

# Ensemble oscillant d'un homéomorphisme de Brouwer ; homéomorphismes de Reeb

François Béguin et Frédéric Le Roux\*

## Résumé

Un *homéomorphisme de Brouwer* est un homéomorphisme du plan, sans point fixe, préservant l'orientation. Le *théorème des translations planes* affirme qu'un tel homéomorphisme s'obtient toujours en "recollant des translations". Dans cet article, nous introduisons un nouvel invariant de conjugaison des homéomorphismes de Brouwer, *l'ensemble oscillant*, pour tenter de décrire assez précisément la manière dont s'effectue le recollement des translations.

D'une part, nous utilisons la notion d'ensemble oscillant pour montrer que des homéomorphismes de Brouwer extrêmement semblables peuvent appartenir à des classes de conjugaison distinctes. Plus précisément, nous étudions les *homéomorphismes de Reeb* (*i.e.* les homéomorphismes de Brouwer qui préservent feuille par feuille un feuilletage de Reeb) ; nous montrons, par exemple, l'existence d'une infinité d'homéomorphismes de Reeb deux à deux non-conjugués.

D'autre part, nous utilisons la notion d'ensemble oscillant pour caractériser les éléments d'une classe de conjugaison non-triviale d'homéomorphismes de Brouwer : en un certain sens, nous donnons une caractérisation dynamique de "l'homéomorphisme de Brouwer le plus simple après la translation".

## Abstract

A *Brouwer homeomorphism* is a fixed-point-free orientation-preserving homeomorphism of the plane. The *plane translation theorem* states that one can get every such homeomorphism by "gluing translations". In this paper, a new conjugacy invariant, *the oscillation set*, is introduced in an attempt to give a precise description of the way the translations are glued together.

On the one hand, the oscillating set is used to show that Brouwer homeomorphisms that seem extremely similar often fail to be conjugated. More precisely, homeomorphisms that preserve each leaf of that Reeb foliation, called *Reeb homeomorphisms*, are examined; we prove, for instance, that there exists an infinite number of Reeb homeomorphisms that fall into distinct conjugacy classes.

On the other hand, the oscillating set is used to characterize the elements of a non-trivial conjugacy class, getting a dynamical characterization of the "simplest non-trivial Brouwer homeomorphism".

**Mots clés :** Homéomorphisme, plan, point fixe, translation, Brouwer.

**Classification AMS :** 37E30, 58F25.

---

\*Francois.BEGUIN@umpa.ens-lyon.fr, Unite de Mathematiques Pures et Appliquees Ecole Normale Supérieure de Lyon 46, Allée d'Italie 69364 LYON Cedex 7, et frederic.le-roux@math.u-psud.fr, Equipe de Topologie et Dynamique Bâtiment 425/430, Université de Paris-Sud 91405 ORSAY Cedex FRANCE.

## Table des matières

0	Introduction	2
I	Ensemble singulier et ensemble oscillant	6
1	Quelques propriétés générales des homéomorphismes de Brouwer	6
2	Ensemble singulier d'un homéomorphisme de Brouwer	6
3	Ensemble oscillant d'un homéomorphisme de Brouwer	7
II	Constructions d'homéomorphismes de Reeb exotiques	9
4	Construction d'homéomorphismes de Reeb par recollement de translations	10
5	Ensemble oscillant d'un homéomorphisme de Reeb	15
6	Une infinité de classes de conjugaison d'homéomorphismes de Reeb	21
7	Un homéomorphisme de Reeb qui n'est le temps 1 d'aucun flot	23
8	Un flot de Reeb dont le temps 1 n'est pas conjugué au temps 2	23
III	L'homéomorphisme de Brouwer "le plus simple après la translation"	24
9	Préliminaires	24
10	Dynamique sur l'ensemble singulier	26
11	Comportement de l'orbite d'un compact	28
12	Un lemme d'existence d'arcs uniformément non-oscillants	29
13	Rectangles	34
14	Quadrillages	37
15	Un lemme pour affiner les quadrillages	40
16	Un lemme pour compléter les quadrillages	43
17	Construction de la conjugaison	44

## 0 Introduction

### 0.1 Les homéomorphismes de Brouwer ou “comment recoller des translations planes”

On appelle *homéomorphisme de Brouwer* tout homéomorphisme du plan, qui préserve l'orientation, et qui n'a aucun point fixe. Ces homéomorphismes sont intéressants à au moins deux titres : d'une part ce sont les plus simples des homéomorphismes de surface non triviaux d'un point de vue dynamique, et d'autre part ils interviennent de manière naturelle dans l'étude des dynamiques plus complexes (par exemple, dans l'étude des homéomorphismes sans point fixe de l'anneau ([9],[12]), ou l'étude des homéomorphismes de surface au voisinage d'un point fixe isolé ([23])).

Pour analyser un système dynamique, une approche classique consiste à découper l'espace en morceaux sur chacun desquels la dynamique est triviale, puis à étudier la manière dont ces dynamiques triviales se recollent. Cette démarche est particulièrement utilisée pour comprendre des dynamiques peu récurrentes : citons, en dimension 1, l'étude des difféomorphismes de l'intervalle ([24]); en dimension 2, l'étude des connexions de selles ([27], [5], [6]), des difféomorphismes Morse-Smale ([19]) ou encore la classification analytique des germes de difféomorphismes holomorphes en un point fixe (recollement de cylindres d'Ecalte, [8], [29]); en dimension 3, pour les champs de vecteurs, l'étude des connexions de selles, ou de la dynamique au voisinage d'une orbite homocline d'un point selle-centre ([2], [7]); citons enfin l'étude des difféomorphismes Morse-Smale en toute dimension ([28]). Nous allons utiliser cette approche par “recollement de dynamiques triviales” pour étudier les homéomorphismes de Brouwer.

Les homéomorphismes de Brouwer les plus simples sont les translations affines. Par ailleurs, la *théorème des translations planes* ([3],[12]) affirme que, pour tout homéomorphisme de Brouwer  $h$ , on peut recouvrir le plan par de “grands” ouverts invariants, simplement connexes, sur chacun desquels l'homéomorphisme  $h$  est conjugué à une translation (ces ouverts sont appelés *domaines de translation*). Ainsi, tout homéomorphisme de Brouwer peut être considéré comme un “recollement de translations”. En ce sens, étudier les homéomorphismes de Brouwer revient à comprendre les différentes manières de recoller des translations.

Une des conséquences du théorème des translations planes est que toutes les orbites d'un homéomorphisme de Brouwer tendent vers l'infini dans le passé et le futur : il n'y a presque aucune forme de récurrence. Ceci pourrait laisser espérer une classification complète des homéomorphismes de Brouwer à conjugaison près. Cependant, de nombreux exemples ont montré que les orbites, individuellement simplissimes, d'un homéomorphisme de Brouwer pouvaient s'organiser globalement selon une dynamique complexe ([16],[4],[23]). Il existe en particulier des homéomorphismes de Brouwer qui ne peuvent être obtenus qu'en recollant une infinité de translations (autrement dit, le plan n'est pas recouvert pas un nombre fini de domaines de translation). Un des buts de cet article est de montrer que la situation est déjà très complexe quand on se limite aux homéomorphismes obtenus par recollement de deux translations.

### 0.2 La question du plongement d'un homéomorphisme de Brouwer dans un flot

Un *flot* est une famille continue  $(h^t)_{t \in \mathbb{R}}$  d'homéomorphismes vérifiant la loi d'addition des temps ( $h^t \circ h^s = h^{t+s}$ ). Le *temps 1 du flot* est alors l'homéomorphisme  $h^1$ .

En 1934, B. Kerékjártó a construit un premier exemple d'homéomorphisme de Brouwer qui n'est pas le temps 1 d'un flot ([18]). Pour prouver cette propriété, Kerékjártó invente la notion de *point singulier* (voir ci-dessous) : l'ensemble des points singuliers d'un homéomorphisme est un invariant de conjugaison ; l'ensemble singulier du temps 1 d'un flot doit donc être une réunion d'orbites du flot, donc une réunion disjointe de droites topologiques ; ce qui n'est pas le cas de son exemple.

L'exemple de Kerékjártó soulève naturellement la question suivante : tout homéomorphisme de Brouwer dont l'ensemble singulier est une réunion disjointe de droites topologiques peut-il être plongé dans un flot ? Dans [26], H. Nakayama a répondu négativement à cette question : il a exhibé un homéomorphisme de Brouwer obtenu par recollement de deux translations, dont l'ensemble singulier est la réunion de deux droites disjointes, mais qui ne préserve les feuilles d'aucun feuilletage, ce qui interdit d'être le temps 1 d'un flot.

Nous allons voir ci-dessous que la condition utilisée par Nakayama, elle non plus, n'est pas suffisante : il existe un homéomorphisme de Brouwer obtenu par recollement de deux translations, dont l'ensemble singulier est réunion de deux droites, qui préserve chaque feuille d'un feuilletage, mais qui n'est le temps 1 d'aucun flot. Ceci montre qu'il est très délicat de trouver des conditions pour qu'un homéomorphisme de Brouwer soit le temps 1 d'un flot.

### 0.3 L'ensemble oscillant

L'exemple de Nakayama montre, en particulier, que l'ensemble singulier n'est pas un invariant complet pour la classification des homéomorphismes de Brouwer à conjugaison près. Nous allons introduire dans cet article un invariant plus fin que l'ensemble singulier : *l'ensemble oscillant*. Esquissons-en la définition. Tout d'abord, un couple de points  $(M, N)$  est dit *singulier* si pour tout réel  $\varepsilon > 0$  il existe un point  $Z$ , à distance inférieure à  $\varepsilon$  du point  $M$ , et ayant un itéré positif  $h^n(Z)$  ( $n$  grand) à distance inférieure à  $\varepsilon$  du point  $N$ . On considère alors les germes d'arcs  $c$  au point  $M$  qui contiennent de tels points  $Z$  : les itérés d'un tel arc  $c$  s'accumulent en  $N$ , et on peut regarder le comportement de la famille des itérés de  $c$  au voisinage du point  $N$ . Le couple  $(M, N)$  est dit *non-oscillant* si ce comportement est le plus simple possible (c'est-à-dire si la situation ressemble à celle de la figure 1), pour au moins un arc  $c$ .

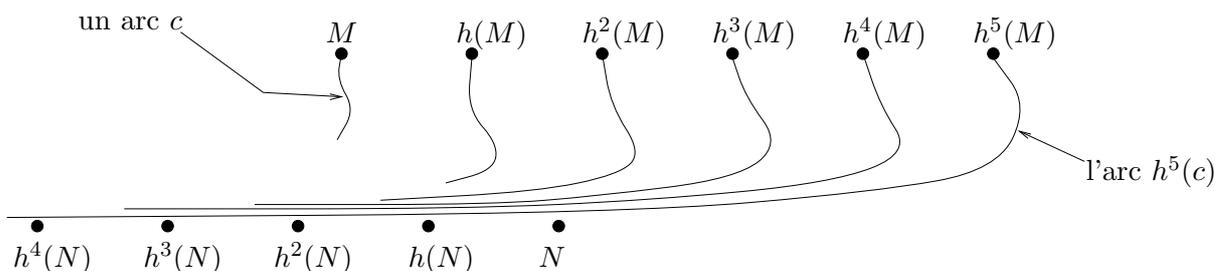


FIGURE 1 – Un couple de points singuliers  $(M, N)$  non-oscillant

### 0.4 L'ensemble oscillant permet de distinguer des dynamiques semblables

Pour tester la finesse de notre invariant, nous allons nous intéresser à des homéomorphismes de Brouwer aussi simples que possible et aussi semblables les uns aux autres que possible : les homéomorphismes de Reeb. La dynamique de tout homéomorphisme de Reeb est représentée par la figure 2 : il s'agit des homéomorphismes sans point fixe qui préservent chaque feuille d'un *feuilletage de Reeb*. Le feuilletage de Reeb est le feuilletage du plan le plus simple après le feuilletage trivial (feuilletage du plan en droites horizontales). On obtient un feuilletage

de Reeb en recollant deux copies du feuilletage trivial ; or tout homéomorphisme sans point fixe préservant chaque feuille du feuilletage trivial est conjugué à une translation ; donc les homéomorphismes de Reeb s’obtiennent tous en recollant deux translations.

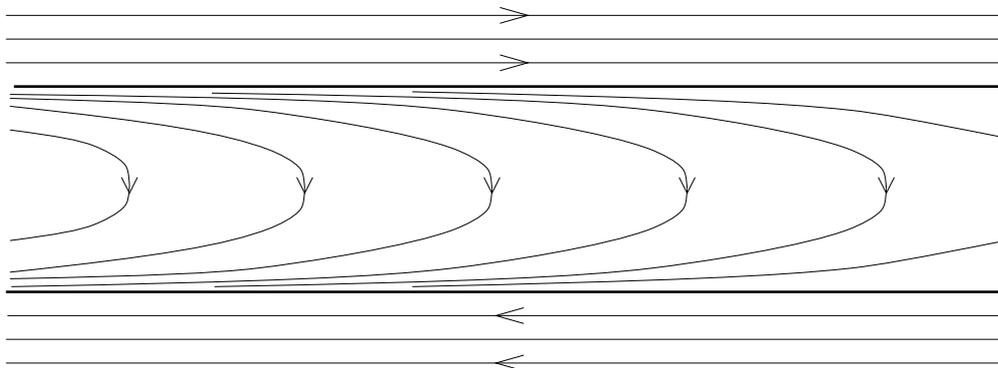


FIGURE 2 – Un feuilletage de Reeb avec un choix d’orientation des feuilles

A l’aide de critères d’oscillation et de non-oscillation (section 5), nous montrons :

### **Théorème 1**

1. *Il existe une infinité non-dénombrable d’homéomorphismes de Reeb deux à deux non-conjugués.*
2. *Il existe un homéomorphisme de Reeb qui n’est le temps 1 d’aucun flot.*
3. *Il existe un flot de Reeb  $(h^t)_{t \in \mathbb{R}}$  tel que les homéomorphismes  $h^1$  et  $h^2$  ne sont pas conjugués.*

### **0.5 L’ensemble oscillant permet de caractériser une classe de conjugaison**

Même s’il est plus fin que l’ensemble singulier, l’ensemble oscillant n’est pas non plus un invariant complet. Il y a quand même un cas intéressant où il permet de caractériser la dynamique :

**Théorème 2** *Il existe une unique classe de conjugaison d’homéomorphismes de Brouwer  $h$  vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *l’ensemble des couples singuliers de  $h$  est le produit de deux droites topologiques ;*
2. *l’ensemble oscillant de  $h$  est vide.*

(on rappelle qu’une *droite topologique* est l’image d’un plongement propre de la droite réelle dans le plan ; ou encore, d’après le théorème de Schoenflies, l’image d’une droite euclidienne du plan par un homéomorphisme du plan.)

En un certain sens, le théorème 2 donne une caractérisation des homéomorphismes de Brouwer qui ont “la dynamique la plus simple après celle de la translation”. Notons que B. Kerékjártó a caractérisé les homéomorphismes conjugués à la translation (ce sont ceux dont l’ensemble singulier est vide), mais que jusqu’ici il n’existait pas de caractérisation d’une autre classe de conjugaison d’homéomorphismes de Brouwer.

Le théorème 2 a pour conséquence :

**Corollaire 3** *Un homéomorphisme de Brouwer dont l’ensemble singulier est un produit de deux droites topologiques et dont l’ensemble oscillant est vide est le temps 1 d’un flot.*

## 0.6 Quelques remarques

- Le théorème 1 montre que la figure 2 est le “portrait de phase” d’une infinité d’homéomorphismes qui sont distincts deux à deux du point de vue de la relation de conjugaison (et donc que la relation de conjugaison est particulièrement peu intuitive!). C’est également le cas de la figure 3 qui décrit habituellement un point fixe hyperbolique selle, et pour laquelle on pourrait énoncer un théorème analogue : en effet, la restriction au complémentaire de chacun des quatre quarts de plan du feuilletage qui y est dessiné est homéomorphe au feuilletage de Reeb. Remarquons que ceci souligne, en creux, la puissance du théorème de linéarisation de Hartman-Grobman.

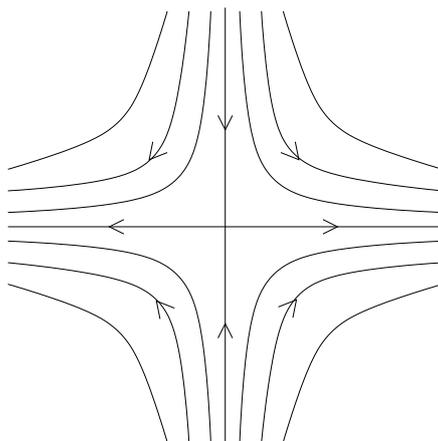


FIGURE 3 – La figure ci-dessus est le “portrait de phase” d’une infinité de germes d’homéomorphismes distincts deux à deux du point de vue de la relation de conjugaison

- L’affirmation 2 du théorème 1 nous semble montrer à quel point la question du plongement d’un homéomorphisme de Brouwer dans un flot est délicate.
- Le théorème 1 ne résulte aucunement de contre-exemples de faible régularité. En fait, tous les homéomorphismes et flots de Reeb que nous utiliserons pour prouver le théorème 1 sont de classe  $C^\infty$ . Pour les exemples analogues associés à la figure 3, on peut poser le problème de la régularité au point fixe ; il est cependant probable qu’on puisse obtenir là encore des exemples en classe  $C^\infty$  (peut-être nécessairement infiniment tangents à l’identité).
- Le deuxième point du théorème 1 était déjà contenu dans un texte non publié du deuxième auteur ([22]) ; un des buts du présent article est d’éclairer la preuve embrouillée de [22], ce que permet, nous semble-t-il, la notion d’ensemble oscillant.
- Dans l’énoncé du théorème 2, on autorise les conjugaisons par n’importe quel homéomorphisme du plan. Si on se restreint aux homéomorphismes préservant l’orientation, alors on trouve deux classes de conjugaison.
- Si l’on ne suppose pas que l’ensemble oscillant est vide (même lorsque l’ensemble singulier est très simple), il semble très difficile de construire des conjugaisons entre deux homéomorphismes de Brouwer donnés. C’est cette difficulté qui nous a empêché de répondre à la question posée dans [21] : peut-on montrer qu’il n’y a pas de classification borélienne des homéomorphismes de Brouwer dont l’ensemble singulier est réunion de deux droites ?

L'article est découpé en trois parties. Dans la partie I, on rappelle quelques propriétés générales des homéomorphismes de Brouwer, et on introduit la notion d'ensemble oscillant. Dans la partie II, on construit les exemples d'homéomorphismes de Reeb annoncés dans le théorème 1. Dans la partie III, on prouve le théorème 2. Les parties II et III sont indépendantes.

## Première partie

# Ensemble singulier et ensemble oscillant

## 1 Quelques propriétés générales des homéomorphismes de Brouwer

On rappelle ici quelques propriétés communes à tous les homéomorphismes de Brouwer. Soit  $h$  un homéomorphisme de Brouwer (homéomorphisme du plan, préservant l'orientation, sans point fixe).

**Lemme 1.1 (disques libres)** *Soit  $D$  un disque topologique fermé du plan (i.e. un ensemble homéomorphe au disque unité fermé). Si  $D$  est disjoint de son premier itéré  $h(D)$ , alors  $D$  est disjoint de ses itérés  $h^n(D)$  pour tout entier  $n$  non nul.*

**Preuve** Voir [12]. △

**Corollaire 1.2** *Sous l'action de  $h$  :*

(i) *tous les points sont errants (i.e. tout point du plan possède un voisinage qui est disjoint de tous ses itérés) ;*

(ii) *l'orbite positive et l'orbite négative de tout point  $x$  tendent vers l'infini (i.e. tout compact du plan ne contient qu'un nombre fini de points de la suite  $(h^n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$ ).*

**Preuve** Comme  $h$  n'a pas de point fixe, tout disque assez petit est disjoint de son image, donc disjoint de tous ses itérés d'après le lemme 1.1 ; ceci prouve le point (i). Un point errant ne peut pas être point d'accumulation d'une orbite, ce qui entraîne le point (ii). △

Nous n'utiliserons pas, sur le plan logique, le *théorème des translations planes* de Brouwer ; néanmoins, il n'est sans doute pas inutile de rappeler la partie du théorème qui motive notre travail, et que nous avons exprimée de manière imagée par l'expression "les homéomorphismes de Brouwer s'obtiennent en recollant des translations" :

**Théorème 1.3 (Brouwer, [3], [12])** *Soit  $h$  un homéomorphisme de Brouwer. Pour tout point  $x$  du plan, il existe un ouvert  $O$  contenant  $x$ , homéomorphe au plan, invariant par  $h$  (i.e.  $h(O) = O$ ), tel que la restriction de  $h$  à  $O$  est conjuguée à la translation  $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$  du plan  $\mathbb{R}^2$ .*

## 2 Ensemble singulier d'un homéomorphisme de Brouwer

On se donne un homéomorphisme de Brouwer  $h$ .

**Définition 2.1** *Soit  $(M, N)$  un couple de points du plan qui n'appartiennent pas à une même orbite de  $h$ . On dira que le couple  $(M, N)$  est singulier si, pour tout voisinage  $U$  de  $M$  et pour tout voisinage  $V$  de  $N$ , il existe un entier positif  $n$  tels que  $h^n(U) \cap V$  est non-vide. L'ensemble des couples de points singuliers sera noté  $\text{Sing}(h)$ .*

## Remarques 2.2

- Par définition, un couple  $(M, M)$  n'est jamais singulier.
- Si le couple  $(M, N)$  est singulier, alors les points  $M$  et  $N$  ne sont pas séparés dans le quotient  $\mathbb{R}^2/h$ . Réciproquement, si les points  $M$  et  $N$  ne sont pas séparés dans le quotient  $\mathbb{R}^2/h$ , alors le couple  $(M, N)$  ou le couple  $(N, M)$  est singulier.
- De nombreux auteurs ne considèrent pas l'ensemble des couples singuliers  $\text{Sing}(h) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ , mais plutôt les projections de  $\text{Sing}(h)$  sur chacun des deux facteurs du produit cartésien  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ . Ainsi, dans la littérature, c'est la réunion de ces deux projections qu'on appelle généralement "ensemble singulier de  $h$ " (voir, par exemple, [16] ou [26]).

