Université de Paris XI **L1 – Calculus Math 151**
Mathématiques **1er semestre 2008-09**

Examen du 24 juin 2009

Durée de l'épreuve : 2 heures. Les calculatrices et tous les documents sont interdits.

Exercice 1.— Ensembles de définitions (environ 4 points)
Déterminer et dessiner les ensembles de définitions des fonctions de deux variables suivantes.

$$f(x,y) = \frac{x^2+y}{x+y^2} \qquad\qquad g(x,y) = \frac{1}{\sin(y-x)}.$$

Exercice 2.— Points critiques (environ 6 points)
On considère la fonction de deux variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par la formule

$$f(x,y) = y^4 - 8y^2 - 4x^2.$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f, et trouver tous les points critiques de f.

2. Déterminer la nature de chacun des points critiques de f : dégénéré ou non-dégénéré, et dans ce dernier cas, maximum, minimum ou col-selle.

3. Au verso de cette feuille sont reproduites quatre figures représentant des lignes de niveaux de quatre fonctions différentes. Laquelle de ces quatre fonctions est la fonction f ? *On ne vous demande pas, ici, de justifier votre réponse.*

Exercice 3.— Étude d'une courbe paramétrée (environ 9 points)
On considère la courbe paramétrée définie, pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$M(t) = \left(\sin(t)\ ,\ \frac{\sin(t)}{2+\cos(t)} \right).$$

1. Quel lien y a-t-il entre le point $M(t)$ et le point $M(t+2\pi)$ pour $t \in \mathbb{R}$? Quelle transformation géométrique envoie-t-elle le point $M(t)$ sur le point $M(-t)$ pour $t \in \mathbb{R}$?

2. Pour quelles valeurs de t, le point $M(t)$ se situe-t-il en $(0,0)$? Déterminer un vecteur tangent à la courbe $t \mapsto M(t)$ pour chacune de ces valeurs de t.

3. Dresser le tableau de variations conjoint des deux coordonnées de $M(t)$ lorsque t parcourt l'intervalle $[0,\pi]$.

4. Tracer la courbe $t \mapsto M(t)$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}$. On indiquera en particulier les points où la tangente à la courbe est horizontale ou verticale.

Exercice 4.— Développement limité et allure d'un graphe (environ 4 points)

Pour chaque $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_a(x) = \exp(x + ax^2) - \cos(ax).$$

1. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction f_a (les coefficients de ce développement limités dépendent bien sûr de a).

2. Pour $a = 2$, déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point $(0, 0)$, puis la position de ce graphe par rapport à cette tangente au voisinage du point $(0, 0)$.