Univesité Paris Nord – Licence 2 mention Physique-Chimie – Année 2013-2014
Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques

Examen partiel du 5 janvier 2015

Les calculatrices non-programmables et le polycopié de cours sont autorisés.

Exercice 1.— Tracés d'ensembles de définiton, lignes de niveaux, et graphes de fonctions partielles (environ 3 points)
Tracer les ensemble suivants (sans oublier d'indiquer les noms des variables sur les axes) :

1. l'ensemble de définition de la fonction $f(x,y) = \ln\left(y^2 - yx\right)$.

2. les lignes de niveaux 0, $\frac{1}{e}$ et 2 de la fonction $g(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

3. les graphes des fonctions partielles au point $(0,1)$ de $h(x,y) = xy\sin(xy) + y - 1$.

Exercice 2.— Recherche de points critiques (environ 3,5 points)
Déterminer l'ensemble des points critiques de chacune des fonctions suivantes :

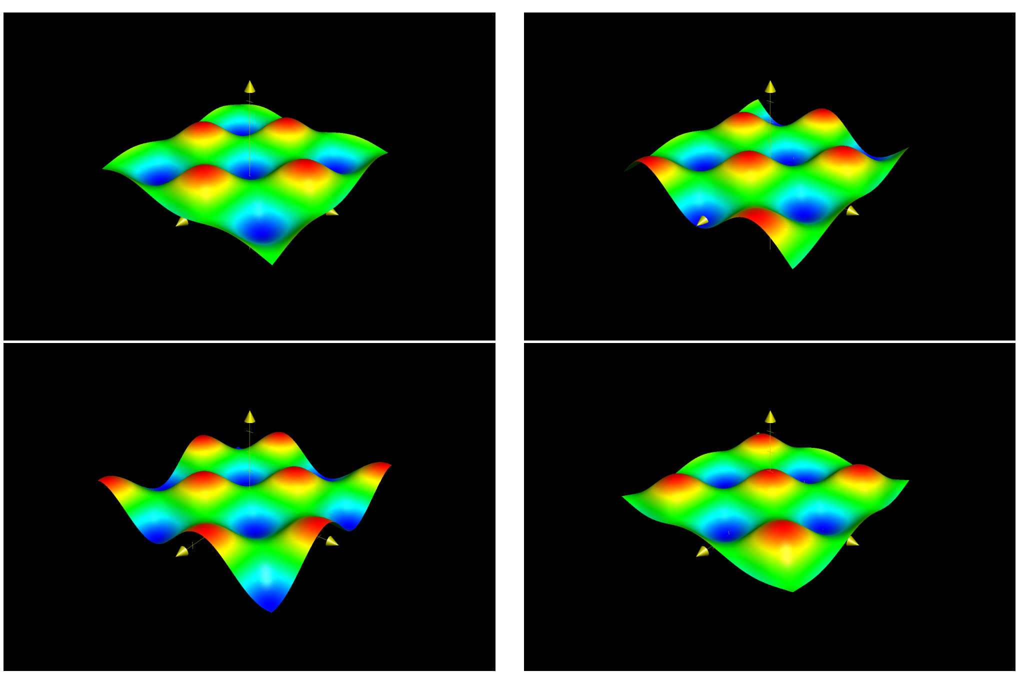
$$f(x,y) = x^2 e^{-\frac{y}{2}} - \sin y \qquad g(x,y) = (y^2-1)(x^4-2x^2) \qquad h(x,y,z) = xy + yz + zx.$$

Exercice 3.— Nature de points critiques (environ 4 points)
On considère la fonction de deux variables $f(x,y) = \cos(x)\cos(y) + 1$.

1. Vérifier que les points critiques de f sont les points de la forme $(k\pi, \ell\pi)$ avec $k, \ell \in \mathbb{Z}$ et les points de la forme $\left(\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$.

2. Déterminer la nature (maximum local, minimum local, selle, point critique dégénéré) du point critique $(k\pi, \ell\pi)$ en fonction des valeurs des entiers k et ℓ. Déterminer la nature du point critique $\left(\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ en fonction des valeurs des entiers m et n.

3. Parmi les graphes ci-dessous, lequel est celui de f ?



Exercice 4.— Tracé de graphes de fonctions de deux variables (environ 2 points)
Esquissez les graphes des fonctions de deux variables suivantes, en justifiant vos dessins (par exemple, grâce à des fonctions partielles). *On ne vous demande pas un dessin précis ; seulement une esquisse permettant de comprendre l'allure globale des graphes.*

$$f(x,y) = x^2 + y \qquad g(x,y) = x^6 + y^4$$

Exercice 5.— Calculs d'intégrales (environ 8 points)

1. Soit T le trapèze (plein) de sommets $(-2,2)$, $(-1,1)$, $(1,1)$ et $(2,2)$. Dessiner T et calculer $\iint_D x^4 y^5 dxdy$.

2. Soit D le disque dans $\mathbb{R}^2$ de centre $(0,0)$ et de rayon 1, et A la moitié de D située au-dessus de l'axe des abscisses. Calculer $\iint_A y\, dxdy$.

3. Soit B la boule dans $\mathbb{R}^3$ de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1. Calculer $\iiint_B z\, dxdydz$.

4. On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$. On note D le disque situé dans le plan $(z=0)$, de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1. On note C le cône (plein) de base D et de sommet $(0,0,1)$. Décrire C en coordonnées cylindriques et calculer son volume.

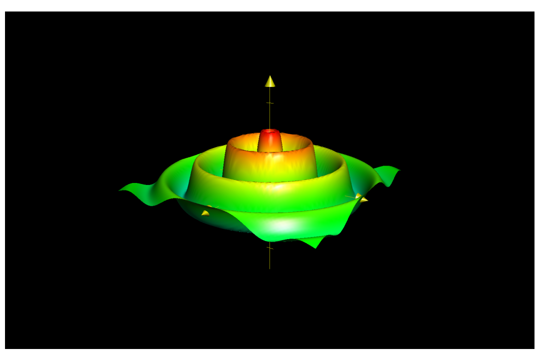
Exercice 6.— Vrai ou faux (exercice bonus: environ 6 points)
Pour chacune des assertions suivantes, dites si cette assertion est vraie ou fausse, et expliquez pourquoi. *Nota bene : cet exercice ne demande quasiment aucun calcul.*

1. Le point $(0,0)$ est un maximum global de la fonction $f(x,y) = x^2 + 10\cos(x^2+y^2)$.

2. La fonction de deux variables $g(x,y) = x^9y^4 + x^3 + y^8 + x^7y^4$ admet une infinité de points critiques.

3. La fonction $h(x,y) = x^8y^{10} + x^6y^2 + x^4 + y^8$ admet (au moins) un point critique.

4. Le graphe ci-dessous est celui de la fonction $k(x,y) = \sin(x^2+y^2)$.



5. Soit D le disque de $\mathbb{R}^2$ de centre $(0,0)$ et de rayon 1. On a $\iint_D x^2y^3\, dxdy = 2\pi$.

6. Le volume de l'ellipsoïde $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1\}$ est égal à 10π.