**Exemple 2.3** Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de Reeb (voir la figure 2, et la définition précise donnée à la section 4). On note  $\Delta_1, \Delta_2$  les deux seules feuilles de  $\mathcal{F}$  qui ne sont pas séparées dans l'espace des feuilles (en gras sur la figure 2). Soit maintenant  $h$  un homéomorphisme de Brouwer qui préserve chaque feuille du feuilletage  $\mathcal{F}$ . On montre très facilement que l'ensemble  $\text{Sing}(h)$  est égal à  $\Delta_1 \times \Delta_2$  ou  $\Delta_2 \times \Delta_1$ , selon l'orientation que l'homéomorphisme  $h$  induit sur les feuilles de  $\mathcal{F}$ .

La propriété suivante découle immédiatement de la définition des couples singuliers :

**Lemme 2.4** *L'ensemble des couples singuliers est un invariant de conjugaison.*

*Plus précisément, soient  $h_1, h_2$  deux homéomorphismes de Brouwer. Supposons qu'il existe un homéomorphisme  $g$  qui conjugue  $h_1$  à  $h_2$ . Alors, on a  $(g \times g)(\text{Sing}(h_1)) = \text{Sing}(h_2)$ . En particulier, les ensembles  $\text{Sing}(h_1)$  et  $\text{Sing}(h_2)$  sont homéomorphes.*

## 3 Ensemble oscillant d'un homéomorphisme de Brouwer

### 3.1 Famille d'arcs équi-localement connexe

**Remarque 3.1** L'ensemble des compacts de la sphère  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  est muni de la métrique de Hausdorff (deux compacts sont proches si et seulement si tout point de l'un est proche d'un point de l'autre, en métrique sphérique). L'espace ainsi obtenu est compact. De plus, toute limite d'une suite de compacts connexes est connexe (voir [25]). Toutes les convergences de suites de compacts mentionnées dans la suite du texte auront lieu dans cet espace.

**Définitions 3.2** *On appelle arc un plongement (application continue, injective) de  $[0, 1]$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$ . Dans la pratique, le paramétrage n'aura pas beaucoup d'importance, et on confondra le plongement et l'image du plongement dans le plan.*

*On dit qu'un arc  $c$  germe en  $M$  si  $c(0) = M$  ; on dit aussi que  $M$  est l'origine de l'arc  $c$ . On dit que deux arcs  $c$  et  $c'$  ont le même germe si les applications  $c, c' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  coïncident sur un voisinage de 0. Enfin, si  $P$  et  $Q$  sont deux points d'un arc  $c$ , on notera  $[PQ]_c$  le sous-arc de  $c$  d'extrémités  $P$  et  $Q$ .*

On se donne une famille d'arcs du plan  $(c_n)_{n \geq 0}$ , et un point  $N$ . La proposition suivante donne quatre manières équivalentes d'exprimer le fait que l'allure des arcs  $(c_n)$  est "simple" au voisinage du point  $N$  :

**Proposition 3.3** *Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes.*

- 1 - *Pour tout voisinage  $V$  de  $N$ , il existe un voisinage  $W$  de  $N$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tous points  $P$  et  $Q$  dans  $c_n \cap W$ , l'arc  $[PQ]_{c_n}$  est inclus dans  $V$ .*

2 - Il existe des voisinages  $W$  de  $N$  arbitrairement petits tels que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'intersection  $c_n \cap W$  est connexe (ou vide).

3 (Version séquentielle) - Soit  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'entiers. Soient  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$  des suites de points telles que, pour tout  $k$ , les points  $P_k, Q_k, R_k$  sont sur l'arc  $c_{n_k}$  et le point  $Q_k$  est sur le sous-arc  $[P_k R_k]_{c_{n_k}}$ . Si les suites  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$  convergent toutes deux vers  $N$ , alors la suite  $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge également vers  $N$ .

3bis (Deuxième version séquentielle) - Soit  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'entiers. Soient  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , deux suites de points telles que, pour tout  $k$ , les points  $P_k$  et  $R_k$  sont sur l'arc  $c_{n_k}$ . Si les suites  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$  convergent toutes deux vers  $N$ , alors la suite des diamètres des sous-arcs  $[P_k R_k]_{c_{n_k}}$  tend vers 0 (ceci revient encore à dire que cette suite de sous-arcs converge vers le singleton  $\{N\}$  en topologie de Hausdorff).

**Définition 3.4** On dira que la famille d'arcs  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est équi-localement connexe en  $N$  si elle vérifie l'une des quatre propriétés de la proposition précédente.

### Preuve la proposition 3.3

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$  Supposons la première propriété vérifiée. Soit  $V$  un voisinage de  $N$ , et  $W$  le voisinage associé. On considère l'ensemble

$$W' = W \cup \{[PQ]_{c_n} \mid n \in \mathbb{N}, P, Q \in c_n \cap W\}.$$

C'est un voisinage de  $N$ , inclus dans  $V$ , qui rencontre chaque arc  $c_n$  selon un ensemble connexe. La deuxième propriété est donc vérifiée.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$  Supposons la deuxième propriété vérifiée. Soit  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'entiers. Soient  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$  des suites de points qui convergent toutes deux vers le point  $N$ , telles que, pour tout  $k$ , les points  $P_k$  et  $R_k$  sont sur l'arc  $c_{n_k}$ . Pour tout  $k$ , soit  $Q_k$  un point sur le sous-arc  $[P_k R_k]_{c_{n_k}}$ . Soit enfin  $W$  un voisinage de  $N$  arbitrairement petit donné par la deuxième propriété. Pour tout  $k$  assez grand, les points  $P_k$  et  $R_k$  sont dans  $W$ ; mais comme  $c_{n_k} \cap W$  est connexe, le point  $Q_k$  est aussi dans  $W$ . Ceci montre que la suite  $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $N$ .

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$  Supposons que la première propriété n'est pas vérifiée. Soit  $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une base de voisinages de  $N$ . Il existe alors un voisinage  $V$  de  $N$  avec la propriété suivante : pour tout entier positif  $k$ , il existe un entier positif  $n_k$  et des points  $P_k, R_k \in c_{n_k} \cap W_k$  tels que  $[P_k R_k]_{c_{n_k}} \not\subset V$ . Soit maintenant, pour chaque entier positif  $k$ , un point  $Q_k \in [P_k R_k]_{c_{n_k}} \setminus V$ . La suite de points  $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers  $N$  : la troisième propriété n'est donc pas vérifiée.

$\boxed{3 \Leftrightarrow 3\text{bis}}$  L'équivalence entre les propriétés 3 et 3bis est immédiate. △

## 3.2 Arcs oscillants

On considère maintenant un homéomorphisme de Brouwer  $h$ . Soient  $(M, N)$  un couple singulier pour  $h$  et  $c$  un arc qui germe en  $M$ .

**Définition 3.5** (figure 4) On dira que l'arc  $c$  n'oscille pas au voisinage de  $N$  si la famille d'arcs  $(h^n(c))_{n \geq 0}$  est équi-localement connexe en  $N$ .

**Définition 3.6** On dira que le germe de l'arc  $c$  est indifférent à  $N$  s'il existe un arc  $\tilde{c}$ , ayant le même germe que  $c$ , et s'il existe un voisinage  $V$  de  $N$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $h^n(\tilde{c})$  ne rencontre pas  $V$ .

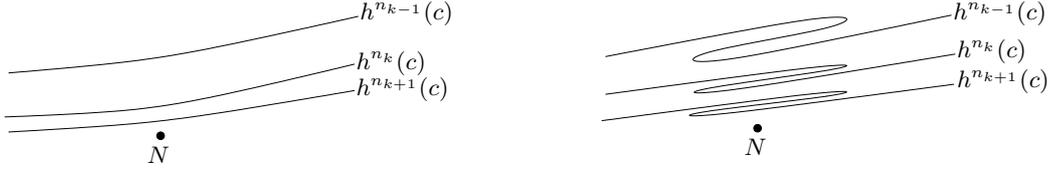


FIGURE 4 – L’allure des arcs  $h^n(c)$  : à gauche, quand l’arc  $c$  n’oscille pas au voisinage du point  $N$ , à droite, quand l’arc  $c$  oscille au voisinage du point  $N$

**Remarque 3.7** Si le germe d’un arc  $c$  est indifférent à  $N$ , alors l’arc  $\tilde{c}$  de la définition précédente est un exemple trivial d’arc qui n’oscille pas au voisinage de  $N$ .

**Définition 3.8** Soit  $(M, N)$  un couple singulier. On dira que le couple  $(M, N)$  est oscillant si tout arc  $c$  qui germe en  $M$ , et dont le germe n’est pas indifférent à  $N$ , oscille au voisinage de  $N$ .

L’ensemble des couples oscillants sera appelé ensemble oscillant de  $h$  et sera noté  $\text{Osc}(h)$ .

Le lemme suivant découle directement des définitions :

**Lemme 3.9** L’ensemble oscillant est un invariant de conjugaison.

Plus précisément, soient  $h_1, h_2$  deux homéomorphismes de Brouwer. Supposons qu’il existe un homéomorphisme  $g$  qui conjugue  $h_1$  à  $h_2$ . Alors  $(g \times g)(\text{Osc}(h_1)) = \text{Osc}(h_2)$ . En particulier, les ensembles  $\text{Osc}(h_1)$  et  $\text{Osc}(h_2)$  sont homéomorphes, via un homéomorphisme qui envoie  $\text{Sing}(h_1)$  sur  $\text{Sing}(h_2)$ .

### Remarques 3.10

— Pour tout couple singulier  $(M, N)$ , on peut construire un arc  $c$  qui germe en  $M$  et qui oscille au voisinage de  $N$ . Ainsi, dans la définition 3.8 ci-dessus, il est important de se préoccuper de tous les arcs qui germent en  $M$ .

— L’ensemble oscillant est invariant par  $h$  au sens fort : si le couple  $(M, N)$  est oscillant, alors les couples  $(h^m(M), h^n(N))$  sont oscillants pour tous entiers  $m$  et  $n$  (eux osci).

— En général, l’ensemble oscillant de  $h$  n’est ni ouvert ni fermé (voir, par exemple, les ensembles oscillants des homéomorphismes de Reeb construits dans la partie 6).

— On aurait pu aussi définir l’ensemble oscillant de la manière suivante : un couple  $(M, N)$  est oscillant s’il existe des arcs  $c$  et  $d$  germant respectivement en  $M$  et  $N$  (et non indifférents respectivement à  $N$  et  $M$ ) tels que, pour tout entier  $n$  assez grand,  $h^n(c) \cap d$  est formé d’exactly un point. Cette définition aurait l’avantage d’être symétrique (l’ensemble oscillant de  $h^{-1}$  serait l’image de l’ensemble oscillant de  $h$  par la symétrie  $(M, N) \leftrightarrow (N, M)$ ). Nous avons fait le choix d’utiliser plutôt le concept déjà connu d’équi-locale connexité ; de toutes façons, les deux définitions, bien que n’étant pas équivalentes, sont extrêmement proches, et tous les résultats de cet article resteraient valables, avec des preuves semblables.

— Dans le même esprit que l’ensemble oscillant, on peut définir de nombreux autres invariants de conjugaison. Par exemple, appelons “infiniment oscillant” un arc  $c$  tel que, pour tout voisinage  $W$  de  $N$  assez petit, le nombre de composante connexe de l’intersection  $h^n(c) \cap W$  tend vers l’infini (quand  $n$  tend vers l’infini) ; ceci conduit à la définition d’un “ensemble infiniment oscillant” qui est, en général, strictement inclus dans l’ensemble  $\text{Osc}(h)$ .

## Deuxième partie

# Constructions d'homéomorphismes de Reeb exotiques

Cette partie est consacrée à la preuve du théorème 1. Dans un premier temps, on donne un procédé de construction général pour associer à une fonction  $f$  un homéomorphisme de Reeb  $h_f$  (section 4). On trouve ensuite des critères d'oscillation ou de non-oscillation : certaines propriétés de la fonction  $f$  permettent d'affirmer que certains couples de points sont oscillants ou non-oscillants pour l'homéomorphisme  $h_f$ . Ceci nous permet de construire les exemples annoncés dans le théorème 1.

Avant de rentrer dans la preuve formelle du théorème 1, nous voudrions essayer d'expliquer un peu l'intuition qui est à l'origine de ce théorème. Voici, par exemple, une idée de ce qui peut empêcher un homéomorphisme de Reeb d'être le temps 1 d'un flot (point 2 du théorème 1) : Considérons un homéomorphisme de Reeb  $h$ , et supposons qu'il existe deux points  $M_0$  et  $M_1$  situés sur l'une des droites singulières de  $h$ , avec les propriétés suivantes (voir figure 5) : quand on itère un arc  $\gamma_0$  qui germe en  $M_0$  comme sur la figure 5, on obtient des arcs qui “zig-zagent” au voisinage de la deuxième droite singulière ; par contre, il existe un arc  $\gamma_1$  qui germe en  $M_1$  et dont les itérés n'ont pas de zigzag. Alors, les comportements dynamiques aux points  $M_0$  et  $M_1$  sont différents (en terme d'oscillation, le point  $M_0$  fait partie d'un couple oscillant, mais pas le point  $M_1$ ). Cependant, si  $h$  était le temps 1 d'un flot  $(h^t)_{t \in \mathbb{R}}$ , alors le point  $M_1$  serait l'image de  $M_0$  par un temps  $h^{t_1}$  du flot ; or l'homéomorphisme  $h^{t_1}$  commuterait avec  $h$  (*i.e.* conjuguerait  $h$  à lui-même), donc les comportements dynamiques en  $M_0$  et  $M_1$  devraient être identiques. On en “déduit” que  $h$  ne peut pas être le temps 1 d'un flot.

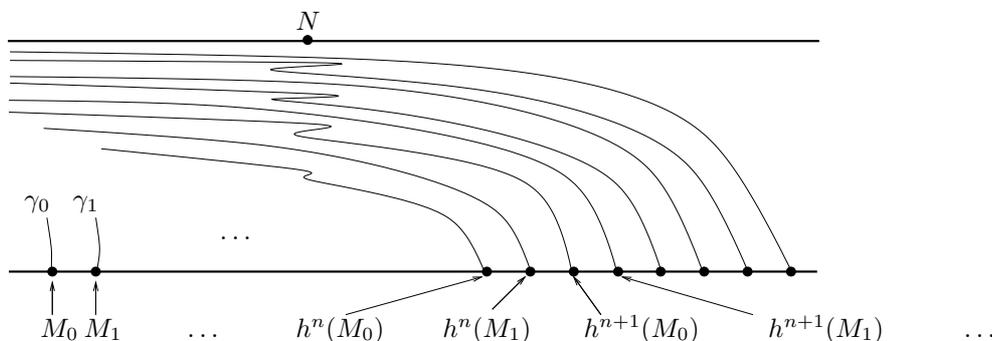


FIGURE 5 – Comment préserver le feuilletage de Reeb sans être temps 1 d'un flot

## 4 Construction d'homéomorphismes et de flots de Reeb par recollement de translations

Le but de cette section est de donner un procédé général de construction explicite d'homéomorphismes et de flots de Reeb. Le plan muni du feuilletage de Reeb sera obtenu en recollant deux copies du plan muni du feuilletage trivial en droites horizontales. Plus précisément, nous allons donner un atlas du plan formé de deux cartes, et décrire l'application de changement de cartes. La figure 6 donne une idée de cette construction (qui est difficile à visualiser). Les homéomorphismes et flots de Reeb proviendront alors du recollement

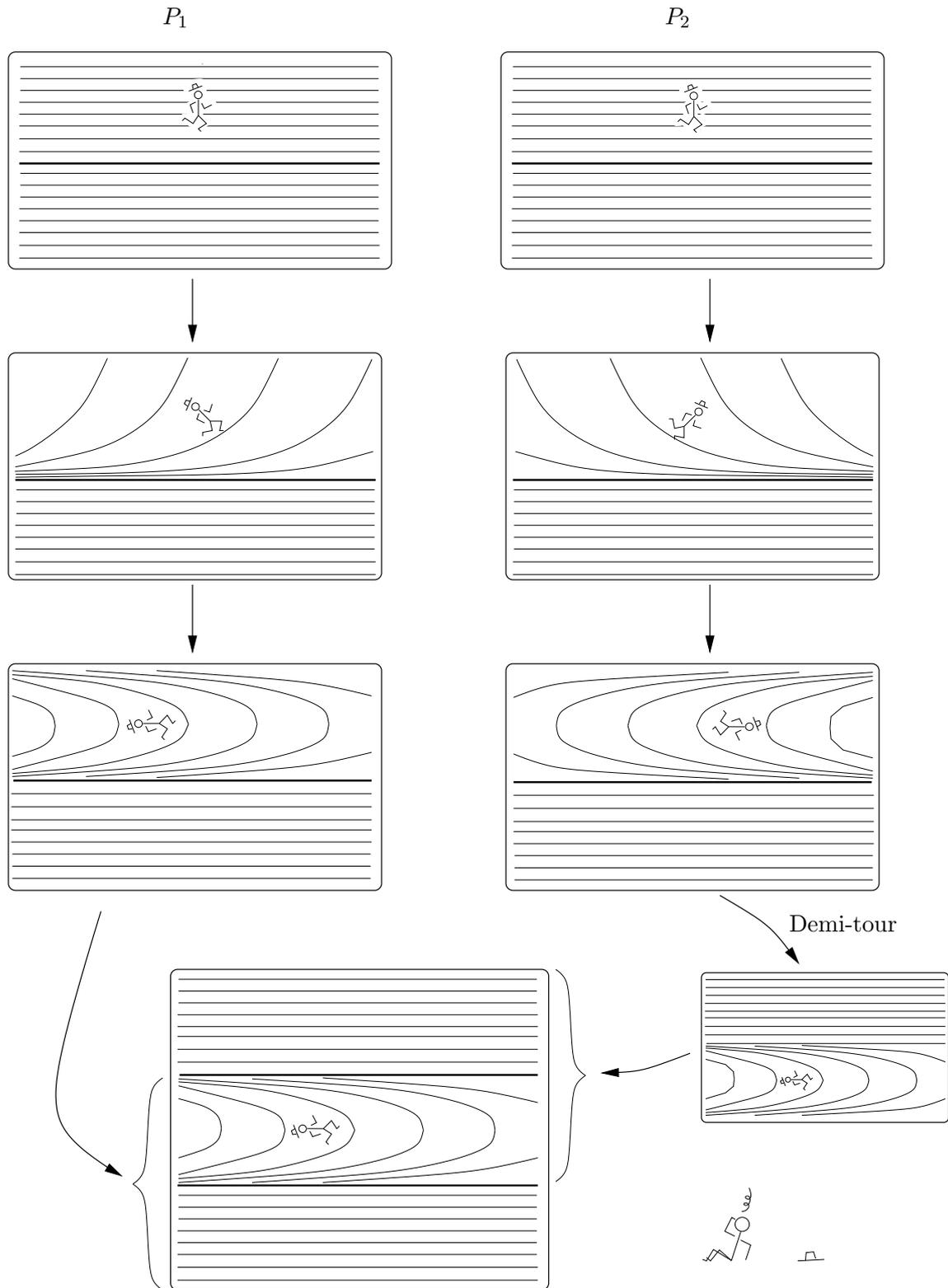


FIGURE 6 – L'idée de la construction du feuilletage de Reeb : on considère deux copies  $P_1, P_2$  du plan munies des feuilletages triviaux en droites horizontales... puis on déforme ces feuilletages pour pouvoir les recoller... et obtenir un feuilletage de Reeb

des translations horizontales (le long des feuilletages triviaux). Ce procédé a déjà été utilisé par Nakayama dans un cas particulier (voir [26] et notre introduction).

#### 4.1 Feuilletages, homéomorphismes et flots de Reeb

Pour la définition d'un feuilletage (topologique) du plan, voir [17].

L'espace des feuilles d'un feuilletage en droite du plan est une variété non-séparée, simplement connexe, de dimension 1 ([13]). Si on exclut la droite réelle, la plus simple des variétés non-séparées, simplement connexes, de dimension 1 est le *branchement simple* : on l'obtient en considérant deux copies  $R_1, R_2$  de la droite réelle, puis en identifiant le point  $y_1 \in R_1$  au point  $y_2 \in R_2$  pour  $y_1 = y_2 > 0$  (figure 7).

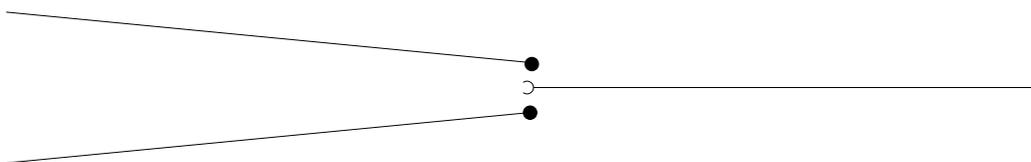


FIGURE 7 – Le branchement simple

**Définition 4.1** On appelle feuilletage de Reeb tout feuilletage (topologique) en droites du plan dont l'espace des feuilles est le branchement simple.

On voit très facilement que le feuilletage représenté à la figure 2 est bien un feuilletage de Reeb tel que défini ci-dessus. À équivalence topologique près, il n'existe qu'un seul feuilletage de Reeb (c'est-à-dire : si  $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$  sont deux feuilletages de Reeb, il existe un homéomorphisme  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  qui envoie les feuilles de  $\mathcal{F}$  sur celles de  $\mathcal{F}'$ , voir [10]).

**Définition 4.2** On dit qu'un homéomorphisme  $h$  préserve fortement un feuilletage  $\mathcal{F}$  si  $h$  laisse invariante chaque feuille de  $\mathcal{F}$ . On appelle homéomorphisme de Reeb tout homéomorphisme de Brouwer qui préserve fortement un feuilletage de Reeb. On appelle flot de Reeb tout flot du plan<sup>1</sup> dont les orbites sont les feuilles d'un feuilletage de Reeb.

**Remarque 4.3** Les orbites d'un flot du plan sont toujours les feuilles d'un feuilletage : voir [30].

**Remarque 4.4** Si  $h$  est un homéomorphisme de Reeb, et si  $h$  est le temps 1 d'un flot ( $h^t$ ), alors on voit facilement que ( $h^t$ ) est un flot de Reeb.

#### 4.2 Construction d'homéomorphismes de Reeb

On considère une copie  $P_1$  du plan  $\mathbb{R}^2$  et on note  $O_1 = \{(x, y) \in P_1 \mid y > 0\}$  le demi-plan supérieur ouvert de  $P_1$ . On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des fonctions continues  $f : O_1 \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifient les propriétés suivantes :

- (1) pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ , on a  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x_0, y) = -\infty$ ,
- (2) pour tout  $y_0 > 0$ , la fonction  $x \mapsto f(x, y_0)$  est un homéomorphisme croissant de  $\mathbb{R}$ ,
- (3) pour tout  $(x, y) \in O_1$ , on a l'égalité  $f(x + 1, y) = f(x, y) + 1$ .

