Université de Paris XI | **L1 – Calculus Math 151**
Mathématiques | **1er semestre 2008-09**

Examen du 7 janvier 2009

Les calculatrices et tous les documents sont interdits.

Exercice 1.— Étude d'une fonction de deux variables (environ 10 points)
On considère la fonction de deux variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par la formule

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{x^2 y}{2} - y.$$

1. Tracer rapidement, dans les plans appropriés, les graphes des fonctions partielles $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$.

2. Montrer que la fonction f ne peut admettre ni de minimum global, ni de maximum global.

3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1, puis les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f.

4. Donner une équation du plan tangent au graphe de f au point de coordonnées $(0,0,0)$. Donner un vecteur normal à ce plan.

5. Vérifier que le point de coordonnées $(0,1)$ est un point critique de f. Déterminer la nature de ce point critique (dégénéré ou non-dégénéré, et dans ce dernier cas, maximum, minimum ou col-selle).

6. Trouver tous les autres points critiques de f.

7. Parmi les quatre dessins de la page suivante, lequel représente les lignes de niveaux de f ? Justifier.

Exercice 2.— Ensembles de définition (environ 4 points)
Déterminer et dessiner les ensembles de définitions des fonctions de deux variables suivantes.

$$f(x,y) = \frac{\ln\left(x^2 - y\right)}{x} \qquad g(x,y) = \frac{1}{\sin(x^2+y^2)} \qquad h(x,y) = \ln(\sin(x^2+y^2)).$$

Exercice 3.— Tangente à un graphe (environ 4 points)
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par la formule

$$f(x) = \frac{2}{1+\sin(x)+x^2}.$$

Donner une équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 0$. Le graphe de f est-il au dessus ou en dessous de cette droite au voisinage du point d'abscisse $x = 0$?

Exercice 4.— Fonctions inverses et courbes paramétrées (environ 4 points)
On note $\mathcal{C}$ le cercle centré à l'origine, de rayon 1. Pour $t \in [-1,1]$, on considère le point $M(t) = (x(t), y(t))$ défini par

$$x(t) = t \qquad y(t) = \cos(\arcsin(t)).$$

1. En utilisant la formule $\cos^2 + \sin^2 = 1$, montrer que le point $M(t)$ est situé sur le cercle $\mathcal{C}$ pour tout $t \in [-1,1]$.

2. Quand t parcourt l'intervalle $[0,1]$, quelle portion du cercle $\mathcal{C}$ le point $M(t)$ parcourt-il ? Dans quel sens ? Justifier.