(x,y) = \sqrt{x+y+1} \quad , \quad h(x,y) = \ln\left(\sin(x) - y\right)$$

$$i(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{y} \quad , \quad j(x,y) = \sqrt{x+y+1} \times \ln(2x-y) \quad , \quad k(x,y) = \frac{x}{\sin(x+y)}$$

$$\ell(x,y,z) = \ln(\sin(x+y^2+z^3)) \quad , \quad m(x,y,z) = \frac{z}{\sin(x)\sin(y)} \quad , \quad n(x,y,z) = \frac{xyz}{\sin(x^2+y^2)}$$

Exercice 4.2.— Dérivées partielles, plan tangent On considère à nouveau la fonction "presqu'ile" de l'exercice 3.2, c'est-à-dire la fonction

$$f(x,y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}.$$

1. Rappeler l'équation du plan tangent au graphe de f en un point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Comment l'existence d'un plan tangent *horizontal* se traduit-elle sur les dérivées partielles ?

2. Calculer une équation du plan tangent au graphe de f (*i.e.* à la presqu'ile) au point d'abscisse $x = 1$ et d'ordonnée $y = 1$. Même question avec le point d'abscisse $x = -1$ et d'ordonnée $y = 0$.

3. Trouver les points où le plan tangent au graphe de f est horizontal.

Exercice 4.3.— Dérivées partielles et approximations affines

1. Donner l'expression de la diagonale $d(x,y)$ d'un rectangle de côtés x et y. On considère maintenant un rectangle de côtés x =30 cm et y =40 cm. En utilisant l'approximation affine de d (c'est-à-dire en négligeant le reste dans la formule de Taylor), donner une estimation de la variation de d lorsque x augmente de 4mm et y diminue de 1mm (sans utilisaer la calculatrice !). Calculer la longueur de la nouvelle diagonale à la calculatrice, et comparer avec l'estimation.

2. On considère un container en carton de volume $1m^3$, dont la base a pour dimension $x = 2m$ et $y = 1m$. On veut fabriquer un deuxième container en carton de même volume, avec une base de côtés 195cm et 95cm. Donner (sans calculatrice) une estimation de la différence de surfaces extérieures entre les deux containers à l'aide l'approximation affine. Calculer la nouvelle surface à l'aide de la calculatrice, et comparer avec l'estimation.

3. On mesure le rayon r et la hauteur h d'un cône, avec une incertitude de 3% sur le rayon, et de 2% sur la hauteur. Évaluez l'incertitude sur le volume $V(r,h) = \pi r^2 h/3$ du cône, à l'aide de l'approximation affine.

Exercice 4.4.— Dérivation composée

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, et g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(t^2, 3t+2)$. Donner l'expression de $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

2. Même question pour les fonctions $h(t) = f(t,t)$; $i(t) = f(1,t)$; $j(t) = f(\sin(t), \cos(t))$; $k(t) = f(e^t \sin(t), \ln(1+t^2))$.

3. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Exprimer les dérivées partielles de la fonction $f(xy)$.

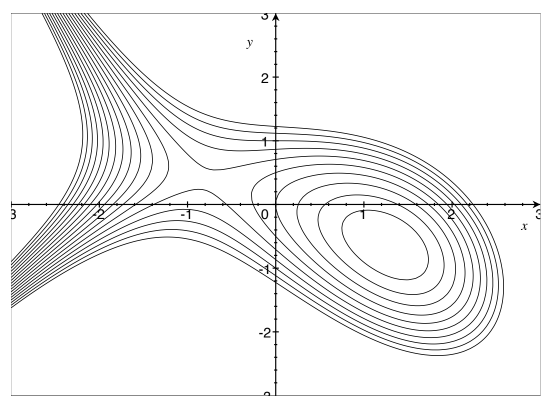
4. Même question pour la fonction $f(xy^2)$.

Exercice 4.5.— Gradient et lignes de niveaux

On considère une fois de plus la fonction "presqu'ile"

$$f(x,y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}.$$

On a tracé ci-dessous quelques lignes de niveaux de cette fonction.



1. Sur le dessin des lignes de niveaux, tracer la tangente au point $(2,-2)$ à la ligne de niveau passant par ce point.

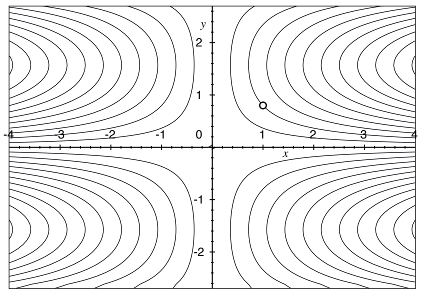
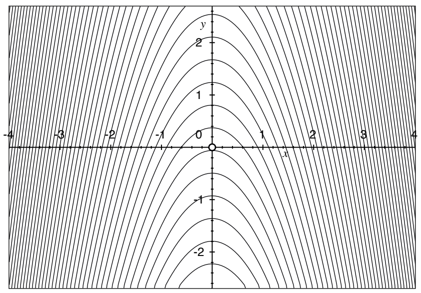
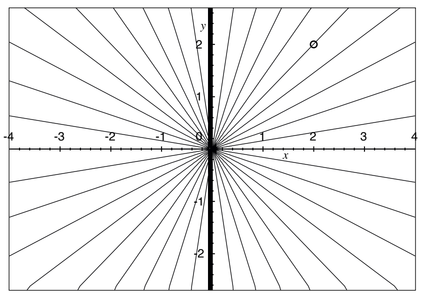
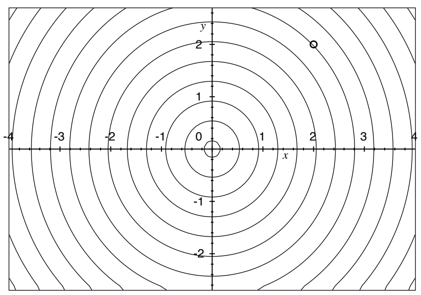
2. Que vaut le vecteur gradient au point $(2,-2)$? En déduire l'équation de la tangente à la ligne de niveau en ce point, et vérifier en comparant à la question précédente.

3. Un skieur se tient au point correspondant à $x = 2, y = -2$, les skis bien horizontaux, la pente vers sa gauche. Dans quelle direction (Nord, Nord-Ouest, ...) pointent ses skis ?

4. Il décide maintenant de se lancer droit dans la pente. Vers quelle direction se tourne-t-il ?

Exercice 4.6.— Tangente à une ligne de niveau
Pour chacune des fonctions ci-dessous, tracer sur le dessin la tangente à la ligne de niveau passant par le point indiqué, puis calculer l'équation de cette droite.

$f_1(x,y) = x\sin(y)$ au point $(1, \pi/4)$; $\qquad f_2(x,y) = \tan(x^2+y)$ au point $(0,0)$;
$f_3(x,y) = \arctan(y/x)$ au point $(2,2)$; $\qquad f_4(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ au point $(2,2)$.

Exercice 4.7.— Cordes vibrantes
Soit F une fonction deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et c une constante. Montrer que la fonction définie par $f(x,t) = F(x+ct)$ vérifie l'équation de la corde vibrante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \quad \text{pour tout } (x,t).$$

N.B. : la notation $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ représente la fonction f dérivée deux fois par rapport à la variable t, autrement dit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right).$$