À toute fonction  $f \in \mathcal{E}$ , nous allons associer un homéomorphisme de Reeb  $h_f$ .

<sup>1</sup>la définition d'un flot est donnée en 0.2.

On se fixe une fonction  $f \in \mathcal{E}$ . On considère une seconde copie  $P_2$  du plan, et on note  $O_2 = \{(x, y) \in P_2 \mid y > 0\}$  le demi-plan supérieur ouvert de  $P_2$ . La propriété (2) assure que l'application  $(x, y) \mapsto (f(x, y), y)$  est un homéomorphisme préservant l'orientation de  $O_1$  sur  $O_2$ . On note alors  $\mathbb{R}_f^2$  l'espace quotient obtenu en recollant  $P_1$  et  $P_2$  *via* cette application :

$$\mathbb{R}_f^2 = (P_1 \sqcup P_2) /_{(x,y) \sim (f(x,y), y)}.$$

On notera  $\pi_f$  la projection naturelle de  $P_1 \sqcup P_2$  sur  $\mathbb{R}_f^2$ .

FIGURE 8 – Le plan  $\mathbb{R}_f^2$ , le feuilletage de Reeb  $\mathcal{F}_f$ , et l'atlas  $\{(U_1, \varphi_{1,f}), (U_2, \varphi_{2,f})\}$

**Lemme 4.5** *L'espace topologique  $\mathbb{R}_f^2$  est homéomorphe au plan  $\mathbb{R}^2$ .*

**Preuve** D'après la classification des surfaces, il s'agit de vérifier que  $\mathbb{R}_f^2$  est une variété topologique séparée, possédant une base dénombrable d'ouverts, non-compacte, simplement connexe (voir, par exemple, [1, paragraphes I.44D et I.46A]).

Montrons rapidement la séparation. Soient  $M$  et  $N$  deux points de  $\mathbb{R}_f^2$ ; nous devons trouver un voisinage  $U$  de  $M$  dans  $\mathbb{R}_f^2$ , dont le complémentaire est un voisinage de  $N$ . Le seul cas délicat est le suivant :  $M$  est sur l'image par  $\pi_f$  de la frontière de  $O_1$  dans  $P_1$ , et  $N$  sur l'image de la frontière de  $O_2$  dans  $P_2$ . On peut alors prendre pour  $U$  l'image par  $\pi_f$  d'un demi-plan de  $P_1$  dont la frontière est une droite verticale. Grâce aux propriétés (1) et (2), le complémentaire de  $U$  est un voisinage de  $N$ .

L'application  $\pi_f$  induit un homéomorphisme de  $P_1$  sur  $\pi_f(P_1)$ , qui est ouvert dans  $\mathbb{R}_f^2$ ; même chose pour  $P_2$ . Ceci prouve que tout point de  $\mathbb{R}_f^2$  a un voisinage homéomorphe au plan :  $\mathbb{R}_f^2$  est donc une variété topologique.

La non-compactité, et l'existence d'une base dénombrable d'ouverts sont immédiates. Enfin, par construction, l'espace topologique  $\mathbb{R}_f^2$  est simplement connexe : en effet,  $\mathbb{R}_f^2$  est l'union de deux ouverts simplement connexes dont l'intersection est connexe (et on peut par exemple appliquer le théorème de Van Kampen).  $\triangle$

On notera  $U_{1,f} = \pi_f(P_1)$  et  $U_{2,f} = \pi_f(P_2)$ . La projection  $\pi_f$  réalise un homéomorphisme du plan  $P_1$  sur l'ouvert  $U_{1,f}$ ; on notera  $\varphi_{1,f}$  l'inverse de cet homéomorphisme. De même, la projection  $\pi_f$  réalise un homéomorphisme du plan  $P_2$  sur l'ouvert  $U_{2,f}$ , on notera  $\varphi_{2,f}$  l'inverse de cet homéomorphisme. Clairement, les cartes  $(U_{1,f}, \varphi_{1,f}), (U_{2,f}, \varphi_{2,f})$  forment un atlas de la variété topologique  $\mathbb{R}_f^2$  et le changement de cartes  $\varphi_{2,f} \circ \varphi_{1,f}^{-1}$  n'est autre que l'homéomorphisme  $(x, y) \mapsto (f(x, y), y)$  (voir figure 8).

Pour tout point  $P$  du plan  $\mathbb{R}_f^2$ , il sera commode de noter  $(x_1(P), y_1(P))$  et  $(x_2(P), y_2(P))$  les coordonnées du point  $P$  dans les cartes  $\varphi_{1,f}$  et  $\varphi_{2,f}$  (là où cela a un sens). Pour tout  $P \in U_{1,f} \cap U_{2,f}$ , on a alors  $x_2(P) = f(x_1(P), y_1(P))$  et  $y_2(P) = y_1(P)$ .

Soit  $\mathcal{F}_1$  le feuilletage en droites ( $y_1 = \text{constante}$ ) du plan  $P_1$ , et  $\mathcal{F}_2$  le feuilletage en droites ( $y_2 = \text{constante}$ ) du plan  $P_2$ . Ces deux feuilletages passent au quotient en un feuilletage en droites du plan  $\mathbb{R}_f^2$  que l'on notera  $\mathcal{F}_f$ .

**Lemme 4.6** *L'espace des feuilles de  $\mathcal{F}_f$  est le branchement simple :  $\mathcal{F}_f$  est un feuilletage de Reeb.*

**Preuve** L'espace des feuilles de  $\mathcal{F}_1$  est une copie de  $\mathbb{R}$ , paramétrée par la coordonnée  $y_1$ . L'espace des feuilles de  $\mathcal{F}_2$  est une copie de  $\mathbb{R}$ , paramétrée par la coordonnée  $y_2$ . La projection

$\pi_f$  identifie la feuille de  $\mathcal{F}_1$  d'ordonnée  $y_1$  à la feuille de  $\mathcal{F}_2$  d'ordonnée  $y_2$  pour  $y_1 = y_2 > 0$ . Ceci montre que l'espace des feuilles de  $\mathcal{F}$  est le branchement simple.  $\triangle$

Les deux feuilles non-séparées du feuilletage  $\mathcal{F}_f$  sont les projections des droites d'équations  $(y_1 = 0)$  et  $(y_2 = 0)$  des plans  $P_1$  et  $P_2$ ; on les notera respectivement  $\Delta_{1,f}$  et  $\Delta_{2,f}$ .

Considérons les translations :

$$\begin{array}{ccc} \tau_1 : P_1 & \longrightarrow & P_1 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 1, y) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \tau_2 : P_2 & \longrightarrow & P_2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 1, y). \end{array}$$

Grâce à la propriété (3), le changement de cartes entre les deux demi-plans  $O_1$  et  $O_2$  conjugue ces deux translations; autrement dit, les homéomorphismes  $\varphi_{1,f}^{-1} \circ \tau_1 \circ \varphi_{1,f} : U_{1,f} \rightarrow U_{1,f}$  et  $\varphi_{2,f}^{-1} \circ \tau_2 \circ \varphi_{2,f} : U_{2,f} \rightarrow U_{2,f}$  coïncident sur  $U_{1,f} \cap U_{2,f}$ . Par suite, ces deux homéomorphismes se recollent en un homéomorphisme  $h_f : \mathbb{R}_f^2 \rightarrow \mathbb{R}_f^2$ . Par construction, l'homéomorphisme  $h_f$  ne fixe aucun point et préserve l'orientation : c'est donc un homéomorphisme de Brouwer. De plus, il laisse invariante chaque feuille du feuilletage de Reeb  $\mathcal{F}_f$  : c'est donc un homéomorphisme de Reeb.

On notera que les ouverts  $U_{1,f}$  et  $U_{2,f}$  sont invariants par  $h_f$ , et qu'on a les relations  $\varphi_{1,f} \circ h_f \circ \varphi_{1,f}^{-1} = \tau_1$  et  $\varphi_{2,f} \circ h_f \circ \varphi_{2,f}^{-1} = \tau_2$ .

Nous terminons par la description de l'ensemble singulier :

**Lemme 4.7** *L'ensemble singulier de  $h_f$  est  $\Delta_{1,f} \times \Delta_{2,f}$ .*

La preuve est laissée au lecteur.

En fait, on peut montrer (mais nous n'en aurons pas besoin) que le procédé de construction décrit ci-dessus permet d'obtenir un représentant de chaque classe de conjugaison d'homéomorphismes de Reeb (c'est-à-dire : pour tout homéomorphisme de Reeb  $h$ , il existe une fonction  $f \in \mathcal{E}$  telle que les homéomorphismes  $h$  et  $h_f$  sont conjugués).

### 4.3 Construction de flots de Reeb

On note  $\mathcal{E}_0$  le sous-ensemble de  $\mathcal{E}$  constitué des fonctions  $f : O_1 \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifient les propriétés (1), (2), ainsi que la propriété (3') suivante :

(3') pour tout  $(x, y) \in O_1$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a l'égalité  $f(x + t, y) = f(x, y) + t$ .

Nous allons vérifier que, pour toute fonction  $f \in \mathcal{E}_0$ , l'homéomorphisme de Reeb  $h_f$  défini précédemment est le temps 1 d'un flot de Reeb.

Considérons, en effet, les flots de translation  $(\tau_1^t)_{t \in \mathbb{R}}$  et  $(\tau_2^t)_{t \in \mathbb{R}}$  définis par :

$$\begin{array}{ccc} \tau_1^t : P_1 & \longrightarrow & P_1 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + t, y) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \tau_2^t : P_2 & \longrightarrow & P_2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + t, y). \end{array}$$

Grâce à la propriété (3'), le changement de cartes conjugue ces deux flots; autrement dit, quel que soit le réel  $t$ , les homéomorphismes  $\varphi_{1,f}^{-1} \circ \tau_1^t \circ \varphi_{1,f}$  et  $\varphi_{2,f}^{-1} \circ \tau_2^t \circ \varphi_{2,f}$  coïncident sur  $U_{1,f} \cap U_{2,f}$ . Par conséquent, les homéomorphismes  $\varphi_{1,f}^{-1} \circ \tau_1^t \circ \varphi_{1,f}$  et  $\varphi_{2,f}^{-1} \circ \tau_2^t \circ \varphi_{2,f}$  se recollent en un homéomorphisme  $h_f^t : \mathbb{R}_f^2 \rightarrow \mathbb{R}_f^2$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Par construction,  $(h_f^t)_{t \in \mathbb{R}}$  est un flot de Reeb dont les orbites sont les feuilles du feuilletage  $\mathcal{F}_f$ . De plus, on a  $h_f^1 = h_f$ .

## 5 Ensemble oscillant d'un homéomorphisme de Reeb

Dans cette partie, on se donne une fonction  $f \in \mathcal{E}$ . Nous voulons déterminer (au moins partiellement) l'ensemble oscillant de l'homéomorphisme  $h_f$ . Plus précisément, rappelons que l'ensemble  $\text{Osc}(h_f)$  est inclus dans l'ensemble  $\text{Sing}(h_f) = \Delta_{1,f} \times \Delta_{2,f}$ ; notre but est alors :

*Étant donné un couple de points  $(M, N) \in \Delta_{1,f} \times \Delta_{2,f}$ , trouver des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour que  $(M, N)$  soit oscillant.*

Comme il n'y aura aucune ambiguïté, on notera, dans cette section,  $h = h_f$ ,  $\Delta_1 = \Delta_{1,f}$ ,  $\Delta_2 = \Delta_{2,f}$ ,  $\varphi_1 = \varphi_{1,f}$  et  $\varphi_2 = \varphi_{2,f}$ .

### 5.1 Un critère d'absence d'oscillation

Considérons un point  $M \in \Delta_1$ . On rappelle que l'abscisse de  $M$  dans la carte  $\varphi_1$  est notée  $x_1(M)$ . D'autre part, on notera  $f_{x_1(M)} : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f_{x_1(M)}(y) = f(x_1(M), y)$ . Il existe une propriété très simple interdisant l'oscillation :

**Proposition 5.1** *Supposons que la fonction  $f_{x_1(M)}$  soit croissante. Alors, quel que soit le point  $N$  de  $\Delta_2$ , le couple  $(M, N)$  n'est pas oscillant pour l'homéomorphisme  $h_f$ .*

**Preuve de la proposition 5.1** Fixons un point  $N$  de  $\Delta_2$ . Pour montrer que le couple  $(M, N)$  n'est pas oscillant, il suffit d'exhiber un arc  $c_0$ , germant en  $M$ , dont le germe n'est pas indifférent à  $N$ , et qui n'oscille pas au voisinage de  $N$ .

Notons  $c_0$  l'arc "vertical" qui germe en  $M$ , c'est-à-dire l'application  $c_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_f^2$  tel que, pour tout  $s$ , les coordonnées du point  $c_0(s)$  dans la carte  $\varphi_1$  sont  $(x_1(M), s)$ . Pour tout  $s \neq 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , le point  $h^n(c_0(s))$  appartient alors à l'ouvert  $U_2$ , et ses coordonnées dans la carte  $\varphi_2$  sont  $(f_{x_1(M)}(s) + n, s)$ . Il est clair que le germe de  $c_0$  n'est pas indifférent à  $N$ .

La croissance de la fonction  $f_{x_1(M)}$  implique alors facilement que la famille d'arcs  $(h^n(c_0))_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie les quatre propriétés équivalentes de la proposition 3.3 : par exemple, la figure 9 représente (dans la carte  $\varphi_2$ ) un voisinage  $W$  de  $N$ , arbitrairement petit, qui a une intersection connexe avec les arcs  $h^n(c_0)$  pour tout  $n$ , ce qui montre que la propriété 2 est vérifiée.  $\triangle$

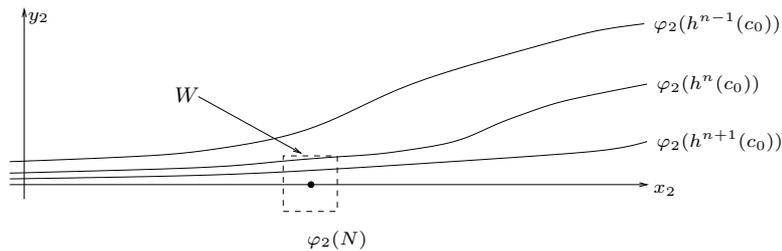


FIGURE 9 – Allure de la courbe  $h^{n_k}(c_0)$  (d'équation  $x_2 = f_{x_1(M)}(y_2) + n$  dans la carte  $\varphi_2$ ) lorsque la fonction  $f_{x_1(M)}$  est croissante

### 5.2 Énoncés de critères d'oscillation

On doit maintenant s'atteler à la tâche plus délicate de trouver des conditions qui entraînent l'oscillation d'un couple  $(M, N)$ , c'est-à-dire l'oscillation de *tout* arc germant en  $M$  (et de germe non indifférent à  $N$ ).

On procède comme suit. Dans un premier temps, on impose à la fonction  $f_{x_1(M)}$  l'existence d'une infinité de "défauts de croissance", appelés *valeurs  $\varepsilon$ -singulières*, de tailles minorées. Ces "défauts de croissance" forcent l'arc "vertical"  $c_0$  (utilisé dans la preuve de la proposition 5.1) à osciller. Dans un deuxième temps, une hypothèse d'équi-continuité de la fonction  $f$  obligera tout arc suffisamment proche de l'arc  $c_0$  à osciller de concert. Remarquons que si la première condition est quasiment nécessaire pour que le couple  $(M, N)$  soit oscillant, c'est loin d'être le cas pour la deuxième.

On donne ici les définitions et les énoncés correspondant à ces idées ; les preuves seront effectuées dans la sous-section 5.3.

On fixe un point  $M$  sur la feuille singulière  $\Delta_1$ .

**Définition 5.2** *Un réel  $x_2$  est une valeur  $\varepsilon$ -singulière de la fonction  $f_{x_1(M)}$  s'il existe deux nombres réels  $y^-, y^+$  tels que  $0 < y^- < y^+$ , et tels que*

$$\begin{aligned} f_{x_1(M)}(y^-) &= x_2 + \varepsilon \\ f_{x_1(M)}(y^+) &= x_2 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Moralement, un réel  $x_2$  est une valeur  $\varepsilon$ -singulière de la fonction  $f_{x_1(M)}$  si le graphe de cette fonction fait un "zigzag" d'amplitude supérieure à  $2\varepsilon$  au-dessus du point de coordonnées  $(x_2, 0)$  (figure 10).

FIGURE 10 – L'allure du graphe de la fonction  $f_{x_1(M)}$  quand  $x_2$  est une valeur  $\varepsilon$ -singulière

**Définition 5.3** *On dira que la fonction  $f$  est équi-continue si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $y > 0$  et tous  $x$  et  $x'$ , si  $|x - x'| < \delta$ , alors  $|f(x, y) - f(x', y)| < \varepsilon$ .*

Autrement dit, la fonction  $f$  est équi-continue si le module de continuité de l'homéomorphisme  $x \mapsto f(x, y)$  est borné indépendamment de la valeur de  $y$ . On peut alors énoncer un premier critère d'oscillation :

**Proposition 5.4** *Soit  $N$  un point de  $\Delta_2$ . On suppose que la fonction  $f$  est équi-continue. On suppose, par ailleurs, qu'il existe un réel  $\varepsilon_0 > 0$ , et une suite d'entiers  $n_1, n_2, n_3, \dots$  tendant vers  $+\infty$  telle que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , le réel  $x_2(N) - n_k$  est une valeur  $\varepsilon_0$ -singulière de la fonction  $f_{x_1(M)}$ .*

*Alors le couple  $(M, N)$  est oscillant pour l'homéomorphisme  $h$ .*

Enfin, voici une manière agréable de détecter des valeurs  $\varepsilon$ -singulières :

**Définition 5.5** (figure 11) *Nous appellerons défaut de croissance asymptotique de la fonction  $f_{x_1(M)}$  la quantité*

$$\mathcal{A}(f_{x_1(M)}) = \limsup_{y^+, y^- \rightarrow 0} \{f_{x_1(M)}(y^-) - f_{x_1(M)}(y^+) \mid 0 < y^- < y^+\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

**Lemme 5.6** *Supposons  $\mathcal{A}(f_{x_1(M)}) > 4\varepsilon_0$ . Alors il existe un réel  $x_2$  et une suite d'entiers  $n_1, n_2, n_3, \dots$  tendant vers  $+\infty$  telle que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , le réel  $x_2 - n_k$  est une valeur  $\varepsilon_0$ -singulière de la fonction  $f_{x_1(M)}$ .*

En mettant bout à bout le lemme 5.6 et la proposition 5.4, on obtient immédiatement la proposition suivante :

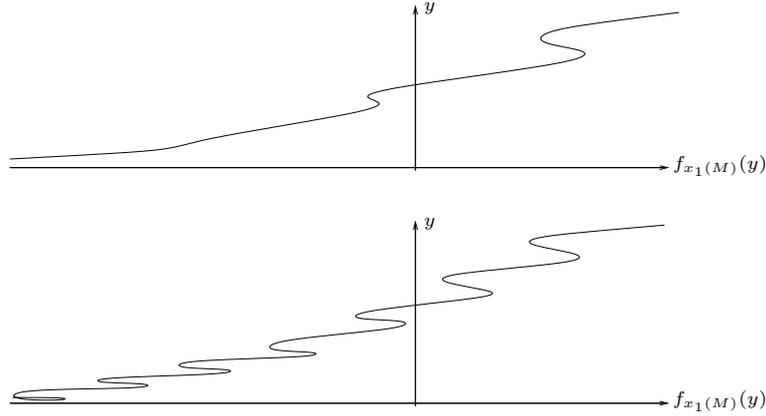


FIGURE 11 – L’allure du graphe de la fonction  $f_{x_1(M)}$  : en haut quand  $\mathcal{A}(f_{x_1(M)})$  est nul ; en bas quand  $\mathcal{A}(f_{x_1(M)})$  est un réel strictement positif

**Proposition 5.7** *Supposons que la fonction  $f$  est équi-continue et que le défaut de croissance asymptotique de la fonction  $f_{x_1(M)}$  est non-nul. Alors, il existe un point  $N$  sur la droite  $\Delta_2$  tel que le couple  $(M, N)$  est oscillant.*

### 5.3 Preuves des critères d’oscillation

Sous les hypothèses de la proposition 5.4, l’équi-continuité de la fonction  $f$  nous fournit un réel  $\delta_0 > 0$  tel que, pour tout  $y > 0$ , si  $|x_1 - x'_1| < \delta_0$  alors  $|f(x_1, y) - f(x'_1, y)| < \varepsilon_0/10$ . Le lemme suivant constitue le cœur de la preuve de la proposition 5.4 :

**Lemme 5.8** *On se place sous les hypothèses de la proposition 5.4. On note  $T_{\delta_0}$  le tube décrit dans la carte  $\varphi_1$  par  $\varphi_1(T_{\delta_0}) = \{(x_1, y_1) \in P_1 \mid y_1 > 0 \text{ et } x_1(M) - \delta_0 < x_1 < x_1(M) + \delta_0\}$ .*

*On considère un arc  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_f^2$  tel que  $c(0)$  est un point de  $\Delta_1$  (éventuellement différent de  $M$ ), et  $c(]0, 1])$  est inclus dans le tube  $T_{\delta_0}$  (voir figure 12).*

*Alors l’arc  $c$  oscille au voisinage du point  $N$ .*

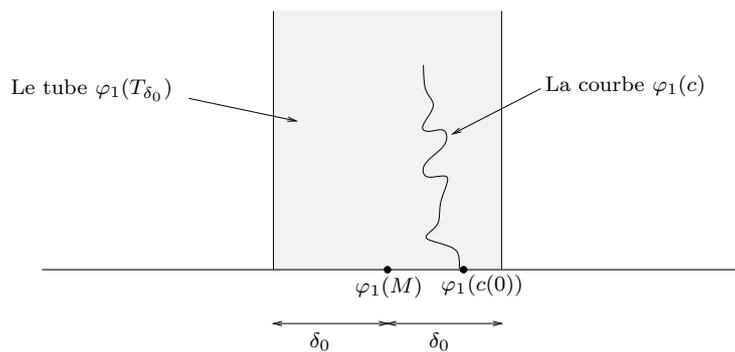


FIGURE 12 – Une courbe  $c$  qui satisfait l’hypothèse du lemme 5.8, vue dans la carte  $\varphi_1$

### Preuve du lemme 5.8

**Schéma de la preuve** La preuve est divisée en trois étapes.

Notons  $c_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_f^2$  l’arc “vertical” qui germe en  $M$  (pour tout  $s$ , le point  $c_0(s)$  a pour coordonnées  $(x_1(M), s)$  dans la carte  $\varphi_1$ ). La première étape de la preuve utilise l’hypothèse

“ $x_2(N) - n_k$  est une valeur  $\varepsilon$ -singulière de la fonction  $f_{x_1}(M)$ ”. Cette hypothèse nous indique que, pour tout entier  $k$ , l’arc  $h^{n_k}(c_0)$  fait un “zigzag” d’amplitude supérieure à  $2\varepsilon_0$  au-dessus du point de coordonnées  $(x_2(N), 0)$  (dans la carte  $\varphi_2$ ).

