Examen partiel du 27 mars 2009

Espaces métriques, complétude, compacité

Barême indicatif. *Chaque question vaut entre 1,5 et 2,5 points. Il y aura un bonus pour les copies traitant entièrement la partie A.1 ou la partie B.1.*

Exercice A - Théorème de la limite simple de Baire, et application

Le thèorème de la limite simple de Baire affirme que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est limite simple d'une suite de fonctions continues, alors l'ensemble des points de continuité est dense dans $\mathbb{R}$.

1. *Preuve du théorème.*

On considère une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge simplement vers un fonction f. Pour chaque couple d'entiers $n \geq 0$ et $k > 0$, on note

$$F_{n,k} = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tels que, pour tous } p \geq n \text{ et } q \geq n, \text{ on a } |f_p(x) - f_q(x)| \leq \frac{1}{k} \right\},$$

et $O_{n,k}$ l'intérieur de $F_{n,k}$. On note alors

$$O_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_{n,k} \quad \text{et} \quad O = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} O_k.$$

a. Montrer que $F_{n,k}$ est fermé quels que soient n et k. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{n,k} = \mathbb{R}$ pour tout k.

b. Montrer que O_k est un ouvert dense de $\mathbb{R}$ pour tout k. Que dire de l'ensemble O ?

c. Montrer que f est continue en chaque point de O et conclure.

2. *Application.*

a. Montrer que, si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors l'ensemble des points de continuité de la dérivée g' de g est dense dans $\mathbb{R}$ (et même, est un G_δ-dense de $\mathbb{R}$).

b. Existe-t-il une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable en tout point, telle que la dérivée g' de g est discontinue en tout point irrationnel ?

c. Exhiber une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable en tout point, telle que la dérivée g' de g est discontinue en 0, et continue ailleurs. En déduire une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable en tout point, telle que la dérivée g' de g est discontinue en tout point rationnel.

Exercice B - Parties compactes ou non de $\ell^1(\mathbb{N})$

On note

$$\ell^1(\mathbb{N}) = \left\{ u : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ tel que } \sum_{n\geq 0} |u(n)| < \infty \right\}$$

l'espace vectoriel des suites réelles sommables, que l'on munit de la norme $\|u\|_1 = \sum_{n\geq 0} |u(n)|$.

Pour toute suite $\rho : \mathbb{N} \to [1, +\infty[$ de nombres réels supérieurs à 1, on considère le sous-ensemble K_ρ de $\ell^1(\mathbb{N})$ défini comme suit :

$$K_\rho = \left\{ u : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ tel que } \sum_{n\geq 0} \rho(n).|u(n)| \leq 1 \right\}.$$

1. *Cas où $\rho(n)$ tend vers $+\infty$.*

Dans cette question, on considère une suite $\rho : \mathbb{N} \to [1, +\infty[$ telle que $\rho(n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Soit $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite déléments de K_ρ.

a. Montrer qu'il existe une sous-suite $(u^{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de la suite $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers une suite de nombre réels u.

b. Montrer que la suite u est dans K_ρ.

c. Montrer que la sous-suite $(u^{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge en fait vers u au sens de la norme $\|.\|_1$. En déduire que K_ρ est une partie compacte de $(\ell^1(\mathbb{N}), \|.\|_1)$.

2. *Cas où $\rho(n)$ ne tend pas vers $+\infty$.*

On considère maintenant une suite $\rho : \mathbb{N} \to [1, +\infty[$ telle que $\rho(n)$ ne tend pas vers $+\infty$ quand $n \to \infty$. Montrer que K_ρ n'est pas une partie compacte de $(\ell^1(\mathbb{N}), \|.\|_1)$.