Examen du 23 Juin 2010

L'examen dure 2 heures. Les calculatrices et tous les documents sont interdits.

Exercice 1.— Calcul de limite (3 points)

3 points si tout est parfait. Enlever 1 point si l'étudiant ne met pas les $x^2\epsilon(x)$, ou les $o(x^2)$. Si le raisonnement est correct, mais qu'il y a une erreur de calcul, mettre environ 1 point.

À l'aide d'un développement limité, calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\frac{x}{1-x} - \sin x}$.

Exercice 2.— Étude d'une courbe paramétrée (environ 7 points)

On considère la courbe paramétrée définie, pour $t \in \mathbb{R}$, par

$$M(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{avec} \begin{cases} x(t) = \exp(\sin(4t)) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$$

1. ***1 point en tout ; on enlève 0,5 points par réponse incorrecte.*** Quelle transformation géométrique envoie $M(t)$ sur $M(t+2\pi)$? Quelle transformation géométrique envoie $M(t)$ sur $M(t+\pi)$? Quelle transformation géométrique envoie $M(t)$ sur $M(t+\frac{\pi}{2})$?

2. ***3 points en tout.*** Dresser le tableau de variation conjoint de $x(t)$ et $y(t)$ lorsque t parcourt l'intervalle $[0, \pi/2]$.

3. ***2 points pour le tracé sur $t \in [0, \pi/2]$ et 1 point pour le passage à $\mathbb{R}$.*** Tracer la courbe $t \mapsto M(t)$, d'abord pour pour $t \in [0, \pi/2]$, puis pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.— Tracé d'ensembles de définitions (environ 4 points)

2 points pour chacun des ensembles (0,5 point pour une formule et 1,5 point pour le tracé).

Déterminer et représenter graphiquement les ensembles de définition des fonctions de deux variables suivantes :

$$f(x, y) = \frac{\ln(x)}{\sin(y)} \qquad g(x, y) = \sqrt{1 - xy}.$$

Exercice 4.— Étude d'une fonction de deux variables (environ 11 points)

Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction de deux variables définie par

$$h(x,y) = x^2 + x\sin(y).$$

1. ***1,5 point.*** Esquisser, sur un même dessin, les graphes des fonctions partielles suivantes :

$$\varphi_1 : x \mapsto h(x,0) \quad , \quad \varphi_2 : x \mapsto h\left(x, \frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad \varphi_3 : x \mapsto h\left(x, \frac{3\pi}{2}\right).$$

2. ***1,5 point.*** Même question avec les fonctions partielles :

$$\psi_1 : y \mapsto h(0,y) \quad , \quad \psi_2 : y \mapsto h(1,y) \quad , \quad \psi_3 : y \mapsto h(-1,y).$$

3. ***1 point.*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction h.

4. ***1 point.*** Donner une équation cartésienne du plan tangent au graphe de h au point de coordonnées $\left(1, \frac{\pi}{2}, 2\right)$.

5. ***1 point (on enlève 0,5 point par dérivée fausse).*** Calculer les dérivées d'ordre 2 de la fonction h.

6. ***2 points.*** Vérifier que $(0,0)$ est un point critique et donner sa nature (dégénéré ou non dégénéré, et dans ce cas, maximum local, minimum local ou point selle).

7. ***2 points.*** Déterminer l'ensemble des points critiques de la fonction h.

8. ***1 point.*** Parmi les quatre graphes ci-dessous, lequel représente celui de la fonction h ? (exceptionnellement, il ne vous est pas demandé de justifier votre réponse)