À la deuxième étape de la preuve, on utilise l’équi-continuité de la fonction  $f$ . De la première étape et de l’équi-continuité, on déduit que, pour tout  $k$ , l’arc  $h^{n_k}(c)$  fait un “zigzag” d’amplitude supérieure à  $2\frac{9\varepsilon_0}{10}$  au-dessus du point de coordonnées  $(x_2(N), 0)$  (dans la carte  $\varphi_2$ ).

Enfin, à la troisième étape de la preuve, on montre que l’existence de tels “zigzags” empêche la suite d’arcs  $(h^n(c))_{n \in \mathbb{N}}$  d’être équi-localement connexe au voisinage du point  $N$ .

**Première étape** Par hypothèse, les réels  $x_2(N) - n_k$  sont des valeurs  $\varepsilon_0$ -singulières de la fonction  $f_{x_1(M)}$ . Par conséquent, il existe deux suites de nombres réels  $(y_k^-)$  et  $(y_k^+)$  telles que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$y_k^- < y_k^+ \quad f(x_1(M), y_k^+) = x_2(N) - n_k - \varepsilon_0 \quad f(x_1(M), y_k^-) = x_2(N) - n_k + \varepsilon_0.$$

On note  $O_k$  le point de  $\mathbb{R}_f^2$  dont les coordonnées dans la carte  $\varphi_1$  sont  $(x_1(M), y_k^+)$ ; dans la carte  $\varphi_2$ , les coordonnées du point  $h^{n_k}(O_k)$  sont alors  $(x_2(N) - \varepsilon_0, y_k^+)$ . De même, on note  $Q_k$  le point de  $\mathbb{R}_f^2$  dont les coordonnées dans la carte  $\varphi_1$  sont  $(x_1(M), y_k^-)$ ; dans la carte  $\varphi_2$  les coordonnées du point  $h^{n_k}(Q_k)$  sont alors  $(x_2(N) + \varepsilon_0, y_k^-)$  (voir figure 13).

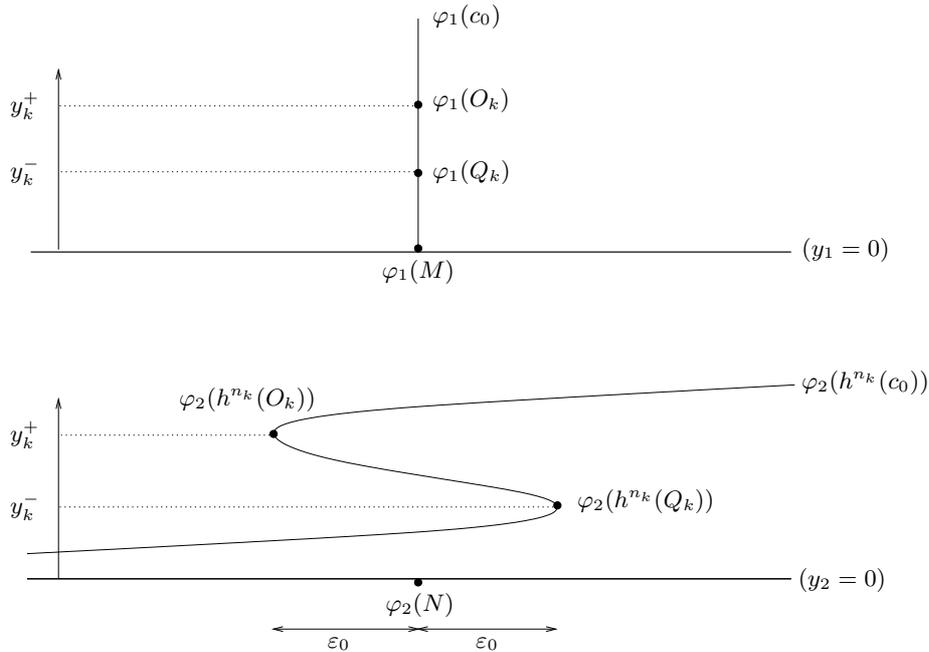


FIGURE 13 – En haut, les points  $O_k$  et  $Q_k$ , vus dans la carte  $\varphi_1$ . En bas, les points  $h^{n_k}(O_k)$  et  $h^{n_k}(Q_k)$ , vus dans la carte  $\varphi_2$

La suite  $(n_k)$  tend vers  $+\infty$ . Par conséquent, si le couple  $(M', N')$  est une valeur d’adhérence (dans  $(\mathbb{R}_f^2)^2$ ) de la suite  $(O_k, h^{n_k}(O_k))$ , alors c’est un couple singulier, et donc  $M' \in \Delta_1$ . Ceci montre que la suite  $(y_k^+)_{k \in \mathbb{N}}$  des ordonnées des points  $(O_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tend vers 0. On en déduit que la suite  $(y_k^-)_{k \in \mathbb{N}}$  tend également vers 0.

**Deuxième étape** Par hypothèse, on a  $y(c(1)) > 0$ . D’autre part, la suite  $(y_k^+)$  tend vers 0 (voir ci-dessus). Quitte à extraire, on peut donc supposer  $y^+(k) < y(c(1))$  pour tout entier

positif  $k$ . On a alors  $y(c(0)) = 0 < y_k^+ < y(c(1))$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un point  $O'_k$  sur l'arc  $c$  tel que  $y(O'_k) = y_k^+$  (voir figure 14).

De même, comme  $0 < y_k^- < y_k^+$ , il existe un point  $Q'_k$  d'ordonnée  $y_k^-$  dans le sous-arc  $[c(0)P'_k]_c$ .

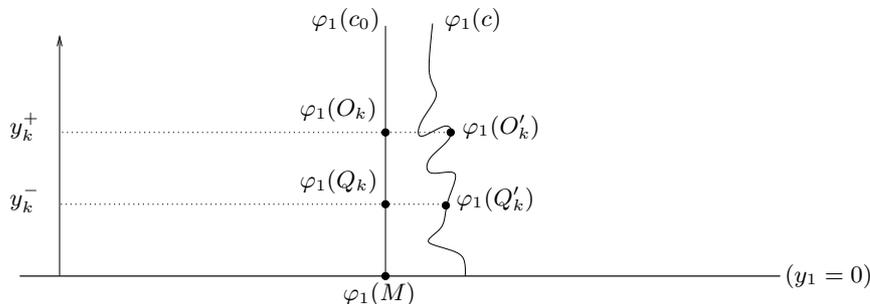


FIGURE 14 – Les points  $O_k, Q_k$  et  $O'_k, Q'_k$ , vus dans la carte  $\varphi_1$

Puisque l'arc  $c$  est inclus dans le tube  $T_{\delta_0}$ , et que  $x_1(O_k) = x_1(M)$ , on a

$$|x_1(O'_k) - x_1(O_k)| < \delta_0.$$

Comme  $x_2(O'_k) = f(x_1(O'_k), y_k^+)$ , l'équi-continuité entraîne alors

$$|x_2(O'_k) - x_2(O_k)| < \frac{\varepsilon_0}{10}.$$

Puisque  $h$  agit, dans la carte  $\varphi_2$ , par la translation  $(x_2, y_2) \mapsto (x_2 + 1, y_2)$ , on a encore

$$|x_2(h^{n_k}(O'_k)) - x_2(h^{n_k}(O_k))| < \frac{\varepsilon_0}{10},$$

et comme  $x_2(h^{n_k}(O_k)) = x_2(N) - \varepsilon_0$ , on en déduit (voir figure 15)

$$x_2(h^{n_k}(O'_k)) < x_2(N) - \frac{9\varepsilon_0}{10}.$$

De la même manière, on montre que

$$x_2(h^{n_k}(Q'_k)) > x_2(N) + \frac{9\varepsilon_0}{10}.$$

**Troisième étape** Des deux dernières inégalités ci-dessus, on déduit tout d'abord l'existence d'un point  $P'_k$  sur le sous-arc  $[O'_k Q'_k]_c$  tel que  $x_2(h^{n_k}(P'_k)) = x_2(N)$ .

D'autre part, on a  $\lim_{s \rightarrow 0} x_2(c(s)) = -\infty$  : ceci découle de la position de l'arc  $c$  (plus précisément,  $c([0, 1]) \subset T_{\delta_0}$  et  $y(c(0)) = 0$ ) et des propriétés du changement de carte ( $\lim_{y \rightarrow 0} f(x_2(M) + \delta_0, y) = -\infty$  et  $x \mapsto f(x, y)$  est croissante). Il existe donc aussi un point  $R'_k$  sur le sous-arc  $[Q'_k c(0)]_c$  tel que  $x_2(h^{n_k}(R'_k)) = x_2(N)$ .

On a

$$y(h^{n_k}(P'_k)) = y(P'_k) < y(O'_k) = y_k^+ \quad \text{et} \quad x_2(h^{n_k}(P'_k)) = x_2(N).$$

Comme la suite  $(y_k^+)$  tend vers 0, la suite  $(h^{n_k}(P'_k))_{k \in \mathbb{N}}$  tend vers  $N$ . La suite  $(h^{n_k}(R'_k))_{k \in \mathbb{N}}$  également. Pour tout  $k$ , on a  $h^{n_k}(Q'_k) \in [h^{n_k}(P'_k)h^{n_k}(R'_k)]_{h^{n_k}(c)}$ , mais  $x_2(h^{n_k}(Q'_k)) > x_2(N) + 9\varepsilon_0/10$ , donc la suite  $(h^{n_k}(Q'_k))_{k \in \mathbb{N}}$  ne peut pas tendre vers  $N$ . La suite d'arc  $(h^n(c))$  ne possède donc pas la propriété 3 de la proposition 3.3 (version séquentielle de l'équi-locale connexité) ; autrement dit, l'arc  $c$  oscille au voisinage du point  $N$ .  $\triangle$

**Preuve de la proposition 5.4** Soit  $c$  un arc qui germe en  $M$ . On doit prouver la propriété suivante : si le germe de  $c$  n'est pas indifférent à  $N$ , alors  $c$  oscille au voisinage de  $N$ .

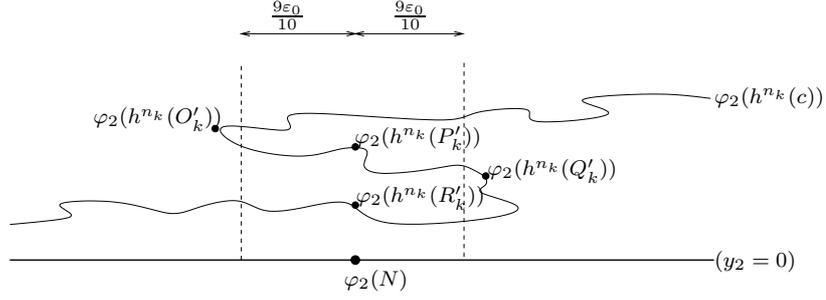


FIGURE 15 – Les points  $h^{n_k}(O'_k)$ ,  $h^{n_k}(P'_k)$ ,  $h^{n_k}(Q'_k)$  et  $h^{n_k}(R'_k)$ , vus dans la carte  $\varphi_2$

**Premier type d'arcs** *Supposons qu'il existe un réel  $b > 0$  tel que le sous-arc  $c([0, b[)$  est disjoint de l'ouvert  $U_2$  (figure 16, gauche). Alors, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , l'arc  $h^n(c([0, b[))$  est également disjoint de l'ouvert  $U_2$  (car l'homéomorphisme  $h$  laisse invariant l'ouvert  $U_2$ ). Puisque  $U_2$  est un voisinage de  $N$ , il en résulte que le germe de  $c$  est indifférent à  $N$ .*

**Second type d'arcs** *Supposons au contraire qu'on peut trouver un réel  $b > 0$  arbitrairement petit, tel que le point  $c(b)$  est dans l'ouvert  $U_2$  (figure 16, droite). Dans ce cas, il existe un sous-arc  $c'$  de  $c$  vérifiant les hypothèses du lemme 5.8 (voir figure 12). Ce lemme montre alors que l'arc  $c'$  oscille au voisinage du point  $N$ . A fortiori, l'arc  $c$  oscille au voisinage de  $N$ .  $\triangle$*

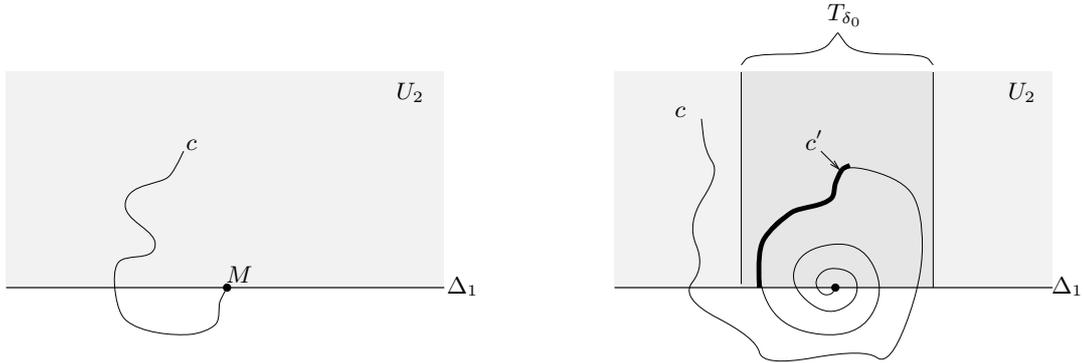


FIGURE 16 – Les deux types d'arcs étudiés dans la preuve de la proposition 5.4

**Preuve du lemme 5.6** Puisque  $\mathcal{A}(f_{x_1}) > 4\varepsilon_0$ , il existe deux suites de réels positifs  $(y_k^+)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(y_k^-)_{k \in \mathbb{N}}$ , convergeant vers 0, telles que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$\begin{cases} y_k^- < y_k^+ \\ f(x_1, y_k^+) = f(x_1, y_k^-) + 4\varepsilon_0. \end{cases}$$

Soit  $x_2$  une valeur d'adhérence de la suite des parties fractionnaires de  $f(x_1, y_k^-) + 2\varepsilon_0$ . En utilisant le fait que  $f_{x_1}(y_k^-)$  tend vers  $-\infty$ , on voit facilement que  $x_2$  vérifie la conclusion du lemme.  $\triangle$

## 5.4 Cas des flots de Reeb

Pour montrer le point 3 du théorème 1, on devra comparer les ensembles oscillants des temps 1 et 2 d'un même flot de Reeb. Pour ce faire, on utilisera de légères adaptations des propositions 5.1 et 5.4.

On suppose maintenant que la fonction  $f$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{E}_0$  (défini à la section 4.3). Rappelons qu'on peut alors associer un flot de Reeb  $(h^t)_{t \in \mathbb{R}} = (h_f^t)_{t \in \mathbb{R}}$  à la fonction  $f$ .

La première chose à remarquer est que la fonction  $f$  est nécessairement de la forme  $f(x, y) = x + \tilde{f}(y)$ , et que, par suite, la fonction  $f$  est automatiquement équi-continue (au sens de la définition 5.3).

On considère alors un couple de points  $(M, N) \in \Delta_1 \times \Delta_2$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et tout  $\eta > 0$ , on note  $D(x_2(N), t, \eta) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [x_2(N) + kt - \eta, x_2(N) + kt + \eta]$ .

Les preuves des propositions 5.9 et 5.10 ci-dessous sont exactement les mêmes que les preuves respectivement des propositions 5.1 et 5.4 :

**Proposition 5.9** *Fixons un réel  $t$ , et supposons qu'il existe  $\eta > 0$  tel que la fonction  $f_{x_1(M)}$  est croissante en restriction à l'ensemble  $f_{x_1(M)}^{-1}(D(x_2(N), t, \eta))$ . Alors le couple  $(M, N)$  n'est pas oscillant pour l'homéomorphisme de Reeb  $h^t$ .*

**Proposition 5.10** *Fixons un réel  $t$ . Supposons, par ailleurs, qu'il existe un réel  $\varepsilon_0 > 0$ , et une suite d'entiers  $n_1, n_2, n_3, \dots$  tendant vers  $+\infty$  telle que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , le réel  $x_2(N) - n_k \cdot t$  est une valeur  $\varepsilon_0$ -singulière de la fonction  $f_{x_1(M)}$ .*

*Alors, le couple  $(M, N)$  est un couple de points oscillant pour l'homéomorphisme  $h^t$ .*

## 6 Une infinité (non-dénombrable) de classes de conjugaison d'homéomorphismes de Reeb

Le but de cette section est de montrer l'affirmation 1 du théorème 1. Pour ce faire, notons  $\mathcal{T}$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , positives ou nulles, de classe  $C^\infty$ , 1-périodiques, et  $\frac{1}{2}$ -lipschitziennes. Notons ensuite  $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$  l'ensemble des fonctions de la forme

$$\begin{aligned} f_\theta &: O_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x - \frac{1}{y} + \theta(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{y^2}\right) \end{aligned}$$

où  $\theta$  est une fonction appartenant à  $\mathcal{T}$ . On vérifie facilement que  $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{E}$  et que toutes les fonctions de  $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$  sont équi-continues (au sens de la définition 5.3).

Considérons une fonction  $\theta \in \mathcal{T}$ . Rappelons que l'ensemble oscillant  $\text{Osc}(h_{f_\theta})$  est inclus dans l'ensemble singulier  $\text{Sing}(h_{f_\theta}) = \Delta_{1, f_\theta} \times \Delta_{2, f_\theta}$ . On note alors  $\text{Osc}_1(h_{f_\theta})$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  défini comme suit :

*Soit  $x_1 \in \mathbb{R}$ . On note  $M_{x_1}$  le point de la droite  $\Delta_{1, f_\theta}$  qui a pour abscisse  $x_1$  dans la carte  $\varphi_{1, f_\theta}$ . Le réel  $x_1$  appartient à l'ensemble  $\text{Osc}_1(h_{f_\theta})$  si et seulement si il existe un point  $N$  sur la droite  $\Delta_{2, f_\theta}$  tel que le couple  $(M_{x_1}, N)$  est oscillant.*

**Remarque 6.1** Rappelons que, pour tout réel  $x_1$ , la notation  $\mathcal{A}(f_{\theta, x_1})$  désigne le défaut de croissance asymptotique de la fonction  $y \mapsto f_\theta(x_1, y)$  (défini dans la partie précédente). Les propositions 5.1 et 5.7 se traduisent comme suit :

- si la fonction  $f_{\theta, x_1}$  est croissante, alors  $x_1 \notin \text{Osc}_1(h_{f_\theta})$ ,
- si  $\mathcal{A}(f_{\theta, x_1})$  est strictement positif, alors  $x_1 \in \text{Osc}_1(h_{f_\theta})$ ,

On note  $\text{Supp}(\theta)$  le support ouvert de la fonction  $\theta$ , c'est-à-dire  $\text{Supp}(\theta) = \mathbb{R} \setminus \theta^{-1}(\{0\})$ .

**Proposition 6.2** *Considérons une fonction  $\theta \in \mathcal{T}$ . Alors, on a  $\text{Osc}_1(h_{f_\theta}) = \text{Supp}(\theta)$ .*

**Preuve** En étudiant les variations de la fonction  $y \mapsto f_\theta(x_1, y)$ , on prouve très facilement l'égalité  $\mathcal{A}(f_{\theta, x_1}) = 2\theta(x_1)$ . En particulier, si  $x_1 \in \text{Supp}(\theta)$ , alors  $\mathcal{A}(f_{\theta, x_1})$  est strictement positif. Par ailleurs, si  $x_1 \notin \text{Supp}(\theta)$ , la fonction  $f_{\theta, x_1}$  est clairement croissante. Il suffit alors d'appliquer la remarque 6.1 ci-dessus pour terminer la preuve.  $\triangle$

**Corollaire 6.3** *Considérons maintenant deux fonctions  $\theta, \theta' \in \mathcal{T}$ , et supposons qu'il existe un homéomorphisme  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  qui conjugue  $h_{f_\theta}$  à  $h_{f_{\theta'}}$ . Alors, il existe un homéomorphisme  $\hat{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\hat{g}(\text{Supp}(\theta)) = \text{Supp}(\theta')$ .*

**Preuve** Considérons un homéomorphisme  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  qui conjugue  $h_{f_\theta}$  à  $h_{f_{\theta'}}$ . Alors,  $g$  envoie  $\Delta_{1, f_\theta}$  sur  $\Delta_{1, f_{\theta'}}$ . Par suite, l'homéomorphisme  $\varphi_{1, f_{\theta'}} \circ g \circ \varphi_{1, f_\theta}^{-1} : P_1 \rightarrow P_1$  préserve l'axe des abscisses ( $y_1 = 0$ ). On notera  $\hat{g}$  la restriction de l'homéomorphisme  $\varphi_{1, f_{\theta'}} \circ g \circ \varphi_{1, f_\theta}^{-1}$  à l'axe ( $y_1 = 0$ ), et on considérera  $\hat{g}$  comme un homéomorphisme de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  en oubliant la coordonnée nulle  $y_1$ .

L'homéomorphisme  $g$  envoie l'ensemble  $\text{Osc}(h_{f_\theta})$  sur l'ensemble  $\text{Osc}(h_{f_{\theta'}})$ . Par suite, l'homéomorphisme  $\hat{g}$  envoie l'ensemble  $\text{Osc}_1(h_{f_\theta})$  sur l'ensemble  $\text{Osc}_1(h_{f_{\theta'}})$ . En utilisant la proposition 6.2, on en déduit que  $\hat{g}$  envoie  $\text{Supp}(\theta)$  sur  $\text{Supp}(\theta')$ .  $\triangle$

**Preuve de l'affirmation 1 du théorème 1** La preuve repose sur le corollaire 6.3, et sur l'existence d'une famille non-dénombrables de fermés de  $\mathbb{R}$  invariants par la translation  $\tau : x \mapsto x + 1$ , tels que deux éléments distincts de cette famille ne sont jamais images l'un de l'autre par un homéomorphisme de  $\mathbb{R}$ .

