Feuille d'exercices n^o 5

Fonctions de plusieurs variables III : points critiques et extrema

Exercice 5.1.— Extrema d'une fonction d'une variable
Soit la fonction d'une variable définie par

$$f(x) = 3x^4 - 2x^6.$$

1. Trouver les points critiques de f.

2. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de f en chacun de ces points.

3. Parmi les points critiques de f, lesquels sont dégénérés ?

4. Pour chacun des points critiques non dégénérés de f, dire s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum local.

5. Le point critique dégénéré de f est-il un maximum local ? un minimum local ?

6. Tracer le tableau de variation de f. Est-il cohérent avec vos réponses précédentes? Les extrema locaux sont-ils des extrema absolus ?

Exercice 5.2.— Recherche de points critiques de fonctions de deux variables
Trouver les points critiques des fonctions suivantes.

$$f_1(x,y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2 \qquad f_2(x,y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$$
$$f_3(x,y) = (1-x)(1-y)(x+y-1) \qquad f_4(x,y) = \left(1+y^2\right)e^{-x^2}$$
$$f_5(x,y) = \exp(x^2 + xy + y^2 + 3x) \qquad f_6(x,y) = x^2 + x(e^y - 1)$$
$$f_7(x,y) = \frac{xy - x + y}{xy} \qquad f_8(x,y) = xy - \ln(x-y)$$
$$f_9(x,y) = \cos(x) + \cos(y) \qquad f_{10}(x,y) = \cos(x+y)\cos(x-y)$$

Exercice 5.3.— Points critiques de la fonction presqu'île
On considère une fois de plus la "fonction presqu'île

$$f(x,y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}.$$

Rechercher les points cirtiques de f, puis donner la nature (dégénéré, maximum local, minimum local ou point selle) de chacun de ces points critiques. Vérifier que ce que vous trouvez est cohérent avec l'allure du graphe de f.

Exercice 5.4.— Nature des points critiques des fonctions de deux variables
Déterminer la nature (dégénéré, maximum local, minimum local ou point selle) des points critiques des fonctions de l'exercice 5.3.

Exercice 5.5.— Surface d'une boite de volume fixé
On considère la fonction définie par

$$f(x,y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}.$$

1. Quel est le domaine de définition de f? Trouver les points critiques de f.

2. On considère une boîte en carton **sans couvercle** de volume 1, dont la base a pour dimensions $x \times y$. **a.** Montrer que la surface des parois de la boite est donnée par $f(x,y)$. **b.** Montrer qu'il existe de telles boîtes (de volume 1 et sans couvercle) avec une surface aussi grande qu'on veut (les dessiner !). **c.** Pensez-vous alors que le point critique de f est un minimum ou un maximum (local ou absolu ?), ou ni l'un ni l'autre?

Exercice 5.6.— Étude d'un point critique dégénéré
On considère la fonction définie par $f(x,y) = (x^2 - y)(2x^2 - y)$. On voudrait savoir si $(0,0)$ est un extremum local.

1. Montrer que $(0,0)$ est un point critique.

2. Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 au point $(0,0)$: quelle est la nature du point critique $(0,0)$? Que peut-on en déduire pour notre problème?

3. Étudier le signe de $f(x,y)$ en fonction de x et y : faire un dessin dans le plan (Oxy) en indiquant les régions où $f > 0$, $f = 0$, $f < 0$. Répondre à la question initiale : le point $(0,0)$ est-il un maximum ou un minimum local ?

Exercice 5.7.— Nature des points critiques et allure des lignes de niveaux
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction de deux variables définie par

$$f(x,y) = x^2 e^{-\frac{y}{2}} - \sin y.$$

1. Trouver tous les points cirtiques de f, et déterminer leur nature.

2. Parmi les trois dessins ci-dessous, lequel représente les lignes de niveau de f ?