Master Maths Fonda. et Appliquées — Orsay 2008–09
1ère année - 2 ème semestre - Analyse

Examen du 12 juin 2009

A. Vrai/faux. (environ 10 points)

Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE, et justifier votre réponse par une preuve ou un contre-exemple.

1. Dans un espace métrique, l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et même rayon.

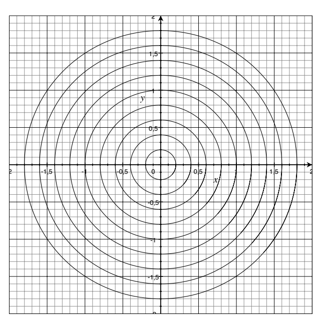
2. Un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ n'est jamais un G_δ-dense.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = f(2^n x)$. La famille $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $(C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ si et seulement si f est constante.

4. Soit F est un sous-espace vectoriel de $L^2([0,1])$ dont l'orthogonal $F^\perp$ est réduit à (la classe de) la fonction nulle. Alors $F = L^2([0,1])$.

5. La figure ci-dessous représente les trajectoires au voisinage de $(0,0)$ du système différentiel

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2x(t) - y(t) - y^2(t) \\ y'(t) &= -x(t) - y(t) - x(t)y(t) \end{aligned}$$



B. Opérateurs compacts. (environ 4 points)

Soit H un espace de Hilbert ; on note B la boule unité fermée de H. On dit qu'un opérateur linéaire continu $T : H \to H$ est *compact* si $T(B)$ est d'adhérence compacte dans H. On qu'un opérateur linéaire continu $T : H \to H$ est *de rang fini* si $T(H)$ est un sous-espace de dimension finie de H.

Montrer que l'ensemble des opérateurs de rang fini est dense dans l'ensemble des opérateurs compacts (pour la topologie induite par la norme d'opérateur associée à la norme de H).

Indication. Si T est compact, on pourra approcher T par une suite d'opérateurs de la forme $P_n \circ T$ où les P_n sont des projecteurs orthogonaux.

C. Étude d'un système différentiel. (environ 7 points)

On considère le système

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t) + y(t) - x(t)(x(t)^2 + y(t)^2) \\ y'(t) & = & -x(t) + y(t) - y(t)(x(t)^2 + y(t)^2) \end{array} \right.$$

1. Linéariser le système (E) au voisinage du point $(0,0)$, et en déduire l'allure des trajectoires de (E) au voisinage de $(0,0)$.

2. Si $(x(t), y(t))$ est une solution de (E), on écrit $x(t) + iy(t) = r(t)\exp(i\theta(t))$ avec $t \mapsto \theta(t)$ continue. Quelle sont les équations différentielles satisfaites par les fonctions $t \mapsto r^2(t)$ et $t \mapsto \theta(t)$?

3. En utilisant l'équations satisfaite par $t \mapsto r^2(t)$, montrer que les solutions maximales du système (E) sont définies sur un intervalle du type $]T_*, +\infty[$.

4. En utilisant les équations différentielles satisfaites par $t \mapsto r^2(t)$ et $t \mapsto \theta(t)$, tracer l'allure des solutions de (E).