Plus précisément, on note  $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$  (on rappelle que  $\Sigma$  est non-dénombrable). À tout élément  $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  de  $\Sigma$ , on associe le fermé  $F_\varepsilon \subset [0, 1]$ , défini par :

$$F_\varepsilon = \{0\} \cup \left( \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2^n} - \frac{\varepsilon_n}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^n} + \frac{\varepsilon_n}{2^{n+2}} \right] \right)$$

puis le fermé  $\widetilde{F}_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ , invariant par la translation  $\tau : x \mapsto x + 1$ , défini par :

$$\widetilde{F}_\varepsilon = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \tau^i(F_\varepsilon).$$

Considérons alors deux éléments  $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\varepsilon' = (\varepsilon'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\Sigma$ , et supposons qu'il existe un homéomorphisme  $g$  de  $\mathbb{R}$  qui envoie le fermé  $\widetilde{F}_\varepsilon$  sur le fermé  $\widetilde{F}'_{\varepsilon'}$ . Alors, l'homéomorphisme  $g$  envoie nécessairement  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{Z}$ , car les points de  $\mathbb{Z}$  sont les seules composantes connexes non-isolées du fermé  $\widetilde{F}_\varepsilon$  (resp. du fermé  $\widetilde{F}'_{\varepsilon'}$ ). De plus, l'homéomorphisme  $g$  préserve nécessairement l'orientation, car chaque point de  $\mathbb{Z}$  n'est accumulé par des points de  $\widetilde{F}_\varepsilon$  (resp. de  $\widetilde{F}'_{\varepsilon'}$ ) que du côté droit. Quitte à remplacer  $g$  par  $\tau^i \circ g$ , on peut donc supposer que  $g$  fixe chaque point de  $\mathbb{Z}$ . L'homéomorphisme  $g$  envoie les composantes connexes de  $\widetilde{F}_\varepsilon$  sur les composantes connexes de  $\widetilde{F}'_{\varepsilon'}$  en préservant l'ordre de ces composantes connexes. Il en résulte que, pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , l'homéomorphisme  $g$  envoie l'intervalle  $[\frac{1}{2^n} - \frac{\varepsilon_n}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^n} + \frac{\varepsilon_n}{2^{n+2}}]$  sur l'intervalle  $[\frac{1}{2^n} - \frac{\varepsilon'_n}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^n} + \frac{\varepsilon'_n}{2^{n+2}}]$ . Par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , on a  $\varepsilon_n = \varepsilon'_n$ .

Par contrapositive, on a prouvé la propriété suivante : si  $\varepsilon \neq \varepsilon'$ , alors il n'existe pas d'homéomorphisme de  $\mathbb{R}$  qui envoie le fermé  $\widetilde{F}_\varepsilon$  sur le fermé  $\widetilde{F}'_{\varepsilon'}$ . Il reste alors à choisir, pour tout  $\varepsilon \in \Sigma$ , une fonction  $\theta_\varepsilon \in \mathcal{T}$  tel que  $\text{Supp}(\theta_\varepsilon) = \mathbb{R} \setminus \widetilde{F}_\varepsilon$  (l'existence d'une telle fonction découle immédiatement d'un résultat classique de Whitney ; voir, par exemple, [11, proposition 4.8]), et à utiliser le corollaire 6.3 pour conclure.  $\triangle$

## 7 Un homéomorphisme de Reeb qui n'est le temps 1 d'aucun flot

Le but de cette section est de prouver l'affirmation 2 du théorème 1. On reprend, pour cela, les notations de la partie précédente.

**Proposition 7.1** *Considérons une fonction  $\theta \in \mathcal{T}$ . Supposons que  $\text{Supp}(\theta)$  n'est ni vide, ni égal à  $\mathbb{R}$  en entier. Alors, l'homéomorphisme de Reeb  $h_{f_\theta}$  n'est le temps 1 d'aucun flot.*

**Remarque 7.2** Soit  $\theta \in \mathcal{T}$ , et  $(g_t)_{t \in [0,1]}$  une famille continue d'homéomorphismes du plan  $\mathbb{R}_{f_\theta}^2$  qui conjuguent  $h_{f_\theta}$  à lui-même (autrement dit,  $g_t$  et  $h_{f_\theta}$  commutent pour tout  $t$ ). Le corollaire 6.3 (appliqué avec  $\theta' = \theta$ ) fournit une famille  $(\hat{g}_t)$  d'homéomorphismes de  $\mathbb{R}$  tels que  $\hat{g}_t(\text{Supp}(\theta)) = \text{Supp}(\theta)$  pour tout  $t$ . On vérifie immédiatement les propriétés suivantes :

- l'homéomorphisme  $\hat{g}_t$  varie continûment en fonction de  $t$ ,
- si  $g_0 = Id_{\mathbb{R}_{f_\theta}^2}$ , alors  $\hat{g} = Id_{\mathbb{R}}$ ,
- enfin, si  $g_1 = h_{f_\theta}$ , alors  $\hat{g}_1$  n'est autre que la translation  $\tau_1 : x \mapsto x + 1$ .

**Preuve la proposition 7.1** Par l'absurde, supposons l'existence d'un flot  $(h^t)_{t \in \mathbb{R}}$  de  $\mathbb{R}_{f_\theta}^2$  tel que  $h_{f_\theta} = h^1$ . Alors, pour tout  $t \in [0, 1]$ , l'homéomorphisme  $g_t = h^t$  commute avec  $h_{f_\theta}$ . La remarque 7.2 implique alors l'existence d'une famille continue d'homéomorphismes  $(\hat{g}_t)_{t \in [0,1]}$  tel que :

- pour tout  $t \in [0, 1]$ , l'homéomorphisme  $\hat{g}_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  laisse invariant  $\text{Supp}(h_{f_\theta})$ ,
- $\hat{g}_0$  est l'identité et  $\hat{g}_1$  est la translation  $x \mapsto x + 1$ .

Ceci implique que  $\text{Supp}(\theta)$  est soit vide, soit égal à  $\mathbb{R}$ . △

**Preuve de l'affirmation 2 du théorème 1** Considérons la fonction  $\theta : x \mapsto \frac{1}{2} \cos(x)$ . Cette fonction appartient à l'ensemble  $\mathcal{T}$ . La proposition 7.1 implique que l'homéomorphisme de Reeb  $h_{f_\theta}$  n'est le temps 1 d'aucun flot. △

## 8 Un flot de Reeb dont le temps 1 n'est pas conjugué au temps 2

Le but de cette section est de prouver le point 3 du théorème 1. Pour cela, commençons par considérer la fonction  $\tilde{f} : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , affine par morceaux, tendant vers  $-\infty$  en 0, représentée à la figure 17. Les propriétés importantes de la fonction  $\tilde{f}$  sont les suivantes :

- (\*) notons  $D = B(2\mathbb{Z}, 1/4) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } d(x, 2k) < 1/4\}$ ; la fonction  $\tilde{f}$  est croissante en restriction à  $\tilde{f}^{-1}(D)$ ,
- (\*\*) notons  $D' = \text{Adh}(B(2\mathbb{Z} + 1, 1/2)) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } d(x, 2k + 1) \leq 1/2\}$ ; tout réel  $x \in D'$  est une valeur 1/4-singulière de  $\tilde{f}$ .

On note  $f : O_1 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = x + \tilde{f}(y)$ . Cette fonction appartient clairement à l'ensemble  $\mathcal{E}_0$ ; on peut donc considérer le flot de Reeb  $(h_f^t)$  construit à la sous-section 4.3.

**Remarque 8.1** Pour tout réel  $x_2$ , il existe une infinité d'entiers positifs  $n$  tels que  $x_2 + n \in D'$  : soit tout  $n$  pair convient, soit tout  $n$  impair convient.

### Proposition 8.2

- Tout couple de points  $(M, N) \in \Delta_{1,f} \times \Delta_{2,f}$  est oscillant pour l'homéomorphisme  $h_f^1$ .

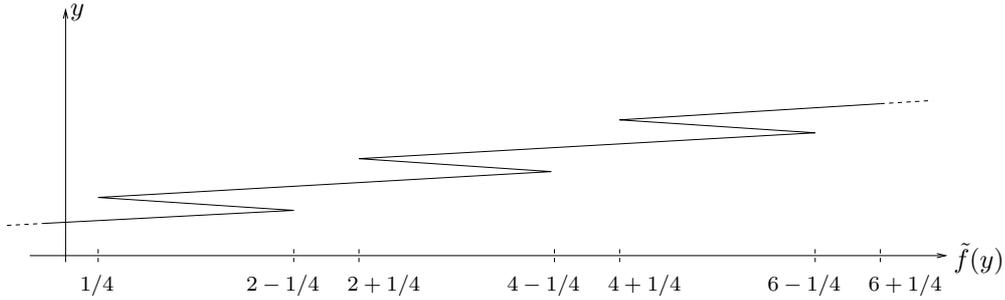


FIGURE 17 – La fonction  $\tilde{f}$

— Notons  $M_0$  le point de  $\Delta_{1,f}$  d’abscisse nulle dans la carte  $U_1$ . Notons  $N_0$  le point de  $\Delta_{2,f}$  d’abscisse nulle dans la carte  $U_2$ . Alors le couple  $(M_0, N_0)$  n’est pas oscillant pour l’homéomorphisme  $h_{\tilde{f}}^2$ .

**Preuve** Soit  $(M, N)$  un couple de points dans  $\Delta_{1,f} \times \Delta_{2,f}$ . D’après la propriété (\*\*\*) de la fonction  $\tilde{f}$  et la remarque 8.1 ci-dessus, il existe une infinité d’entiers positifs  $n$  tels que le réel  $x_2(N) + n$  est une valeur  $1/4$ -singulière de la fonction  $f_{x_1(M)}$ . En appliquant la proposition 5.10, on en déduit que le couple  $(M, N)$  est oscillant pour l’homéomorphisme  $h_{\tilde{f}}^1$ .

Par ailleurs, la propriété (\*) de la fonction  $\tilde{f}$  et la proposition 5.9 impliquent que le couple  $(M_0, N_0)$  n’est pas oscillant pour l’homéomorphisme  $h_{\tilde{f}}^2$ .  $\triangle$

L’affirmation 3 du théorème 1 découle immédiatement de la proposition 8.2.

### Troisième partie

## L’homéomorphisme de Brouwer “le plus simple après la translation”

### 9 Préliminaires

Le but de la partie III est de prouver le théorème 2, c’est-à-dire de prouver qu’il n’existe, à conjugaison près, qu’un seul homéomorphisme de Brouwer dont l’ensemble des couples singuliers est un produit de deux droites topologiques, et dont l’ensemble oscillant est vide. On commence par exhiber un tel homéomorphisme (figure 18) :

**Notations 9.1** On considère le trois-quarts de plan  $\mathbb{R}_0^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ ou } y > 0\}$ .

On considère alors l’homéomorphisme  $h_0 : \mathbb{R}_0^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^2$   
 $(x, y) \mapsto (2x, y/2)$ .

Enfin, on considère les droites topologiques  $\Delta_{1,0}$  et  $\Delta_{2,0}$  de  $\mathbb{R}_0^2$  définies par

$$\Delta_{1,0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ et } y > 0\} \quad \text{et} \quad \Delta_{2,0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ et } x > 0\}.$$

On remarque que le trois-quarts de plan  $\mathbb{R}_0^2$  est homéomorphe au plan  $\mathbb{R}^2$ . L’homéomorphisme  $h_0 : \mathbb{R}_0^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^2$  préserve l’orientation et n’a aucun point fixe : à conjugaison près, c’est un homéomorphisme de Brouwer. L’ensemble des couples singuliers de  $h_0$  est clairement égal au produit des droites topologiques  $\Delta_{1,0}$  et  $\Delta_{2,0}$ . Enfin, l’ensemble oscillant de  $h_0$  est vide : en

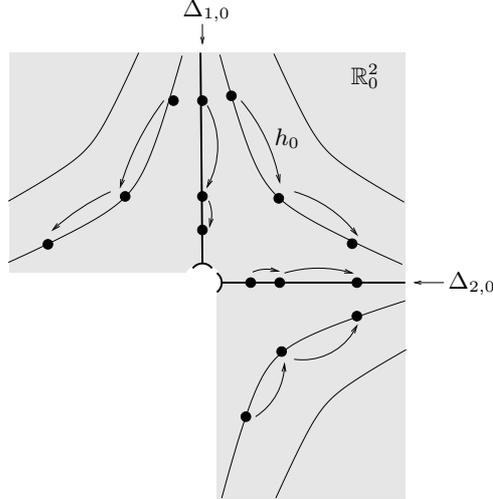


FIGURE 18 – Le trois-quarts de plan  $\mathbb{R}_0^2$ , l’homéomorphisme  $h_0$ , les droites topologiques  $\Delta_{1,0}$  et  $\Delta_{2,0}$  (on a aussi représenté les hyperboles  $(xy = C^{te})$  que préserve l’homéomorphisme  $h_0$ )

effet, si  $(M, N) \in \Delta_{1,0} \times \Delta_{2,0}$ , alors tous les itérés d’un arc “horizontal” (*i.e.* inclus dans une droite horizontale) germant en  $M$  ont une intersection connexe avec toute boule euclidienne centrée en  $N$ . Par conséquent, la preuve du théorème 2 se ramène à celle de l’énoncé suivant :

**Théorème 2bis** Soit  $h$  un homéomorphisme de Brouwer tel que :

- 1 - l’ensemble des couples singuliers de  $h$  est le produit de deux droites topologiques,
- 2 - l’ensemble oscillant de  $h$  est vide.

Alors, l’homéomorphisme  $h$  est conjugué à l’homéomorphisme  $h_0$ .

### Remarques 9.2

— La construction de la section 4 nous fournit de nombreux exemples d’homéomorphismes de Brouwer qui vérifient les hypothèses du théorème 2bis ; un de ces exemples est l’homéomorphisme  $h_f$  associé à la fonction  $f : (x, y) \mapsto x - 1/y$  (voir la section 4 et la proposition 5.1).

— Dans l’énoncé du théorème 2bis, on ne suppose pas *a priori* que l’homéomorphisme  $h$  préserve un feuilletage de Reeb ; ce sera une conséquence *a posteriori* du théorème.

— L’homéomorphisme  $h_0$  est le temps 1 du flot  $(h_0^t)_{t \in \mathbb{R}}$  défini par  $h_0^t(x, y) = (2^t x, 2^{-t} y)$ . Par suite, le corollaire 3 découle immédiatement du théorème 2bis.

La preuve du théorème 2bis occupe la fin de cet article.

### Organisation de la preuve du théorème 2bis

Soit  $h$  un homéomorphisme de Brouwer qui vérifie les hypothèses du théorème 2bis.

Dans la section 10, on montre que, quitte à conjuguer l’homéomorphisme  $h$ , on peut se ramener à la situation suivante :  $h$  est un homéomorphisme du trois-quarts de plan  $\mathbb{R}_0^2$ , l’ensemble des couples singuliers de  $h$  est le produit des droites topologiques  $\Delta_{1,0}$  et  $\Delta_{2,0}$ , et  $h$  coïncide avec  $h_0$  en restriction à  $\Delta_{1,0} \cup \Delta_{2,0}$ . La preuve de ce résultat ne fait intervenir que l’hypothèse 1 du théorème 2bis.

Dans la section 11, on prouve un lemme sur le comportement des itérés d’un compact, selon que ce compact rencontre ou non les droites  $\Delta_{1,0}$  et  $\Delta_{2,0}$  (la preuve de ce lemme utilise essentiellement des propriétés générales des homéomorphismes de Brouwer). Dans la partie 12,

on prouve un lemme technique important : pour tout point  $M \in \Delta_{1,0}$ , il existe un arc qui germe en  $M$ , et qui n'oscille au voisinage d'aucun point de  $\Delta_{2,0}$ .

Les sections 13 à 17 sont alors consacrées à la construction d'un homéomorphisme  $g : \mathbb{R}_0^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^2$  qui conjugue  $h$  à  $h_0$ . En fait, toute la difficulté est de construire l'homéomorphisme  $g$  sur un voisinage invariant  $V$  de  $\Delta_{1,0} \cup \Delta_{2,0}$  dans le quart de plan  $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}_0^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$ . Un tel voisinage  $V$  sera construit à l'aide de deux *rectangles*  $R_1, R_2$  (section 13, voir figure 26) ; la restriction de l'homéomorphisme  $g$  à  $V$  sera construite à l'aide de suites de *quadrillages* de plus en plus fins des rectangles  $R_1, R_2$  (sections 14 à 17.2, voir figures 29 et 30). Il ne restera plus qu'à remarquer que la conjugaison  $g$ , définie sur  $V$ , se prolonge automatiquement à  $\mathbb{R}_0^2$  tout entier (section 17.3).

La tactique adoptée pour construire le voisinage  $V$  et l'homéomorphisme  $g$  sera détaillée dans un "intermède", juste avant la section 13.

## 10 Dynamique sur l'ensemble singulier

Le but de cette section est de prouver la proposition suivante, qui dit principalement que  $h$ , sur les deux droites singulières, "pousse les points dans des sens opposés" :

**Proposition 10.1** *On considère un homéomorphisme de Brouwer  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tel que l'ensemble des couples singuliers de  $h$  est un produit de deux droites topologiques. Alors, il existe un homéomorphisme  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^2$  (préservant ou renversant l'orientation) tel que :*

- l'homéomorphisme  $f \circ h \circ f^{-1}$  a pour ensemble de couples singuliers  $\Delta_{1,0} \times \Delta_{2,0}$  ;
- les homéomorphismes  $f \circ h \circ f^{-1}$  et  $h_0$  coïncident en restriction à  $\Delta_{1,0} \cup \Delta_{2,0}$ .

**Notation 10.2** *On note  $\Sigma$  le fermé connexe de  $\mathbb{R}_0^2$  bordé par les droites  $\Delta_{1,0}$  et  $\Delta_{2,0}$ , c'est-à-dire  $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } (x, y) \neq (0, 0)\}$ .*

### Preuve de la proposition 10.1

**Première étape** Par hypothèse, l'ensemble des couples singuliers de  $h$  est de la forme  $\Delta_1 \times \Delta_2$  où  $\Delta_1, \Delta_2$  sont deux droites topologiques de  $\mathbb{R}^2$ . Montrons qu'il existe un homéomorphisme  $f_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^2$  qui envoie les droites  $\Delta_1, \Delta_2$  respectivement sur les droites  $\Delta_{1,0}, \Delta_{2,0}$ .

L'ensemble des couples singuliers d'un homéomorphisme de Brouwer ne contient aucun couple de la forme  $(M, M)$  (voir remarque 2.2) ; par suite, les droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont disjointes. Par ailleurs, la version du théorème de Schoenflies donnée par Homma (voir l'appendice) implique qu'il n'existe qu'une seule manière, à homéomorphisme près, de plonger deux droites topologiques disjointes dans un plan topologique. On en déduit l'existence de l'homéomorphisme  $f_0$ .

**Deuxième étape** On pose  $\hat{h} = f_0 \circ h \circ f_0^{-1}$ .

### Remarques 10.3

1. On a bien sûr  $\text{Sing}(\hat{h}) = \Delta_{1,0} \times \Delta_{2,0}$ .
2. On a  $\hat{h}(\Sigma) = \Sigma$ .
3. La restriction de  $\hat{h}$  à  $\Delta_{1,0}$  préserve l'orientation de cette droite (parce que les homéomorphismes de  $\mathbb{R}$  qui renversent l'orientation ont un point fixe).
4. L'homéomorphisme  $\hat{h}$  s'étend continûment au point  $(0, 0)$  en posant  $\hat{h}(0, 0) = (0, 0)$  (on peut par exemple voir ceci en introduisant les deux *bouts* de l'espace topologique  $\Sigma$ ).

5. Quitte à conjuguer encore  $\hat{h}$  par une inversion centrée en  $(0,0)$  (en coordonnées complexes,  $z \mapsto z/|z|^2$ ), qui induit un homéomorphisme de  $\mathbb{R}_0^2$ , on suppose que la dynamique de  $\hat{h}$  pousse les points de  $\Delta_{1,0}$  du haut vers le bas.

Montrons alors que la dynamique de  $\hat{h}$  pousse les points de  $\Delta_{2,0}$  de la gauche vers la droite.

On note  $\gamma$  un arc joignant la droite  $\Delta_{1,0}$  à la droite  $\Delta_{2,0}$  dans  $\Sigma$ . L'arc  $\gamma$  sépare le quart de plan  $\Sigma$  en deux composantes connexes. On note  $F$  et  $G$  ces composantes connexes comme sur la figure 19. On note  $x_1$  un point de  $\Delta_{1,0} \cap F$  et  $x_2$  un point de  $\Delta_{2,0} \cap G$ .

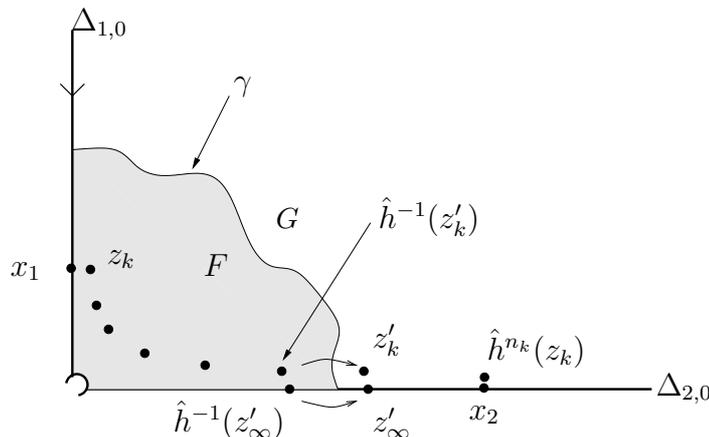


FIGURE 19 – Dynamique de l'homéomorphisme  $\hat{h}$

Puisque le couple  $(x_1, x_2)$  est singulier, il existe une suite de points  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  qui tend vers  $x_1$ , et une suite d'entiers  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  qui tend vers  $+\infty$ , tels que la suite de points  $(\hat{h}^{n_k}(z_k))$  tend vers  $x_2$ . Pour tout  $k$  assez grand, le point  $z_k$  est dans  $F$ , mais le point  $\hat{h}^{n_k}(z_k)$  n'est pas dans  $F$  : appelons alors  $n'_k$  le plus petit entier tel que le point  $z'_k = \hat{h}^{n'_k}(z_k)$  n'est pas dans  $F$ . La suite  $(z'_k)$  vit dans l'ensemble  $\text{Adh}(\hat{h}(F) \setminus F)$ , qui est compact (d'après le point 4 de la remarque 10.3) : il existe donc un point d'accumulation de cette suite, que l'on note  $z'_\infty$ .

