Contrôle des connaissances 1

Fonctions d'une variable
A effectuer la semaine du 12 au 16 Octobre

Dans la semaine du 12 au 16 octobre, au début d'un TD, l'enseignant vous soumettra trois affirmations, choisies dans la liste ci-dessous (on s'autorisera aussi de légères variantes). Vous disposerez alors de 15-20 minutes pour dire si chacune des trois affirmations soumise est VRAI ou FAUSSE, et pour justifier vos réponses de la façon la plus convaincante possible. Le barème est : pour chacune des trois affirmations, 1 point pour la bonne réponse (VRAI ou FAUX), 6 points pour la justification.

1.— Soit C le cercle centré au point de coordonnées $(1,1)$, de rayon 1. Alors C est le graphe d'une fonction définie sur $[0,2]$.

2.— La fonction $x \mapsto x^5$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3.— La fonction tangente est strictement croissante sur son ensemble de définition.

4.— La tangente au graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ au point d'abscisse $3/4$ fait un angle de 30 degrés avec l'axe des abscisses.

5.— L'équation de la tangente au graphe de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$ est $y = 2x + 1$.

6.— La courbe image de la courbe paramétrée $t \mapsto \left(\sin(t) - \cos(t), \sqrt{2\sin(t)\cos(t)}\right)$, définie sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, est contenue dans le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

7.— La courbe image de la courbe paramétrée $t \mapsto \left(\sin(t) - \cos(t), \sqrt{2\sin(t)\cos(t)}\right)$, définie sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

8.— La courbe image de la courbe paramétrée $t \mapsto \left(t^2 + \cos(t), \sin(t)\right)$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

9.— L'approximation affine ("développement limité à l'ordre 1") de la fonction tan en $\frac{\pi}{4}$ est

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = 1 + 2h + h\varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

10.— La fonction $x \mapsto \frac{\sin(5x)}{\ln(1-2x)}$ tend vers $-\frac{5}{2}$ quand x tend vers 0.

11.— Il existe une fonction ε définie au voisinage de 0, telle que $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et telle que

$$\ln(\cos(x))\frac{e^{\cos(x)}}{\sqrt{3+\sin(x)}}(\tan(x))^{1999} = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

12.— Le développement limité d'ordre 4 de $\sin x$ en $\frac{\pi}{4}$ est

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}h - \frac{\sqrt{2}}{4}h^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}h^3 + \frac{\sqrt{2}}{48}h^4 + h^4\epsilon(h)$$

avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$.

13.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction admettant le développement limité suivant à l'ordre 2 suivant en 1 :

$$f(1+h) = 1 + 2h + h^2 + h^2\epsilon(h).$$

Alors $|f(1+h) - (1+2h+h^2)| < \frac{1}{100}$ pour $h < \frac{1}{100}$.

14.— Si $\lim\limits_0 (f-g) = 0$, alors $\lim\limits_0 \frac{f}{g} = 1$.

15.— Si $\lim\limits_0 \frac{f}{g} = 1$, alors $\lim\limits_0 (f-g) = 0$.

16.— Si on a les développement limités suivants en 0 :

$$f_1(x) = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{ et } \quad f_1(x) = 1 + x + x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

alors on a $f_2(x) \geq f_1(x)$ pour tout x assez proche de 0.

17.— La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0.

18.— Si le développement limité d'ordre 3 de f au voisinage de $x_0 = 3$ est

$$f(3+h) = 1 + 2h + h^3 + h^3\epsilon(h)$$

alors la tangente au graphe de f en $x_0 = 3$ a pour équation $y = 1 + 2(x-3)$ et, au voisinage de $x_0 = 3$ le graphe de f est au-dessus de sa tangente.

19.— La fonction ln (logarithme néperien) admet un développement limité à l'ordre 23 en tout point $x_0 > 0$.