Contrôle des connaissances 2

Fonctions de deux variables
A effectuer la semaine du 7 décembre

1.— Le point de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(1,2,1)$ appartient au graphe de la fonction définie par $f(x,y) = x^2 + y^3$.

2.— Les lignes de niveau de la fonction $f(x,y) = \exp(x+2y)$ sont des droites.

3.— La fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ a pour fonctions partielles au point $(1,2)$ les fonctions $f_1(x) = x^2 + 1$ et $f_2(y) = 4 + y^2$.

4.— La droite du plan $\mathbb{R}^2$ passant par le point $(1,2)$ orthogonale au vecteur $(2,4)$ a pour équation $(x-1) + 2(y-2) = 0$.

5.— Le plan d'équation $z = 2x - y + 3$ est orthogonal au vecteur $(2,-1,-1)$ et passe par le point $(0,0,3)$.

6.— Soit f la fonction définie par $f(x,y) = 1 + x^2 + xy^3$. Alors la formule de Taylor au point $(0,0)$ s'écrit

$$f(x,y) = 1 + x(2x + y^3) + y(2xy^2) + ||(x,y)||\varepsilon(x,y)$$

avec $\varepsilon(x,y)$ qui tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$.

7.— Soit f la fonction définie par $f(x,y) = x^2 + y^3$. Alors le plan tangent au graphe de f en $(1,0,1)$ a pour équation $z = 1 + 2x + 3y$.

8.— Soit f la fonction définie par $f(x,y) = x^2 + x + 2y + 2\exp y^2$. Alors le plan tangent au graphe de f en $(0,0,2)$ a pour équation $z = x + 2y$.

9.— Dans la question précédente, le graphe est au-dessus de son plan tangent.

10.— Soit $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$. Alors on a, pour tous $x, y > 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

11.— Pour tous x, y, on a $x^2 - xy + y^2 \geq 0$.

12.— Pour tous x, y, on a $x^2 + 3xy + 2y^2 \geq 0$.

13.— La fonction définie par $f(x,y) = \exp(x^2 + 2y^2)$ atteint son minimum au point $(0,0)$.

14.— (suite de la question précédente) *Le raisonnement suivant est valide :* Puisque $(0,0)$ est un minimum de f, c'est un point critique, ce qui montre que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

sans qu'on ait besoin de calculer les dérivées partielles.

15.— Le point $(0,0)$ est un point critique de la fonction f définie par $f(x,y) = \exp(x^2 - y^2)$.

16.— (suite de la question précédente) Le point $(0,0)$ n'est ni un minimum local ni un maximum local de f.