Contrôle des connaissances 2

Équations différentielles
Le test aura lieu le vendredi 5 décembre

Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

1.— Si la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y' + (x^3 \cos(x^2))y = 0$, et si $f(0) = 1$, alors f ne s'annule pas.

2.— Si la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y'' + 3y = 0$, et si $f(0) = 1$, alors f ne s'annule pas.

3.— Si la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y' \sin(y) = 1$, alors f ne s'annule pas.

4.— Si la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y' = x^2 y^3 + y$, et si $f(1) > 0$, alors f est strictement positive et strictement croissante.

5.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $y' + e^{x.\sin(x)}y = 0$, et λ un réel. Alors la fonction $x \mapsto \lambda.f(x)$ est aussi solution de l'équation différentielle $y' + e^{x.\sin(x)}y = 0$.

6.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $y' + e^{x.\sin(x)}y = 0$, et λ un réel. Alors la fonction $x \mapsto \lambda + f(x)$ est aussi solution de l'équation différentielle $y' + e^{x.\sin(x)}y = 0$.

7.— Si a et b sont deux fonctions de classe C^1, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$, et si λ est un réel, alors la fonction $g : x \mapsto \lambda.f(x)$ est aussi solution de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$.

8.— Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle $y' + \cos(x).y^2 = 0$, et λ est un réel, alors la fonction $g : x \mapsto \lambda.f(x)$ est aussi solution de l'équation différentielle $y' + \cos(x).y^2 = 0$.

9.— On observe une population de bactéries. Au début de l'expérience, on dénombre 1000 bactéries. Une heure après, on en dénombre 2000. Trois heures après le début de l'expérience, on en dénombre 3000. Alors la vitesse de prolifération des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries.

10.— On observe une population de bactéries. Au début de l'expérience, on dénombre 1000 bactéries. Une heure après, on en dénombre 2000. On suppose que la vitesse de prolifération des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries. Alors il faudra plus de 24 heures pour que le nombre de bactéries dépasse 1 million.

11.— On observe une population de bactéries. On note $p(t)$ la population au temps t. On suppose que la vitesse de prolifération $p'(t)$ des bactéries est de la forme $p'(t) = K.p^2(t)$ où K est une constante positive. Au début de l'expérience, on dénombre 1000 bactéries. Une heure après, on en dénombre 2000. Alors $K = 0,2$.

12.— Si la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y' = -\sin(y)$, et si $-\frac{\pi}{2} < f(0) < \frac{\pi}{2}$, alors $-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

13.— Si la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y' = \sin(y^2 - x^2) + \frac{1}{2}$, et si $f(0) = -1$, alors $f(x) < x$ pour tout $x \geq 0$.

14.— On considère l'équation différentielle $y' = (y-1)^2 \cos(x^2 - y^2) + y$ dont le champs de tangentes est représenté ci-dessous (à gauche). Soit f la solution maximale de cette équation différentielle qui satisfait la condition initiale $f(0) = 3$. Alors $f(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$.

15.— On considère l'équation différentielle $y' = \cos(e^{y^2})$ dont le champs de tangentes est représenté ci-dessous (à droite). Soit f la solution maximale de cette équation différentielle qui satisfait la condition initiale $f(0) = 0$. Alors f est bornée, et définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

16.— Soit $a : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ une fonction C^1 qui ne prend que des valeurs positives. Soit f une solution maximale de l'équation différentielle $y' = y^2 + a(x)$. Alors f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.