Cours de Systèmes Dynamiques

F. Béguin, S. Lelièvre

Baby-KAM

Le théorème KAM est un des résultats mathématiques les plus impessionants des années 1950-60. Le nom de ce théorème provient des initiales d'A. Kolomogrov qui l'a énoncé en 1954, de V. Arnol'd et de J. Moser qui l'ont démontré dans les années 60 (respectivement dans un cadre analytique, et dans un cadre C^∞). Appelons *système mécanique sans frottement* un système gourverné par une équation différentielle d'ordre 2 du type

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

où m est une constante (la masse), et $F(x)$ est le gradient d'une fonction $U(x)$ (*i.e.* les forces dérivent d'un potentiel. Les plus simples de ces systèmes sont dits *totalement intégrables* : ce sont des systèmes pour lesquels toutes les orbites sont périodiques ou quasi-périodiques. Bien sûr, quand on perturbe un système totalement intégrable on obtient un système qui n'est plus totalement intégrable.Le théorème KAM dit à peu près la chose suivante.

Si on perturbe un peu un système mécanique totalement intégrable, alors "la plupart" des orbites du système perturbé sont quasi-périodiques (en particulier, bornées).

Voici un exemple d'application du théorème KAM : pour un système de planètes gravitant autour d'une étoile (sous l'effet de l'attraction newtonnienne), si les masses des planètes sont assez petites devant celle de l'étoile, alors pour "la plupart" des positions et vitesse "intiniales" des planètes, le mouvement du système sera quasi-périodique. Ce résultat n'est pas évident du tout (les attractions mutuelles de planètes ne cessent de les faire dévier de leurs ellipses képleriennes).

La preuve du théorème KAM est difficile ; même donner un énoncé formel de ce théorème nous enmènerait trop loin. Notre but ici sera seulement d'essayer de faire sentir pourquoi un énoncé vague comme celui donné ci-dessus a des chances d'être vrai, et surtout, pourquoi les nombres diophantiens jouent un rôle fondamental dans la preuve du théorème KAM. Pour ce faire, on va considérer la situtation la plus simple où un phénomène "de type KAM" apparait.

On se place sur le cylindre $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$ et on considère un nombre α tel que $\alpha/2\pi \notin \mathbb{Q}$. On considère un système dont les trajectoires sont les cercles $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \{y\}$ parcourus à vitesse α. Pour simplifier, on discrétise le temps ; les trajectoires du système sont donc les orbites de l'homéomorphisme $f_0 : (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R} \to (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$ donné par

$$f_0 : (x, y) \mapsto (x + \alpha, y)$$

On perturbe maintenant la loi d'évolution du système : on choisit une fonction continue

$$u : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R},$$

et considère le système perturbé dont les trajectoires sont les orbites de l'homéomorphisme

$$f_u : (x, y) \mapsto (x + \alpha, y + u(x)).$$

On voudrait savoir si les trajectoires du système pertubé sont bornées. Pour cela, il faut bien sûr que la fonction u soit d'intégrale nulle, ce que l'on supposera (physiquement, ceci traduit le fait que le système perturbé est encore conservatif).

1. Montrer que le système pertubé possède une trajectoire bornée si et seulement si il existe une fonction continue $v : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ telle que

$$u(x) = v(x + \alpha) - v(x) \qquad (\star)$$

Remarque. Ceci montre en particulier que le système pertubé possède une trajectoire est bornée si et seulement si toutes ses trajectoires sont bornées.

2. Montrer que, si u est C^∞ et si α est diophantien, alors il existe une fonction v continue qui satisfait la relation $(\star)$. Réciproquement, construire un nombre irrationnel α et une fonction analytique u tels qu'il n'existe pas de fonction continue v qui satisfait la relation $(\star)$.

Indication. Développer en séries de Fourier.

Je vous encourage à lire un article de vulgarisation d'É. Ghys sur le sujet :
`http://www.umpa.ens-lyon.fr/ ghys/articles/kolmogorov.pdf`