Examen du 11 Janvier 2010

L'examen dure 2 heures. Les calculatrices et tous les documents sont interdits.

Exercice 1.— Etude d'une fonction de deux variables (environ 10 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction de deux variables définie par

$$f(x,y) = x^2 e^{-\frac{y}{2}} - \sin y.$$

1. Esquisser, sur un même dessin, les graphes des fonctions partielles suivantes :

$$\varphi_1 : x \mapsto f(x,0) \quad , \quad \varphi_2 : x \mapsto f(x,\pi/2).$$

2. Même question avec les fonctions partielles :

$$\psi_1 : y \mapsto f(0,y) \quad , \quad \psi_2 : y \mapsto f(1,y).$$

3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction f.

4. Donner l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(0,0,0)$. Ce plan est-il parallèle à l'un des plans (Oxy), (Oxz) ou (Oyz) ?

5. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f.

6. Vérifier que $(0,\pi/2)$ est un point critique et donner sa nature (dégénéré ou non dégénéré, et dans ce cas, maximum local, minimum local ou point selle).

7. Déterminer l'ensemble des points critiques de la fonction f et donner la nature de chacun de ces points.

8. Parmi les quatre dessins de la page 3, lequel représente les lignes de niveaux de f ? (exceptionnellement, il ne vous est pas demandé de justifier votre réponse)

9. Parmi les quatre graphes de la page 2, lequel représente celui de la fonction f ? (exceptionnellement, il ne vous est pas demandé de justifier votre réponse)

Exercice 2.— Ensembles de définition (environ 4,5 points)

Déterminer et dessiner les ensembles de définition des fonctions de deux variables suivantes :

$$f(x,y) = \frac{1}{xy} \quad , \quad g(x,y) = \sqrt{x^2+y} \quad , \quad h(x,y) = \frac{1}{\sin(\cos(x) - y)}$$

Exercice 3.— Calculs d'intégrales (environ 6 points)

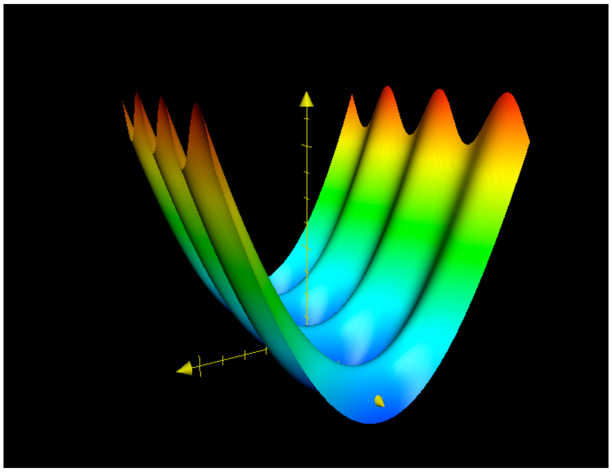
1. À l'aide d'un changement de variable et d'une intégration par parties, calculer

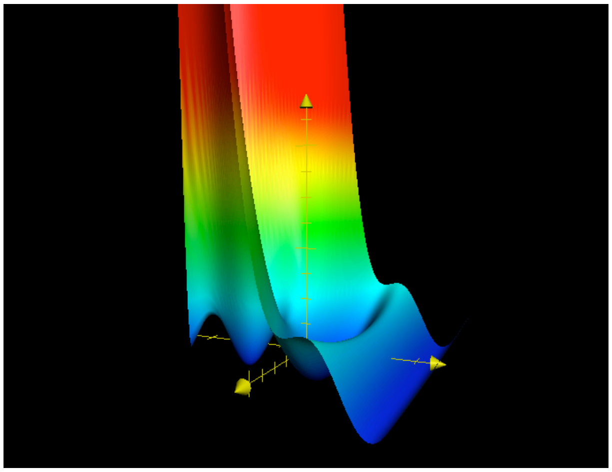
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\sin\big(\sin(x)\big)\,dx.$$