D'une part, par définition, le couple  $(x, z'_\infty)$  est singulier, et donc  $z'_\infty \in \Delta_{2,0}$ . D'autre part, pour tout  $k$ , le segment  $\gamma$  sépare les points  $z'_k$  et  $\hat{h}^{-1}(z'_k)$ , donc  $\hat{h}^{-1}(z'_\infty)$  est situé à gauche de  $z'_\infty$  sur  $\Delta_{2,0}$  : autrement dit, la dynamique de  $\hat{h}$  pousse les points de  $\Delta_{2,0}$  de la gauche vers la droite.

**Troisième étape** D'après la deuxième étape, les homéomorphismes  $h_0$  et  $\hat{h}$  poussent les points de  $\Delta_{1,0}$  (resp.  $\Delta_{2,0}$ ) dans le même sens. D'autre part, il est classique que deux homéomorphismes d'une droite topologique  $D$ , tous deux sans point fixe, qui poussent les points de  $D$  dans le même sens, sont conjugués *via* un homéomorphisme qui préserve l'orientation de  $D^2$ . On en déduit facilement qu'il existe un homéomorphisme de  $\mathbb{R}_0^2$  qui fixe les droites topologiques  $\Delta_{1,0}$  et  $\Delta_{2,0}$ , et qui conjugue les homéomorphismes  $h_0$  et  $\hat{h}$  en restriction à ces droites. Ceci achève la preuve.  $\triangle$

**Notation 10.4** On dira qu'un homéomorphisme  $h$  vérifie l'hypothèse  $(\star)$  s'il satisfait aux

<sup>2</sup>Il suffit de montrer que tout homéomorphisme  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  croissant et sans point fixe, est conjugué à la translation  $\tau : x \mapsto x + 1$ , *via* un homéomorphisme croissant. Pour ce faire, on choisit arbitrairement un homéomorphisme croissant  $g$  de l'intervalle  $[0, h(0)]$  sur l'intervalle  $[0, \tau(0)]$ , et on considère l'homéomorphisme  $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dont la restriction à l'intervalle  $[n, n + 1]$  est définie par  $\tilde{g} = h^n \circ g \circ \tau^{-n}$ . Par construction,  $\tilde{g}$  est un homéomorphisme croissant de  $\mathbb{R}$  qui conjugue  $h$  à  $\tau$ .

conditions suivantes :

$$(\star) \begin{cases} - h \text{ est un homéomorphisme de Brouwer défini sur le trois-quarts de plan } \mathbb{R}_0^2, \\ - \text{l'ensemble des couples singuliers de } h \text{ est le produit des droites } \Delta_{1,0} \text{ et } \Delta_{2,0}, \\ - \text{les homéomorphismes } h \text{ et } h_0 \text{ coïncident sur les droites } \Delta_{1,0} \text{ et } \Delta_{2,0}, \\ - \text{l'ensemble oscillant de } h \text{ est vide.} \end{cases}$$

Si  $h$  est un homéomorphisme de Brouwer qui vérifie les hypothèses du théorème 2bis, alors, d'après la proposition 10.1, il existe un homéomorphisme de Brouwer conjugué à  $h$  qui vérifie l'hypothèse  $(\star)$ .

## 11 Comportement de l'orbite d'un compact

On considère un homéomorphisme  $h$  qui vérifie l'hypothèse  $(\star)$  (cependant, le fait que l'ensemble oscillant de  $h$  soit vide n'intervient pas dans cette section). Nous allons étudier le comportement des itérés d'un compact du trois-quarts de plan  $\mathbb{R}_0^2$ , selon que ce compact intersecte ou non les droites  $\Delta_{1,0}$  et  $\Delta_{2,0}$ .

**Définitions 11.1** On considère un arc  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_0^2$ .

— On dira que l'arc  $\gamma$  germe sur  $\Delta_{1,0}$  (resp. sur  $\Delta_{2,0}$ ) si  $\gamma(0) \in \Delta_{1,0}$  (resp. sur  $\Delta_{2,0}$ ).

— Supposons que l'arc  $\gamma$  germe sur l'une des droites  $\Delta_{1,0}$  ou  $\Delta_{2,0}$ . On dira que  $\gamma$  est admissible si  $\gamma$  est disjoint de son image par  $h$ , et si  $\gamma(]0, 1])$  est inclus dans l'intérieur du quart de plan  $\Sigma$ .

**Remarque 11.2** Le lemme 1.1 sur les disques libres entraîne que les arcs admissibles, étant disjoints de leur image par  $h$ , sont également disjoints de tous leurs itérés.

### Lemme 11.3 (Itérés d'un compact)

1. Soient  $K_1$  et  $K_2$  deux sous-ensembles compacts du trois-quarts de plan  $\mathbb{R}_0^2$ .

Si  $K_1 \cap \Delta_{1,0} = \emptyset$  ou  $K_2 \cap \Delta_{2,0} = \emptyset$ , alors il n'existe qu'un nombre fini d'entiers positifs  $n$  tels que  $h^n(K_1)$  rencontre  $K_2$ .

2. Soient  $K_1$  et  $K_2$  deux sous-ensembles compacts du plan, tous deux connexes par arcs.

Si  $K_1$  rencontre  $\Delta_{1,0}$  et l'intérieur de  $\Sigma$ , et si  $K_2$  rencontre  $\Delta_{2,0}$  et l'intérieur de  $\Sigma$ , alors il n'existe qu'un nombre fini d'entiers positifs  $n$  tels que  $h^n(K_1)$  ne rencontre pas  $K_2$ .

**Remarque 11.4** Pour tout compact  $K$  du trois-quarts de plan  $\mathbb{R}_0^2$ , notons  $\omega(K) = \omega(K, h)$  l'ensemble des points de  $\mathbb{R}_0^2$  qui sont des valeurs d'adhérence des suites  $(x_n)$  telles que pour chaque entier  $n$ ,  $x_n$  est dans  $h^n(K)$ . Notons de même  $\alpha(K, h) = \omega(K, h^{-1})$ . On peut reformuler le premier point du lemme de la manière suivante : pour tout compact  $K$ ,  $\alpha(K) \subset \Delta_{1,0}$  et  $\omega(K) \subset \Delta_{2,0}$ . La preuve de cette remarque est laissée au lecteur.

### Preuve du lemme 11.3

1. Si  $h^n(K_1)$  rencontre  $K_2$  pour une infinité d'entiers positifs  $n$ , alors par compacité, il existe un couple  $(x_1, x_2)$  dans  $K_1 \times K_2$  qui est singulier. Ceci contredit l'hypothèse du premier point.

2. Puisque  $K_1$  et  $K_2$  sont connexes par arcs, il suffit de faire la preuve dans le cas où ces deux compacts sont des arcs admissibles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  germant respectivement sur  $\Delta_{1,0}$  et sur  $\Delta_{2,0}$ .

Soit  $\gamma$  un arc qui prolonge  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , c'est-à-dire tel que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  soient deux sous-arcs de  $\gamma$ , avec  $\gamma(0) = \gamma_1(0)$ ,  $\gamma(1) = \gamma_2(0)$  et  $\gamma(]0, 1])$  inclus dans l'intérieur de  $\Sigma$ .

Puisque  $h$  coïncide avec  $h_0$  sur les deux droites singulières (hypothèse  $(\star)$ ), il est clair que pour tout entier positif  $n$ ,

$$h^n(\gamma) \cap \gamma \neq \emptyset.$$

D'autre part, le premier point du lemme, appliqué successivement aux couples de compacts<sup>3</sup>  $(\text{Adh}(\gamma \setminus \gamma_1), \gamma)$  et  $(\gamma, \text{Adh}(\gamma \setminus \gamma_2))$ , montre qu'il existe un entier  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$h^n(\gamma \setminus \gamma_1) \cap \gamma = \emptyset \quad \text{et} \quad h^n(\gamma) \cap (\gamma \setminus \gamma_2) = \emptyset.$$

Par conséquent, tout entier  $n \geq n_0$  vérifie

$$h^n(\gamma_1) \cap \gamma_2 \neq \emptyset,$$

ce que l'on voulait prouver. △

## 12 Un lemme d'existence d'arcs uniformément non-oscillants

On considère un homéomorphisme  $h$  qui vérifie l'hypothèse  $(\star)$ . Le fait que l'ensemble oscillant de  $h$  soit vide signifie que, pour tout couple de points  $(M, N) \in \Delta_{1,0} \times \Delta_{2,0}$ , il existe un arc admissible  $\gamma_{M,N}$  qui germe en  $M$  et qui n'oscille pas au voisinage du point  $N$ . Le but de cette section (lemme 12.5) est de montrer que l'on peut choisir l'arc  $\gamma_{M,N}$  indépendamment du point  $N$  : autrement dit, on va montrer que, pour tout point  $M \in \Delta_{1,0}$ , il existe un arc admissible  $\gamma_M$  qui germe en  $M$  et qui n'oscille au voisinage d'aucun point de  $\Delta_{2,0}$ . De plus, on peut s'arranger pour que cet arc  $\gamma_M$  ait une intersection *simple* (voir ci-dessous) avec tous les itérés d'un nombre fini d'arcs donnés *a priori*.

**Définition 12.1** *On dira qu'un arc qui germe sur  $\Delta_{1,0}$ , admissible, est uniformément non-oscillant s'il n'oscille au voisinage d'aucun point de  $\Delta_{2,0}$  (pour l'homéomorphisme  $h$ ).*

*On dira qu'un arc qui germe sur  $\Delta_{2,0}$ , admissible, est uniformément non-oscillant s'il n'oscille au voisinage d'aucun point de  $\Delta_{1,0}$  (pour l'homéomorphisme  $h^{-1}$ ).*

**Définitions 12.2** (figure 20) *On considère deux arcs  $\alpha, \beta$ .*

- *On dit que l'intersection de  $\alpha$  et  $\beta$  est quasi-simple si  $\alpha \cap \beta$  est connexe et non vide.*
- *On dit que l'intersection de  $\alpha$  et  $\beta$  est simple si  $\alpha \cap \beta$  est réduite à un point et si, quand ce point n'est pas une extrémité de  $\alpha$  ou  $\beta$ , les composantes connexes de  $\alpha \setminus \beta$  sont situées de part et d'autre<sup>4</sup> de  $\beta$ .*

Le lemme suivant est illustré sur la figure 21.

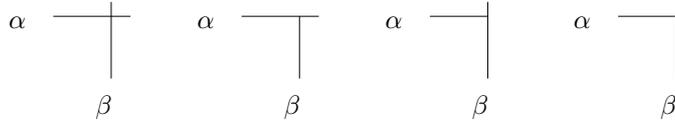
**Lemme 12.3 (existence d'arcs uniformément non-oscillants pour  $h^{-1}$ )** *On considère des points  $M_1, \dots, M_r$  de  $\Delta_{1,0}$  et  $N$  un point de  $\Delta_{2,0}$ . On suppose donnés des arcs admissibles  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  qui germent en  $M_1, \dots, M_r$  et n'oscillent pas au voisinage de  $N$ . On suppose que les arcs de la famille  $\mathcal{F}_r = \{h^n(\alpha_k)\}_{1 \leq k \leq r, n \in \mathbb{Z}}$  sont deux à deux disjoints.*

*Alors, il existe un arc admissible  $\beta$  qui germe en  $N$ , uniformément non-oscillant, et qui a une intersection simple ou vide avec chacun des arcs  $h^n(\alpha_1), \dots, h^n(\alpha_r)$  pour tout  $n$ .*

<sup>3</sup>On note  $\text{Adh}(E)$  l'adhérence d'un ensemble  $E$ .

<sup>4</sup>Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux arcs du plan dont l'intersection est réduite à un point qui n'est une extrémité ni de  $\alpha$ , ni de  $\beta$ . Le théorème de Schoenflies-Homma (voir l'appendice) implique l'existence d'une droite topologique  $D$  tel que  $\beta$  est inclus dans  $D$ , et tel que  $\alpha \cap D = \alpha \cap \beta$ . On dit alors que les deux composantes connexes de  $\alpha \setminus \beta$  sont situées de part et d'autre de  $\beta$ , si elle sont situées dans l'un et l'autre des demi-plan bordés par la droite  $D$ . En utilisant à nouveau le théorème de Schoenflies-Homma, on peut vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de la droite  $D$ .

Intersections simples :



Intersection non-simple :

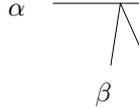


FIGURE 20 – Différents types d'intersections entre deux arcs  $\alpha, \beta$

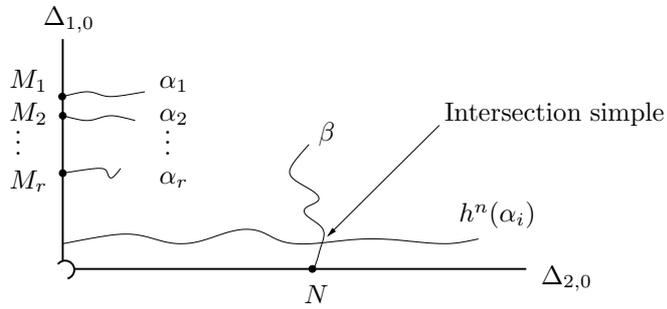


FIGURE 21 – Illustration du lemme 12.3

**Remarque importante 12.4** Clairement, le lemme 12.3 aura comme conséquence que l'ensemble oscillant de l'homéomorphisme  $h^{-1}$  est vide. D'autre part, l'ensemble des couples singuliers de  $h^{-1}$  est un produit de deux droites topologiques (précisément  $\Delta_{2,0} \times \Delta_{1,0}$ ). Par conséquent, l'homéomorphisme  $h^{-1}$  vérifie aussi l'hypothèse  $(\star)$  (modulo l'échange des rôles des droites  $\Delta_{1,0}$  et  $\Delta_{2,0}$ ). En appliquant le lemme 12.3 à l'homéomorphisme  $h^{-1}$ , on obtiendra donc le lemme complémentaire :

**Lemme 12.5 (existence d'arcs uniformément non-oscillants pour  $h$ )** On considère des points  $N_1, \dots, N_r$  de  $\Delta_{2,0}$  et  $M$  un point de  $\Delta_{1,0}$ . On suppose donnés des arcs admissibles  $\beta_1, \dots, \beta_r$  qui germent en  $N_1, \dots, N_r$  et n'oscillent pas au voisinage de  $M$ . On suppose que les arcs de la famille  $\mathcal{F}_r = \{h^n(\beta_k)\}_{1 \leq k \leq r, n \in \mathbb{Z}}$  sont deux à deux disjoints.

Alors, il existe un arc admissible  $\alpha$  qui germe en  $M$ , uniformément non-oscillant, et qui a une intersection simple ou vide avec chacun des arcs  $h^n(\beta_1), \dots, h^n(\beta_r)$  pour tout  $n$ .

**Preuve du lemme 12.3** On choisit un point  $M_0$  sur  $\Delta_{1,0}$  (tel que  $M_0$  n'est dans l'orbite d'aucun des points  $M_1, \dots, M_r$ ). Pour tout  $k \in \{1, \dots, r\}$ , il existe un entier  $n_k$  tel que le point  $h^{n_k}(M_k)$  soit situé strictement entre  $M_0$  et  $h(M_0)$  sur la droite  $\Delta_{1,0}$ ; quitte à remplacer  $M_k$  par  $h^{n_k}(M_k)$ , on supposera que pour tout  $k$ , le point  $M_k$  est situé entre  $M_0$  et  $h(M_0)$  sur  $\Delta_{1,0}$ .

Par ailleurs, on choisit un arc admissible  $\beta_0$  qui germe en  $N$ .

**Déroulement de la preuve** La preuve se fera en quatre étapes :

*Première étape* On complète la famille finie d'arcs  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$  en une famille dénombrable d'arcs  $\{\alpha_k\}_{k \geq 1}$  qui sont tous non-oscillants au voisinage de  $N$ , et telle que les origines de ces arcs sont denses dans le segment  $[M_0 h(M_0)]_{\Delta_{1,0}}$ .

*Deuxième étape* Par une suite infinie de modifications de l'arc  $\beta_0$ , on construit un arc  $\beta_\infty$  ayant une intersection *quasi-simple* ou vide avec chacun des arcs  $h^n(\alpha_k)$  (pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et tout  $k \geq 1$ ). Pour cela, on utilise le fait que les arcs  $\alpha_k$  n'oscillent pas au voisinage du point  $N$  (figure 22).

*Troisième étape* Une perturbation classique permet de transformer  $\beta_\infty$  en un arc  $\beta$  qui a une intersection *simple* ou vide avec les arcs  $h^n(\alpha_k)$  (figure 23).

*Quatrième étape* Cette propriété, ainsi que la densité des arcs  $\{\alpha_k\}_{k>0}$  dans le segment  $[M_0 h(M_0)]_{\Delta_{1,0}}$ , entraîne automatiquement que l'arc  $\beta$  est uniformément non-oscillant.

**Première étape : la famille d'arcs  $\{\alpha_k\}_{k \geq 1}$**  Nous allons montrer qu'on peut compléter la famille finie d'arcs admissibles  $\{\alpha_k\}_{1 \leq k \leq r}$  en une famille dénombrable d'arcs admissibles  $\{\alpha_k\}_{k \geq 1}$ , germant tous sur  $\Delta_{1,0}$  entre les points  $M_0$  et  $h(M_0)$ , et vérifiant les propriétés suivantes :

1. pour tout  $k$ , l'arc  $\alpha_k$  n'oscille pas au voisinage de  $N$  ;
2. l'ensemble des origines des arcs  $\alpha_k$  est dense dans le segment  $[M_0 h(M_0)]_{\Delta_{1,0}}$  ;
3. les arcs de la famille  $\mathcal{F} = \{h^n(\alpha_k)\}_{k \geq 1, n \in \mathbb{Z}}$  sont deux à deux disjoints ;
4. tout sous-arc  $\beta'$  de  $\beta_0 \setminus \{\beta_0(0)\}$  ne rencontre qu'un nombre fini d'arcs de la famille  $\mathcal{F}$  (on rappelle que, par définition, un sous-arc est compact) ;
5. pour tout  $k > r$ , pour tout  $n \geq 0$ , pour tous points  $P, Q \in h^n(\alpha_k) \cap \beta_0$ , on a <sup>5</sup> :

$$\text{Diam}([PQ]_{h^n(\alpha_k)}) \leq \frac{1}{k}.$$

Commençons par remarquer que chacune des propriétés 1..5 ci-dessus est préservée quand on raccourcit les arcs  $\alpha_k$ . Voici maintenant comment construire une famille  $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  qui vérifie les propriétés 1..5 :

— Le fait que l'ensemble oscillant de  $h$  est vide assure l'existence d'une famille d'arcs qui vérifie les propriétés 1 et 2, et d'origines deux à deux distinctes ; par abus, on note déjà  $\{\alpha_k\}_{k \geq 1}$  cette famille d'arcs. Nous allons obtenir les autres propriétés en raccourcissant les arcs de cette première famille (sans toucher aux arcs  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ).

— Par hypothèse, les arcs de la famille  $\mathcal{F}_r = \{h^n(\alpha_k)\}_{1 \leq k \leq r, n \in \mathbb{Z}}$  sont déjà deux à deux disjoints. Pour chaque  $i = 1 \dots r$ , la suite  $(h^n(\alpha_i))_{n \in \mathbb{Z}}$  ne s'accumule que sur  $\Delta_{2,0}$  (d'après le point 1 du lemme 11.3 sur les itérés d'un compact). On peut donc raccourcir l'arc  $\alpha_{r+1}$  pour qu'il devienne disjoint de tous les arcs de la famille  $\mathcal{F}_r$ . La famille d'arcs  $\mathcal{F}_{r+1} = \{h^n(\alpha_k)\}_{1 \leq k \leq r+1, n \in \mathbb{Z}}$  est alors formée d'arcs deux à deux disjoints. Par récurrence, on obtient ainsi la propriété 3.

— Le même type d'argument permet d'obtenir la propriété 4.

— La propriété 5 provient de l'absence d'oscillation. En effet, soit  $k > r$  ; pour tout  $n$  assez grand, l'arc  $h^n(\alpha_k)$  rencontre l'arc  $\beta_0$  (point 2 du lemme 11.3). Parcourons  $h^n(\alpha_k)$  en partant de son origine, et notons  $P_n$  et  $Q_n$  le premier et le dernier point de  $h^n(\alpha_k) \cap \beta$  rencontrés. On a bien sûr

$$h^n(\alpha_k) \cap \beta \subset [P_n, Q_n]_{h^n(\alpha_k)}.$$

D'après le point 1 du lemme 11.3, les suites  $(P_n)$  et  $(Q_n)$  tendent vers l'origine  $N$  de  $\beta_0$ . Comme l'arc  $\alpha_k$  n'oscille pas au voisinage de  $N$ , par définition, la suite des diamètres des sous-arcs  $[P_n, Q_n]_{h^n(\alpha_k)}$  tend vers 0 (quand  $n$  tend vers l'infini). Soit  $n_0$  un entier à partir duquel

---

<sup>5</sup>Rappelons que  $\text{Diam}(E)$  désigne le diamètre d'un ensemble  $E$ .

$\text{Diam}([P_n, Q_n]_{h^n(\alpha_k)}) < 1/k$  ; on peut alors raccourcir l'arc  $\alpha_k$  pour que pour tout entier  $n < n_0$ , on ait  $h^n(\alpha_k) \cap \beta_0 = \emptyset$ . En appliquant ce procédé successivement à tous les entiers  $k > r$ , on obtient la propriété 5. L'existence d'une famille  $\{\alpha_k\}_{k \geq 1}$  qui vérifie les propriétés 1..5 est donc prouvée.

**Deuxième étape : l'arc  $\beta_\infty$**  Nous allons montrer l'existence d'un arc  $\beta_\infty$  qui a une intersection quasi-simple ou vide avec chacun des arcs de la famille  $\mathcal{F} = \{h^n(\alpha_k)\}_{k \geq 1, n \in \mathbb{Z}}$ .

