
Feuille d'exercices n° 6
Intégrales multiples, intégrales curvilignes

Exercice 6.1.— Intégrales simples
Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt \qquad \int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$\int_1^e \frac{\ln(x)^n}{x}dx, n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^x \arctan(t)dt$$

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx \qquad \int_0^1 x(\arctan x)^2 dx$$

Exercice 6.2.— Intégrations doubles
Pour chacune des fonctions suivantes, dessiner le domaine D et calculer l'intégrale $\iint_D f(x,y)dxdy$.

1. $f(x,y) = x$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0, x-y+1 \geq 0, x+2y-4 \leq 0\}$.
2. $f(x,y) = x+y$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$.
3. $f(x,y) = \cos(xy)$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \leq 2; 0 \leq xy \leq \frac{\pi}{2}\}$.
4. $f(x,y) = xy$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, xy+x+y \leq 1\}$.
5. $f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^3}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 < x < 3, y > 2, x+y < 5\}$.

Exercice 6.3.— Intégrales triples
Calculer $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$ pour :
1. $f(x,y,z) = \cos x$ et $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 < 1\}$.
2. $f(x,y,z) = xyz$ et $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$.

Exercice 6.4.— Passage en coordoonées polaires
En utilisant les coordonnées polaires, calculer les intégrales $\iint_D f(x,y)dxdy$ où :
1. D est le couronne limitée par les cercles de centre O et de rayons $0 < a < b$ et $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$.
2. D est le disque de centre O et de rayon a et $f(x,y) = (x+y)^2$.
3. D est limité par le cercle de centre O et de rayon 3 et le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1, et $f(x,y) = x^2+y^2$.
4. D est l'ensemble des points du disque de centre 0 et de rayon 1 tel que $0 \leq y \leq x$ et $f(x,y) = (x-y)^2$.
5. D est l'ensemble des points du carré $[0,1] \times [0,1]$ extérieurs au cercle de centre O et de rayon 1, et $f(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$.

Exercice 6.5.— Un autre changement de coordonnées
Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale

$$\iint_D (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < y, a < xy < b, y^2 - x^2 < 1\}$, en faisant un changement de variable adéquat.

1. Poser $u = xy$, $v = y^2 - x^2$. Calculer l'image Δ de la fonction $\phi : D \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (u, v)$.

2. Exprimer x et y en fonction de u et v.

3. Calculer le Jacobien de ϕ et justifier que l'on peut effectuer un changement de variable.

4. Calculer l'intégrale.

Exercice 6.6.— Aires et volumes
Calculer les aires ou les volumes des domaines suivants :

1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 4 - x^3\}$.

2. D est l'intérieur de l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

3. D est la partie de la sphère de centre O et de rayon R comprise entre les plans d'équations $z = h_1$ et $z = h_2$, où $h_1 > h_2$.

4. D est le secteur sphérique délimité par la sphère de centre O et de rayon R et un demi-cône de sommet O et d'angle 2α.

5. D est le secteur sphérique délimité par la sphère de centre O et de rayon 3 et un cylindre d'axe Oz et de rayon 2.

Exercice 6.7.— Circulation d'un champ de vecteur
Soit $E(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$. Calculer la circulation de E le long d'un cercle de centre O et de rayon R. En déduire que ce champ ne dérive pas d'un potentiel.

Exercice 6.8.— Calculs de circulations
Calculer la circulation du champ E le long de la courbe C dans chacun des cas suivants :

1. $E = (-y, x)$ et C est la demi-ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 < t < \pi$ parcourue dans le sens direct.

2. $E = (\frac{x}{x^2+y^2+1}, \frac{y}{x^2+y^2+1})$ et C est le cercle $x^2 + y^2 - 2x = 1$ parcouru dans le sens direct.

Exercice 6.9.— Green-Riemann
En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer la circulation du champ $E = (2xy - y^2, x + y^2)$ le long du bord du domaine délimité par les courbes d'équations $y = x^2$ et $x = y^2$.

Exercice 6.10.— Comparaison de deux méthodes de calcul
Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$ et C son bord orienté. Soit $E = (-2xy, xy^2)$. On souhaite calculer le flux de E à travers C.

1. Trouver une paramétrisation de C, puis calculer le flux.

2. Calculer la divergence de E, puis en utilisant la deuxième formule de Green-Riemann, calculer le flux.