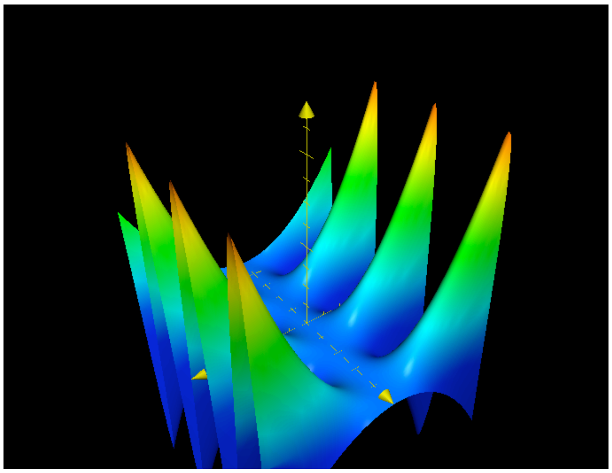
2. Montrer que

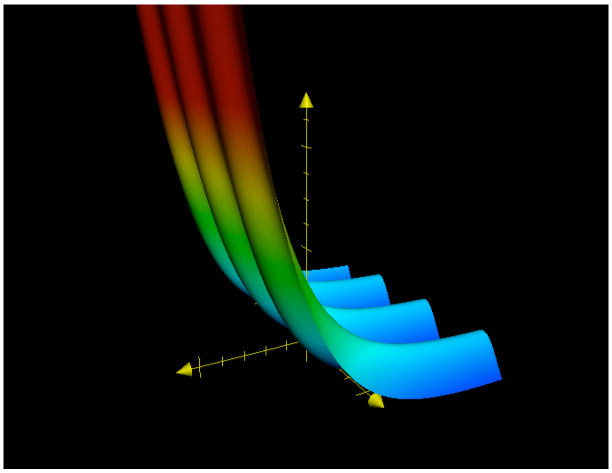
$$\int_{-1}^{2} \frac{x^2\sin(2x^3-7)}{2x^6-14x^3+25}\,dx = 0$$

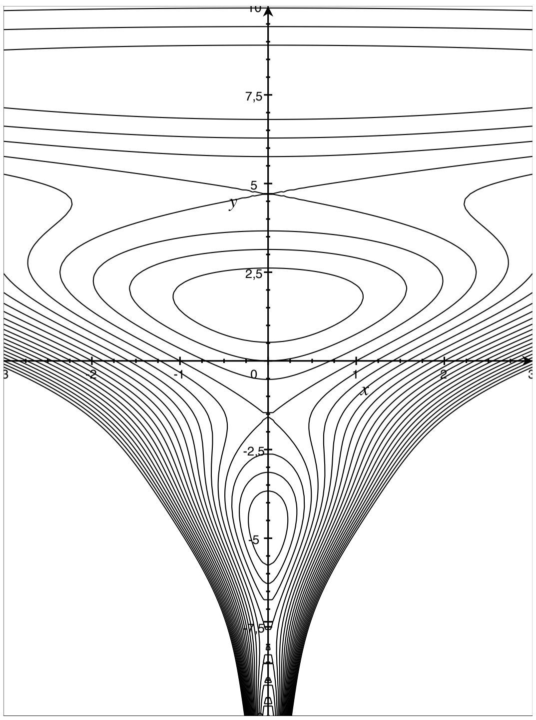
On pourra utiliser le changement de variable $u = 2x^3 - 7$.