On parcourt l'arc  $\beta_0$  en partant de son extrémité  $\beta_0(1)$ . Soient  $n_1$  et  $k_1$  tels que  $h^{n_1}(\alpha_{k_1})$  soit le premier arc rencontré parmi tous les arcs de la famille  $\mathcal{F}$  (il y a un premier arc d'après la propriété 4).

Soient  $a_1$  et  $b_1$  respectivement les premier et dernier points de  $\beta_0 \cap h^{n_1}(\alpha_{k_1})$  rencontrés en parcourant  $\beta_0$  (figure 22). On modifie l'arc  $\beta_0$  en remplaçant le sous-arc  $[a_1 b_1]_{\beta_0}$  par le sous-arc  $[a_1 b_1]_{h^{n_1}(\alpha_{k_1})}$  ; on obtient ainsi un nouvel arc

$$\beta_1 = (\beta_0 \setminus [a_1 b_1]_{\beta_0}) \cup [a_1 b_1]_{h^{n_1}(\alpha_{k_1})}.$$

On choisit un paramétrage de l'arc  $\beta_1$  qui coïncide avec le paramétrage de l'arc  $\beta_0$  en dehors du sous-arc  $[a_1 b_1]_{\beta_1}$ .

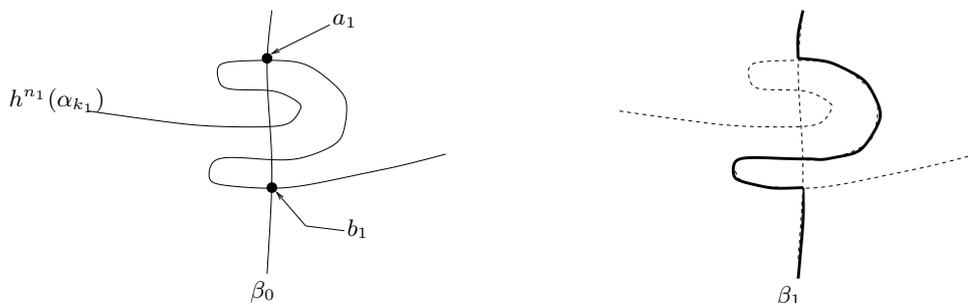


FIGURE 22 – Passage de l'arc  $\beta_0$  à l'arc  $\beta_1$

On recommence maintenant la procédure, en parcourant l'arc  $\beta_1$  en partant de  $b_1$  : on note  $h^{n_2}(\alpha_{k_2})$  le premier arc rencontré ; et  $a_2$  et  $b_2$  les premier et dernier points rencontrés sur  $\beta_1 \cap h^{n_2}(\alpha_{k_2})$ . On pose

$$\beta_2 = (\beta_1 \setminus [a_2 b_2]_{\beta_1}) \cup [a_2 b_2]_{h^{n_2}(\alpha_{k_2})}.$$

En itérant le procédé, on obtient une suite d'arcs  $(\beta_l)_{l \geq 0}$ . Par construction, le sous-arc de  $\beta_l$  joignant  $\beta_l(1)$  à  $b_l$  a une intersection quasi-simple ou vide avec les arcs de la famille  $\mathcal{F}$ .

En tant que suite d'applications de  $[0, 1]$  dans le plan, la suite d'arcs  $(\beta_l)_{l \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers une application  $\beta_\infty$  de  $[0, 1]$  dans le plan. Il faut montrer que  $\beta_\infty$  est un arc, c'est-à-dire que l'application  $\beta_\infty$  est injective et continue. La seule difficulté est la continuité de  $\beta_\infty$  en 0.

Pour montrer que  $\beta_\infty$  est continu en 0, il suffit de montrer que la suite des diamètres des arcs rajoutés tend vers 0, c'est-à-dire montrer que

$$d_l = \text{Diam}([a_l, b_l]_{h^{n_l}(\alpha_{k_l})}) \longrightarrow 0.$$

Fixons un entier  $k > 1$ , et notons  $(\gamma_{k,m})_{m \geq 0}$  la suite de sous-arcs des arcs  $\{h^n(\alpha_k) \mid n \geq 0\}$  utilisés dans la construction (autrement dit, les arcs  $\gamma_{k,m}$  sont les composantes connexes de  $(\cup_{n \geq 0} h^n(\alpha_k)) \cap \beta_\infty$ , numérotées dans un ordre quelconque). Alors, le fait que  $\alpha_k$  n'oscille pas

au voisinage de  $N$  (propriété 1) entraîne que la suite  $d_{k,m} = \text{Diam}(\gamma_{k,m})$  tend vers 0 quand  $m$  tend vers l'infini.

D'autre part, pour tout  $k > r$ , et tout  $m \geq 0$ , on a  $d_{k,m} \leq 1/k$  (propriété 5).

On conclut à l'aide de l'énoncé élémentaire suivant : soit  $\varphi$  une injection de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Soit, pour tout entier  $k$ , une suite  $(d_{k,m})_{m \geq 0}$  qui tend vers 0 et dont tous les termes sont plus petits que  $1/k$ . Alors la suite définie par  $d_l = d_{\varphi(l)}$  tend vers 0.

**Troisième étape : l'arc  $\beta$  (passage de quasi-simple à simple)** L'arc  $\beta_\infty$  a une intersection quasi-simple ou vide avec les arcs de la famille  $\mathcal{F}$ . Une construction classique, suggérée par la figure 23, permet de perturber l'arc  $\beta_\infty$  en un arc  $\beta$  admissible, qui germe en  $N$  et qui a une intersection simple ou vide avec les arcs  $\{h^n(\alpha_k)\}_{k \geq 1, n \in \mathbb{Z}}$ .

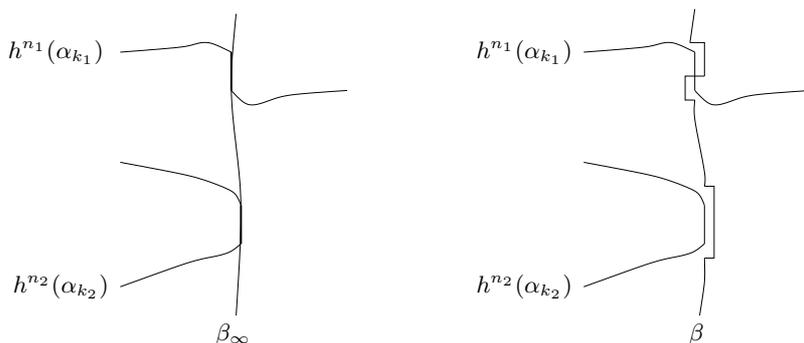


FIGURE 23 – Construction de l'arc  $\beta$  à partir de l'arc  $\beta_\infty$  (passage d'une intersection quasi-simple à une intersection simple)

**Quatrième étape : l'arc  $\beta$  est uniformément non-oscillant** Supposons que l'arc  $\beta$  oscille (pour  $h^{-1}$ ) au voisinage d'un point  $M$  de  $\Delta_{1,0}$ . Alors, par définition, il existe une suite  $(n_m)$  d'entiers positifs, des suites de points  $(P_m)$  et  $(R_m)$  sur  $h^{-n_m}(\beta)$  qui tendent vers  $M$ , telles que la suite  $(\text{Diam}([P_m R_m]_{h^{-n_m}(\beta)}))$  ne tende pas vers 0. Il est clair que la suite  $(n_m)$  tend vers  $+\infty$ .

Quitte à extraire, on peut supposer que la suite d'arcs  $[P_m R_m]_{h^{-n_m}(\beta)}$  converge, pour la topologie de Hausdorff, vers  $F \cup \{\infty\}$  où  $F$  est un ensemble fermé de  $\mathbb{R}_0^2$  de diamètre strictement positif. Cet ensemble est inclus dans  $\Delta_{1,0}$  d'après le point 1 du lemme 11.3 ; soit  $Q_\infty$  un point distinct de  $M$  dans cet ensemble.

D'après la propriété 2 (densité), il existe un arc  $h^n(\alpha_k)$  qui germe sur  $\Delta_{1,0}$  strictement entre  $M$  et  $Q_\infty$ . On montre facilement que pour  $m$  assez grand, l'ensemble  $h^n(\alpha_k) \cap [P_m R_m]_{h^{-n_m}(\beta)}$  n'est pas connexe (voir figure 24). Ceci constitue une contradiction avec le fait que l'intersection des arcs  $\beta$  et  $h^{n_m+n}(\alpha_k)$  est simple.

Par conséquent, l'arc  $\beta$  est uniformément non-oscillant, ce qui achève la preuve.  $\triangle$

### Intermède : organisation de la fin de la preuve du théorème 2bis

Considérons un homéomorphisme de Brouwer  $h$  qui vérifie les hypothèses du théorème 2bis. Quitte à conjuguer  $h$ , on suppose que  $h$  vérifie l'hypothèse  $(\star)$ . On rappelle que  $\Sigma$  désigne le fermé connexe de  $\mathbb{R}_0^2$  bordé par les droites  $\Delta_{1,0}$  et  $\Delta_{2,0}$ . Pour prouver le théorème 2bis, il nous faut construire un homéomorphisme  $g : \mathbb{R}_0^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^2$  qui conjugue  $h$  à  $h_0$ . Toute la difficulté est de construire la restriction de  $g$  à un voisinage invariant par  $h$  de  $\Delta_{1,0} \cup \Delta_{2,0}$  dans  $\Sigma$ . Voici comment nous allons procéder :

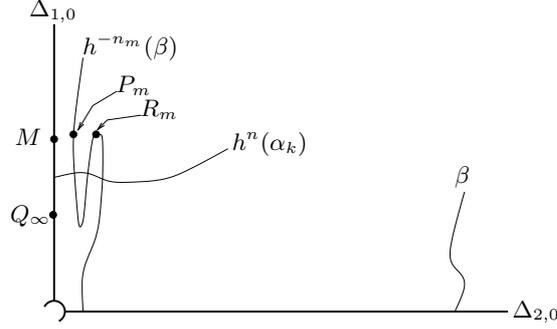


FIGURE 24 – Si l’arc  $\beta$  oscillait au voisinage d’un point de  $\Delta_{1,0}$ , alors l’intersection des arcs  $\beta$  et  $h^{n_m+n}(\alpha_k)$  ne pourrait pas être simple

Dans la partie 13, on construit un voisinage invariant par  $h$  de  $\Delta_{1,0} \cup \Delta_{2,0}$  dans  $\Sigma$ . Pour ce faire, on définit deux *rectangles*  $R_1, R_2 \subset \Sigma$  (figure 26). On montre alors que les ensembles  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(R_1) \cup \Delta_{2,0}$  et  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(R_2) \cup \Delta_{1,0}$  sont égaux et forment un voisinage de  $\Delta_{1,0} \cup \Delta_{2,0}$  dans  $\Sigma$ . On notera  $V$  ce voisinage (figure 28).

On remarque alors que l’homéomorphisme “modèle”  $h_0$  préserve les feuilletages en droites euclidiennes ( $x = C^{te}$ ) et ( $y = C^{te}$ ). Par analogie, nous allons chercher à construire des coordonnées  $(\hat{x}, \hat{y})$  sur  $V$  telles que l’homéomorphisme  $h$  préserve les feuilletages en droites ( $\hat{x} = C^{te}$ ) et ( $\hat{y} = C^{te}$ ); de telles coordonnées définissent automatiquement un homéomorphisme  $g$  sur  $V$  qui conjugue  $h$  à  $h_0$ . Pour construire les coordonnées  $(\hat{x}, \hat{y})$  sur  $V$ , il suffit de les définir sur les rectangles  $R_1$  et  $R_2$  en respectant certaines règles de compatibilité (formalisées par la notion de *dualité*, voir la figure 30).

Sur les rectangles  $R_1, R_2$ , les coordonnées  $(\hat{x}, \hat{y})$  sont construites par approximation successives. Plus précisément, on construira une suite de *quadrillages*  $(\mathcal{Q}_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$  de plus en plus fins du rectangle  $R_1$  et une suite de quadrillages  $(\mathcal{Q}_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$  de plus en plus fins du rectangle  $R_2$  (sections 14 et 15). On pourra alors “passer à la limite”, et obtenir des quadrillages *complets*  $\mathcal{Q}_1$  et  $\mathcal{Q}_2$  (sections 16 et sous-section 17.1). Ces quadrillages permettent de définir les coordonnées  $(\hat{x}, \hat{y})$ : les *arcs horizontaux* (resp. *verticaux*) des quadrillages  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$  sont les intersections des droites ( $\hat{x} = C^{te}$ ) (resp. ( $\hat{y} = C^{te}$ )) avec les rectangles  $R_1$  et  $R_2$ . Les coordonnées  $(\hat{x}, \hat{y})$  s’étendent naturellement au voisinage  $V$  et définissent (sur  $V$ ) un homéomorphisme  $g$  qui conjugue  $h$  à  $h_0$  (sous-section 17.2).

Il ne restera alors plus qu’à remarquer que la conjugaison  $g$ , définie sur  $V$ , se prolonge automatiquement en une conjugaison définie sur  $\mathbb{R}_0^2$  (sous-section 17.3).

## 13 Rectangles

On considère un homéomorphisme  $h$  qui vérifie l’hypothèse  $(\star)$ . Nous allons construire un voisinage invariant  $V$  des droites  $\Delta_{1,0}$  et  $\Delta_{2,0}$  dans le quart de plan  $\Sigma$ ; pour ce faire nous utiliserons une paire de rectangles  $R_1, R_2$ .

### 13.1 Construction des rectangles $R_1, R_2$

**Définition 13.1** *Un rectangle  $R$  est l’image d’un plongement topologique  $\varphi$  (i.e. d’une application continue injective) de  $[0, 1]^2$  dans le trois-quarts de plan  $\mathbb{R}_0^2$ . Les arcs  $\varphi([0, 1] \times \{0\})$  et  $\varphi([0, 1] \times \{1\})$  sont appelés côtés horizontaux du rectangle  $R$ , et les arcs  $\varphi(\{0\} \times [0, 1])$  et  $\varphi(\{1\} \times [0, 1])$  sont appelés côtés verticaux.*

On choisit un point  $M$  sur  $\Delta_{1,0}$ , et un point  $N$  sur  $\Delta_{2,0}$ . D'après le lemme d'existence d'arcs uniformément non-oscillants (lemme 12.5), il existe un arc  $\alpha$  admissible uniformément non-oscillant qui germe en  $M$ . De même, le lemme 12.3 nous assure de l'existence d'un arc  $\beta$  admissible uniformément non-oscillant qui germe en  $N$ , et tel que, pour tout  $n$ , l'intersection de  $h^n(\alpha)$  et  $\beta$  est simple ou vide.

Soit  $E$  l'ensemble des entiers  $n$  tels que  $h^n(\alpha)$  rencontre  $\beta$ . Appliquons le lemme 11.3 sur les itérés d'un compact : le point 2 du lemme dit que l'ensemble  $E$  n'est pas vide, et le point 1 dit que  $E$  est minoré. Notons alors  $n_0$  le minimum de  $E$ . Quitte à remplacer  $\alpha$  par  $h^{n_0}(\alpha)$ , on supposera dorénavant que  $\alpha \cap \beta$  est non-vide, et  $h^{-n}(\alpha) \cap \beta$  est vide pour tout  $n > 0$ . Quitte à raccourcir les arcs  $\alpha$  et  $\beta$ , on supposera de plus que l'unique point d'intersection de ces deux arcs est leur extrémité commune.

La configuration des arcs  $\alpha$ ,  $h(\alpha)$ ,  $\beta$  et  $h(\beta)$  et des droites  $\Delta_{1,0}$  et  $\Delta_{2,0}$  est alors homéomorphe à celle de la figure 25. Ceci résulte du théorème de Schoenflies-Homma (voir l'appendice), sachant les propriétés suivantes :

- les intersections  $\alpha \cap h(\alpha)$ ,  $\beta \cap h(\beta)$  et  $\alpha \cap h(\beta)$  sont vides,
- le seul point d'intersection des arcs  $\alpha$  et  $\beta$  est l'extrémité commune de ces deux arcs,
- $h(M)$  est en dessous  $M$  sur  $\Delta_{1,0}$ , et  $h(N)$  est à droite de  $N$  sur  $\Delta_{2,0}$  (hypothèse  $(\star)$ ),
- l'intersection  $\alpha \cap h(\beta)$  est simple ou vide (et d'après la propriété précédente, cette intersection ne peut pas être vide).

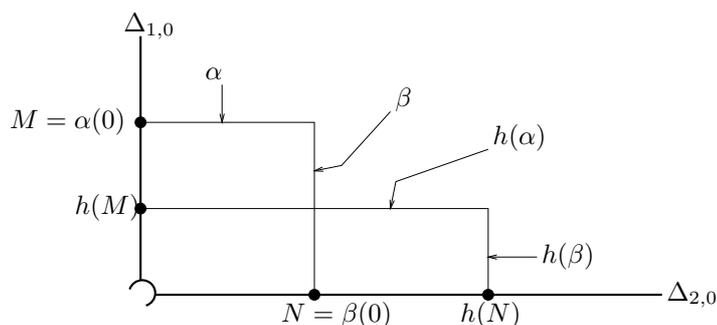


FIGURE 25 – Les arcs  $\alpha$ ,  $h(\alpha)$ ,  $\beta$  et  $h(\beta)$

On définit les compacts  $R_1$  et  $R_2$  comme sur la figure 26. Clairement, il existe un homéomorphisme  $\varphi_1 : [0, 1]^2 \rightarrow R_1$  qui fait de  $R_1$  un rectangle dont les côtés horizontaux sont les arcs  $\alpha$  et  $h(\alpha) \cap R_1$ , et dont les côtés verticaux sont les arcs  $\Delta_{1,0} \cap R_1$  et  $\beta \cap R_1$ . De façon similaire, il existe un homéomorphisme  $\varphi_2 : [0, 1]^2 \rightarrow R_2$  qui fait de  $R_2$  un rectangle dont les côtés horizontaux sont les arcs  $\Delta_{2,0} \cap R_2$  et  $h(\alpha) \cap R_2$ , et dont les côtés verticaux sont les arcs  $\beta \cap R_2$  et  $h(\beta)$ .

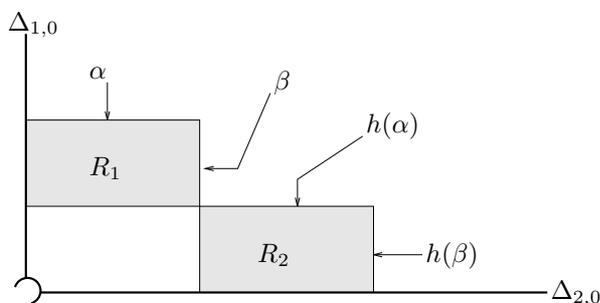


FIGURE 26 – Les rectangles  $R_1$  et  $R_2$

### 13.2 Disposition d'un nombre fini d'itérés des rectangles $R_1, R_2$

**Remarque 13.2** Quel que soit  $n$ , la configuration des rectangles  $h^{-n}(R_1), \dots, h^n(R_1)$  et  $R_2$  et des droites  $\Delta_{1,0}$  et  $\Delta_{2,0}$  est homéomorphe à celle de la figure 27. Ceci résulte du théorème de Schoenflies-Homma (voir l'appendice) et des propriétés suivantes :

- les arcs  $\{h^p(\alpha)\}_{p \in \mathbb{Z}}$  sont disjoints deux à deux (voir remarque 11.2) ;
- les arcs  $\{h^q(\beta)\}_{q \in \mathbb{Z}}$  sont disjoints deux à deux ;
- si  $p < q$ , l'intersection de  $h^p(\alpha)$  et de  $h^q(\beta)$  est vide (par construction) ;
- si  $p \geq q$ , l'intersection de  $h^p(\alpha)$  et de  $h^q(\beta)$  est simple (par construction) et non-vide (d'après la figure 26 et la dynamique de  $h$  sur les droites  $\Delta_{1,0}$  et  $\Delta_{2,0}$ ).

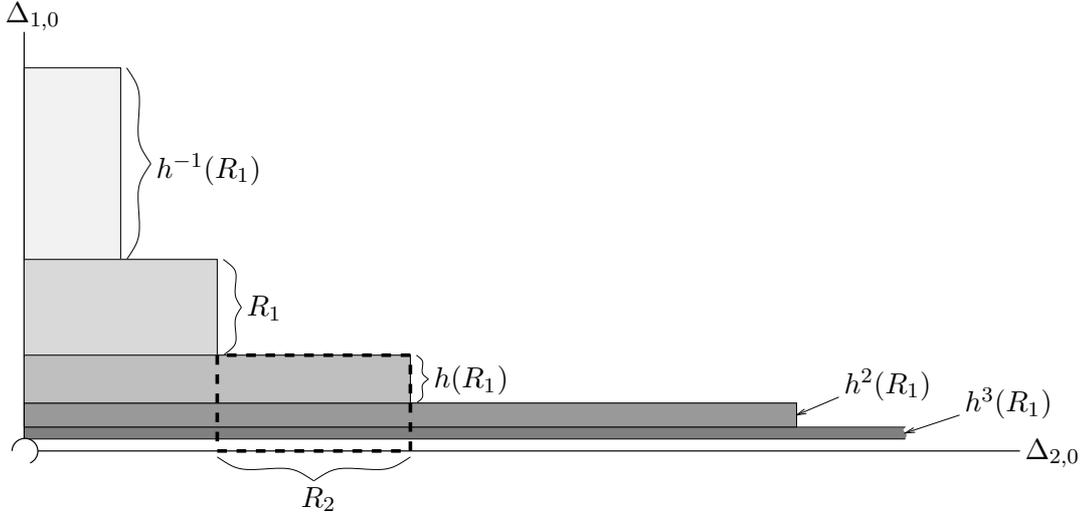


FIGURE 27 – Disposition du rectangle  $R_2$  et d'un nombre fini d'itérés du rectangle  $R_1$

**Remarque 13.3** Pour tout  $n > 0$ , grâce à la remarque précédente, le compact  $h^n(R_1) \cap R_2$  est naturellement muni d'une structure de rectangle ; ses côtés horizontaux sont les arcs  $h^n(\alpha) \cap R_2$  et  $h^{n+1}(\alpha) \cap R_2$ , et ses côtés verticaux sont les arcs  $\beta \cap h^n(R_1)$  et  $h(\beta) \cap h^n(R_1)$ . On a bien sûr une remarque symétrique pour  $R_1 \cap h^{-n}(R_2)$ .

