
Examen partiel du 26 octobre 2009

L'examen dure 2 heures. Les calculatrices et tous les documents sont interdits.

Exercice 1.— Développement limité (environ 5 points)

1. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction $f : x \mapsto e^{2(\sqrt{1+x}-1)}$.
2. En déduire l'équation de la tangente au graphe de f au point $(0, 1)$.
3. Près de ce point, quelle est la position du graphe de f par rapport à sa tangente ?

Exercice 2.— Calcul de limite (environ 3 points)

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{\cos x - 1}$.

Exercice 3.— Étude d'une courbe paramétrée (environ 10 points)

On considère la courbe paramétrée définie, pour $t \in]0, 2\pi[$, par

$$M(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(t) = \ln |\sin(3t)| \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de $t \in]0, 2\pi[$ pour lesquels $M(t)$ est défini.
2. Quelle transformation géométrique envoie $M(t)$ sur $M(\pi + t)$? Quelle transformation géométrique envoie $M(t)$ sur $M(-t)$?
3. Dresser le tableau de variation conjoint de $x(t)$ et $y(t)$ lorsque t parcourt l'intervalle $]0, \pi/2[$.
4. Comment passer du tracé de la courbe sur $]0, \pi/2[$ au tracé de la courbe sur $]0, 2\pi[$?
5. Tracer la courbe pour $t \in]0, 2\pi[$.

Exercice 4.— Calcul d'une tangente à une courbe paramétrée (environ 5 points)

Considérons la courbe paramétrée $M(t) = \left(\sin(t) - t + 2t^2, \frac{t^2}{1-t} \right)$

1. Donner un vecteur directeur de la tangente à la courbe au point $M(0)$.
2. Donner une équation cartésienne de cette tangente.