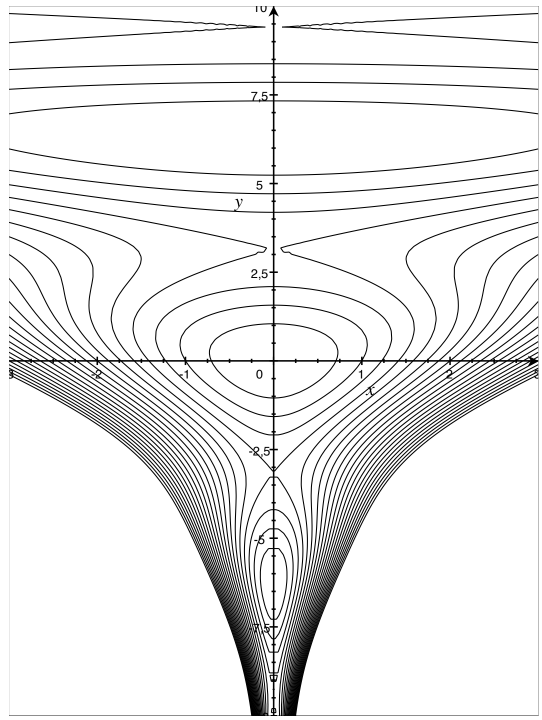




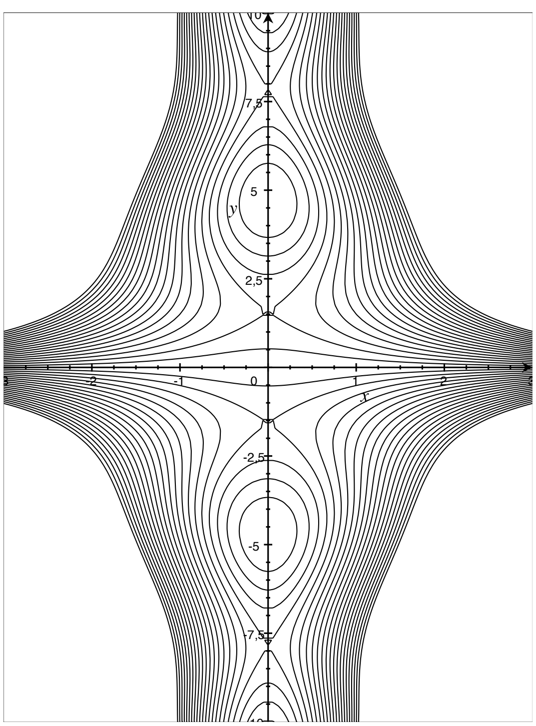




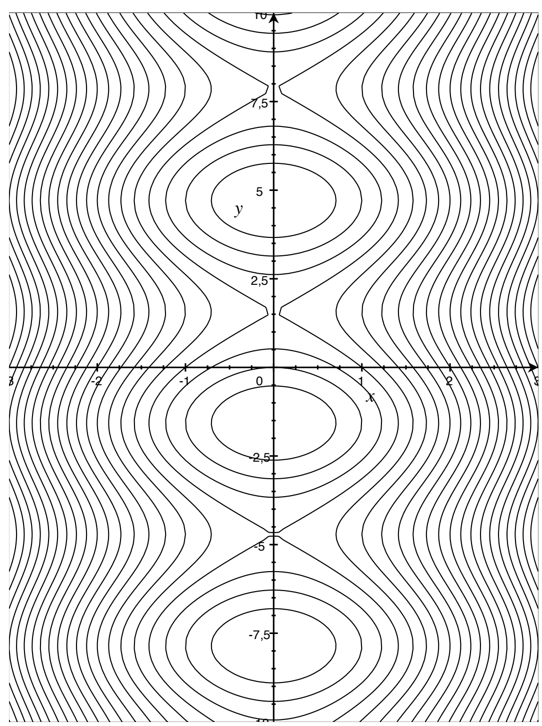
7,5
5
y
2,5
-2
-1
0
1
2
x
-2,5
-5
-7,5



7,5
5
y
2,5
-2
-1
0
1
2
x
-2,5
-5
-7,5



7,5
5
y
2,5
-2
-1
0
1
2
x
-2,5
-5
-7,5



7,5
5
y
2,5
-2
-1
0
1
2
x
-2,5
-5
-7,5