### 13.3 L'union de tous les itérés des rectangles

On note  $\gamma$  l'union du “côté droit de  $R_1$ ” et du “côté haut de  $R_2$ ”, c'est-à-dire

$$\gamma = (\beta \cap R_1) \cup (h(\alpha) \cap R_2).$$

On note alors  $\Gamma$  l'union de tous les itérés de  $\gamma$  par  $h$  (voir figure 28).

**Lemme 13.4** L'ensemble  $\Gamma$  est une droite topologique invariante par  $h$ , qui ne sépare pas les droites topologiques  $\Delta_{1,0}$  et  $\Delta_{2,0}$ .

On note alors  $V$  l'unique fermé connexe du trois-quarts de plan  $\mathbb{R}_0^2$  dont la frontière est l'union des droites  $\Delta_{1,0}$ ,  $\Delta_{2,0}$  et  $\Gamma$  (figure 28). Par définition,  $V$  est un voisinage de  $\Delta_{1,0} \cup \Delta_{2,0}$  dans le quart de plan  $\Sigma$ .

**Lemme 13.5** On a les égalités suivantes :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h^n(R_1) = V \setminus \Delta_{2,0} \quad \text{et} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h^n(R_2) = V \setminus \Delta_{1,0}.$$

En particulier, le voisinage  $V$  est invariant par  $h$ .

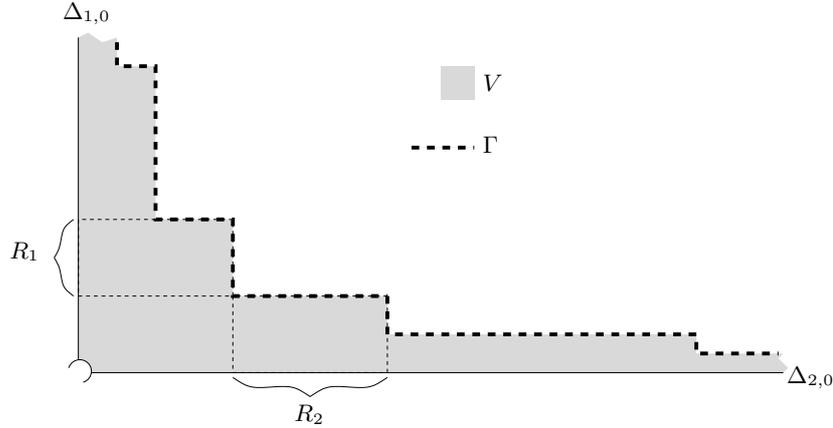


FIGURE 28 – La droite topologique  $\Gamma$  et le voisinage  $V$

**Preuve du lemme 13.4** La remarque 13.2 montre que  $\Gamma$  est l'image de  $\mathbb{R}$  par une application continue injective. Comme  $\gamma$  ne rencontre ni  $\Delta_{1,0}$  ni  $\Delta_{2,0}$ , les itérés positifs et négatifs de  $\gamma$  tendent vers l'infini (point 1 du lemme 11.3 sur les itérés d'un compact), ce qui montre que  $\Gamma$  est proprement plongée (*i.e.* est une droite topologique).

La même remarque 13.2 montre que  $\Gamma$  ne rencontre pas l'intérieur des rectangles  $h(R_1)$  et  $R_2$ . Par suite,  $\Gamma$  ne sépare pas  $\Delta_{1,0}$  de  $\Delta_{2,0}$ .  $\triangle$

**Preuve du lemme 13.5** On note  $W = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h^n(R_1)$ . Clairement  $W$  est inclus dans  $V \setminus \Delta_{2,0}$ . Pour montrer la première égalité du lemme, il suffit donc de montrer que  $W$  contient  $V \setminus \Delta_{2,0}$ .

Supposons le contraire. Alors, par connexité de  $V \setminus \Delta_{2,0}$ , il existe un point  $x \in V \setminus \Delta_{2,0}$  qui est dans la frontière de  $W$ . La remarque 13.2 montre que ce point  $x$  ne peut pas appartenir à  $W$  ( $W$  est ouvert dans  $V$ ). On en déduit que la famille  $\{h^n(R_1)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  n'est pas localement finie au voisinage de  $x$ . Ceci contredit le point 1 du lemme 11.3. Par conséquent,  $W$  contient  $V \setminus \Delta_{2,0}$ .  $\triangle$

## 14 Quadrillages

Comme dans les parties précédentes, on considère un homéomorphisme  $h$  qui vérifie l'hypothèse  $(\star)$ .

### 14.1 Définition

**Définitions 14.1** Supposons donné un rectangle  $R$ . Un arc horizontal de  $R$  est un arc inclus dans  $R$ , qui joint un côté vertical de  $R$  à l'autre. Un arc vertical de  $R$  est un arc inclus dans  $R$  qui joint un côté horizontal de  $R$  à l'autre.

**Définition 14.2** Un quadrillage  $\mathcal{Q}$  de  $R$  est la donnée d'une famille (finie ou infinie) d'arcs horizontaux de  $R$  et d'une famille (finie ou infinie) d'arcs verticaux de  $R$  telles que :

- les quatre côtés horizontaux et verticaux de  $R$  sont des arcs de  $\mathcal{Q}$ ,
- les arcs horizontaux (resp. verticaux) du quadrillage  $\mathcal{Q}$  sont deux à deux disjoints,
- tout arc horizontal de  $\mathcal{Q}$  a une intersection simple avec tout arc vertical de  $\mathcal{Q}$ .

**Exemple 14.3** L'exemple le plus simple de quadrillage est le quadrillage du rectangle  $[0, 1]^2$  dont les arcs horizontaux sont les arcs  $[0, 1] \times \{t\}$  (où  $t$  varie dans  $[0, 1]$ ) et dont les arcs verticaux sont les arcs  $\{t\} \times [0, 1]$  (où  $t$  varie dans  $[0, 1]$ ); on l'appellera *quadrillage canonique*.

**Définition 14.4** On dit qu'un quadrillage  $\tilde{\mathcal{Q}}$  affine (ou étend) un autre quadrillage  $\mathcal{Q}$  si tout arc horizontal (resp. vertical) de  $\mathcal{Q}$  est un arc horizontal (resp. vertical) de  $\tilde{\mathcal{Q}}$ ; on dira aussi que  $\mathcal{Q}$  est un sous-quadrillage de  $\tilde{\mathcal{Q}}$ .

On définit naturellement la notion de quadrillages homéomorphes. Nous utiliserons implicitement le fait que tout quadrillage fini d'un rectangle est homéomorphe à un sous-quadrillage du quadrillage canonique de  $[0, 1]^2$  (conséquence du théorème de Schoenflies-Homma, voir l'appendice).

**Définitions 14.5** Supposons donné un quadrillage  $\mathcal{Q}$  du rectangle  $R$ . On note  $\mathcal{H}$  l'union des arcs horizontaux de  $\mathcal{Q}$ , et  $\mathcal{V}$  l'union des arcs verticaux. La maille horizontale de  $\mathcal{Q}$  est le supremum des diamètres des composantes connexes de  $\mathcal{H} \setminus \mathcal{V}$ . On définit de même la maille verticale. Une case de  $\mathcal{Q}$  est l'adhérence d'une composante connexe de  $R \setminus (\mathcal{H} \cup \mathcal{V})$ . La maille de  $\mathcal{Q}$  est le supremum des diamètres des cases de  $\mathcal{Q}$ .

## 14.2 Quadrillages initiaux des rectangles $R_1, R_2$

On considère une paire de rectangles  $R_1, R_2$  comme construits dans la partie 13. Pour tout  $n$  positif ou nul,  $h^{-n}(\beta) \cap R_1$  est un arc vertical du rectangle  $R_1$ . On appellera  $\mathcal{Q}_1^0$  le quadrillage du rectangle  $R_1$  dont (voir figure 29) :

- les arcs horizontaux sont les deux côtés horizontaux du rectangle  $R_1$ ,
- les arcs verticaux sont  $\Delta_{1,0} \cap R_1$  et les arcs  $h^{-n}(\beta) \cap R_1$  pour tout  $n \geq 0$ .

De même, on appellera  $\mathcal{Q}_2^0$  le quadrillage du rectangle  $R_2$  dont :

- les arcs verticaux sont les deux côtés verticaux du rectangle  $R_2$ ,
- les arcs horizontaux sont  $\Delta_{2,0} \cap R_2$  et les arcs  $h^n(\alpha) \cap R_2$  pour tout  $n > 0$ .

Les quadrillages  $\mathcal{Q}_1^0$  et  $\mathcal{Q}_2^0$  seront appelés *quadrillages initiaux* des rectangles  $R_1, R_2$ .

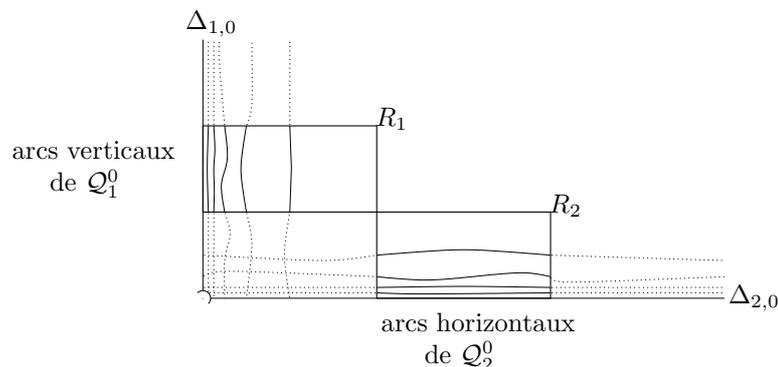


FIGURE 29 – Les quadrillages initiaux  $\mathcal{Q}_1^0, \mathcal{Q}_2^0$

### 14.3 Quadrillages duaux, localement finis, non-oscillants

**Remarque 14.6** Soit  $\mathcal{Q}_1$  un quadrillage du rectangle  $R_1$  qui affine le quadrillage initial  $\mathcal{Q}_1^0$ , et  $n$  un entier strictement positif. On rappelle que  $R_1 \cap h^{-n}(R_2)$  est naturellement un rectangle (remarque 13.3). Les côtés verticaux de ce rectangle sont des arcs verticaux du quadrillage  $\mathcal{Q}_1^0$  (par définition de  $\mathcal{Q}_1^0$ ), donc *a fortiori* du quadrillage  $\mathcal{Q}_1$ . Par suite, la trace du quadrillage  $\mathcal{Q}_1$  sur le rectangle  $R_1 \cap h^{-n}(R_2)$  est un quadrillage de ce rectangle, que l'on note  $\mathcal{Q}_{1|(R_1 \cap h^{-n}(R_2))}$ .

Si  $\mathcal{Q}_2$  est un quadrillage du rectangle  $R_2$  qui affine le quadrillage initial  $\mathcal{Q}_2^0$ , et  $n$  un entier strictement positif, on définit de la même manière un quadrillage  $\mathcal{Q}_{2|(R_2 \cap h^n(R_1))}$ .

**Définition 14.7** (figure 30) Soient  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$  des quadrillages des rectangles  $R_1, R_2$  qui affinent les quadrillages initiaux  $\mathcal{Q}_1^0, \mathcal{Q}_2^0$ . On dira que les quadrillages  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$  sont duaux si, pour tout  $n$  strictement positif, l'homéomorphisme  $h^n$  envoie le quadrillage  $\mathcal{Q}_{1|(R_1 \cap h^{-n}(R_2))}$  sur le quadrillage  $\mathcal{Q}_{2|(R_2 \cap h^n(R_1))}$ .

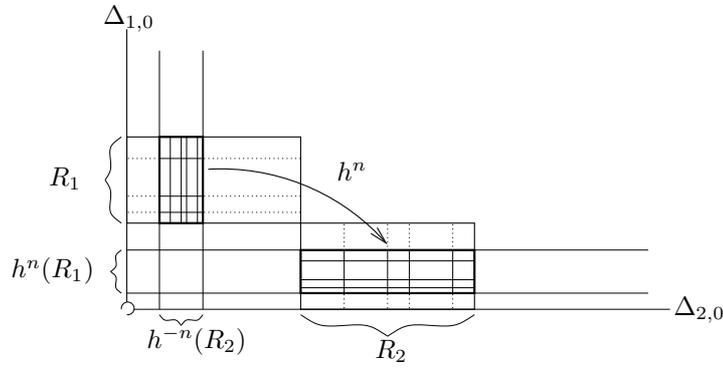


FIGURE 30 – Quadrillages duaux

**Remarque 14.8** Si  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$  sont des quadrillages duaux, alors pour tout  $\gamma$  arc horizontal de  $\mathcal{Q}_1$ , pour tout  $\delta$  arc vertical de  $\mathcal{Q}_2$ , pour tous entiers  $p, q$ , l'intersection  $h^p(\gamma) \cap h^q(\delta)$  est simple ou vide.

**Définition 14.9** On considère deux quadrillages duaux  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$  des rectangles  $R_1, R_2$ . On dira que les quadrillages  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$  sont localement finis si le quadrillage  $\mathcal{Q}_1$  n'a qu'un nombre fini d'arcs horizontaux et si le quadrillage  $\mathcal{Q}_2$  n'a qu'un nombre fini d'arcs verticaux.

**Remarque 14.10** Considérons des quadrillages duaux  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$  localement finis. Alors, d'après le lemme 11.3 sur les itérés d'un compact, tout compact de  $R_1 \setminus \Delta_{1,0}$  ne rencontre qu'un nombre fini d'arcs verticaux de  $\mathcal{Q}_1$ ; de même, tout compact de  $R_2 \setminus \Delta_{2,0}$  ne rencontre qu'un nombre fini d'arcs horizontaux de  $\mathcal{Q}_2$ . En particulier, l'ensemble des arcs des quadrillages  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$  est au plus dénombrable.

**Définition 14.11** Un quadrillage  $\mathcal{Q}_1$  du rectangle  $R_1$  sera dit non-oscillant si chacun des arcs horizontaux de  $\mathcal{Q}_1$  est uniformément non-oscillant. Un quadrillage  $\mathcal{Q}_2$  du rectangle  $R_2$  sera dit non-oscillant si chacun des arcs verticaux de  $\mathcal{Q}_2$  est uniformément non-oscillant.

**Remarque 14.12** Les quadrillages initiaux  $\mathcal{Q}_1^0, \mathcal{Q}_2^0$  sont duaux, non-oscillants et localement finis.

## 15 Un lemme pour affiner les quadrillages

On considère toujours un homéomorphisme  $h$  qui vérifie l'hypothèse  $(\star)$ , ainsi qu'une paire de rectangles  $R_1, R_2$  comme construits dans la partie 13.

Pour définir une conjugaison entre les homéomorphismes  $h$  et  $h_0$ , on utilisera deux suites de quadrillages de plus en plus fins des rectangles  $R_1, R_2$ . Le lemme ci-dessous est le résultat technique fondamental qui permet la construction de telles suites de quadrillages.

**Lemme 15.1 (lemme d'affinage)** *On considère deux quadrillages duaux  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$  des rectangles  $R_1, R_2$ . On suppose que ces quadrillages sont localement finis et non-oscillants.*

*Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe des quadrillages duaux  $\tilde{\mathcal{Q}}_1, \tilde{\mathcal{Q}}_2$  qui affinent les quadrillages  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ , qui sont tous deux localement finis, non-oscillants, et qui sont tous deux de mailles inférieures à  $\varepsilon$ .*

La preuve du lemme 15.1 se décomposera en deux parties :

**Lemme 15.2 (affinage de la maille verticale)** *On considère deux quadrillages duaux  $\mathcal{Q}_1$  et  $\mathcal{Q}_2$  des rectangles  $R_1$  et  $R_2$ . On suppose ces quadrillages localement finis et non-oscillants.*

*Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe deux quadrillages duaux, localement finis, non-oscillants  $\mathcal{Q}'_1, \mathcal{Q}'_2$  des rectangles  $R_1, R_2$ , qui affinent les quadrillages  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ , et tels que les mailles verticales des quadrillages  $\mathcal{Q}'_1, \mathcal{Q}'_2$  sont inférieures à  $\varepsilon$ .*

**Lemme 15.3 (affinage de la maille horizontale)** *Le même que le précédent, en changeant "mailles verticales" en "mailles horizontales".*

Commençons par un lemme technique qui nous permettra, dans la preuve du lemme 15.2, de découper des arcs du quadrillage  $\mathcal{Q}_1$  en sous-arcs de diamètres inférieurs à  $\varepsilon$  :

**Lemme 15.4** *On considère une suite d'arcs du plan  $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . On suppose que la suite d'arcs  $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$  converge en topologie de Hausdorff vers un arc  $v_\infty$ , et est équi-localement connexe au voisinage de tout point de  $v_\infty$ . Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on se donne deux points  $P_i, Q_i \in v_i$  de manière à ce que les suites  $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}, (Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$  convergent vers des points  $P_\infty, Q_\infty \in v_\infty$ .*

*Alors, la suite de sous-arcs  $[P_i Q_i]_{v_i}$  tend vers le sous-arc  $[P_\infty Q_\infty]_{v_\infty}$  en topologie de Hausdorff. En particulier, les diamètres des sous-arcs  $[P_i Q_i]_{v_i}$  tendent vers le diamètre du sous-arc  $[P_\infty Q_\infty]_{v_\infty}$ .*

### Preuve du lemme 15.4

1) Dans un premier temps, on suppose que la suite de sous-arcs  $[P_i, Q_i]_{v_i}$  converge en topologie de Hausdorff et on note  $w$  sa limite. On doit montrer l'égalité  $w = [P_\infty, Q_\infty]_{v_\infty}$ .

Le compact  $w$  est connexe et inclus dans l'arc  $v_\infty$ . Par ailleurs, les points  $P_\infty, Q_\infty$  appartiennent à  $w$ . On en déduit que  $w$  contient le sous-arc  $[P_\infty, Q_\infty]_{v_\infty}$ .

On raisonne par l'absurde : on suppose qu'il existe un point  $R_\infty \in w \setminus [P_\infty, Q_\infty]_{v_\infty}$ . Pour fixer les idées, on suppose que le point  $Q_\infty$  est entre les points  $P_\infty$  et  $R_\infty$  sur l'arc  $v_\infty$  (figure 31). Alors, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on peut trouver un point  $R_i \in [P_i, Q_i]_{v_i}$  tel que  $R_i \rightarrow R_\infty$ . Quitte à extraire une sous-suite, on suppose que la suite des sous-arcs  $[P_i, R_i]_{v_i}$  converge en topologie de Hausdorff, et on note  $w'$  sa limite. Alors,  $w'$  est un compact connexe,  $w'$  est inclus dans  $v_\infty$ , et les points  $P_\infty$  et  $R_\infty$  appartiennent à  $w'$  ; en particulier, le point  $Q_\infty$  appartient à  $w'$ . Pour tout  $i$ , on peut donc trouver un point  $T_i \in [P_i, R_i]_{v_i}$ , de manière à ce que  $(T_i) \rightarrow Q_\infty$ . Ceci contredit la version séquentielle de l'équi-locale connexité de la suite d'arcs  $(v_i)$  au voisinage du point  $Q_\infty$  (propriété 3 de la proposition 3.3, voir figure 31). Par conséquent, l'hypothèse est absurde, et on a l'égalité  $w = [P_\infty, Q_\infty]_{v_\infty}$ .

2) Si la suite de sous-arcs  $[P_i, Q_i]_{v_i}$  ne converge pas en topologie de Hausdorff, on applique le raisonnement ci-dessus à chaque sous-suite convergente. On en déduit que chaque valeur d'adhérence (pour la topologie) de la suite de sous-arcs  $[P_i, Q_i]_{v_i}$  est égale au sous-arc  $[P_\infty, T_\infty]_{v_\infty}$ , ce qui achève la preuve.  $\triangle$

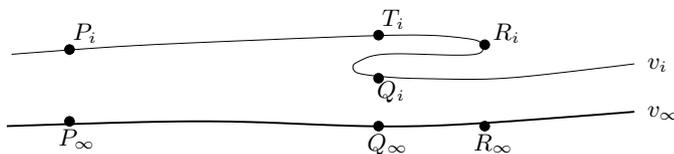


FIGURE 31 – Les points  $P_i, Q_i, R_i, T_i$  et  $P_\infty, Q_\infty, R_\infty, T_\infty$  introduits dans la preuve du lemme 15.4

**Preuve du lemme 15.2 (affinage de la maille verticale)** Les quadrillages  $\mathcal{Q}'_1$  et  $\mathcal{Q}'_2$  seront obtenus en rajoutant des arcs horizontaux aux quadrillages  $\mathcal{Q}_1$  et  $\mathcal{Q}_2$ . La preuve se fait en quatre étapes (à chaque étape, on rajoute des arcs horizontaux soit à  $\mathcal{Q}_1$ , soit à  $\mathcal{Q}_2$ ).

**Étape 1** (figure 32) On note  $\gamma_1, \dots, \gamma_q$  les arcs horizontaux du quadrillage  $\mathcal{Q}_1$ , et  $P_1, \dots, P_q$  les extrémités de ces arcs situées sur  $\Delta_{1,0}$ . On note  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\infty$  les arcs verticaux de  $\mathcal{Q}_1$  indexés “de la droite vers la gauche” (en particulier,  $\delta_\infty = \Delta_{1,0} \cap R_1$ ).

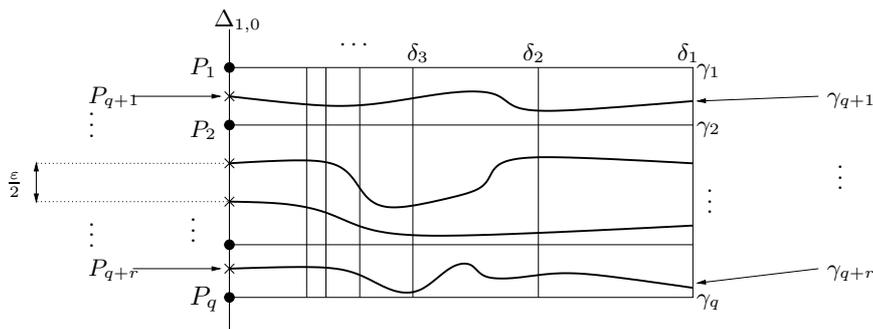


FIGURE 32 – Les arcs horizontaux et verticaux du quadrillage  $\mathcal{Q}_1$ , et ceux construits à l'étape 1

On choisit alors des points  $P_{q+1}, \dots, P_{q+r}$  sur  $\delta_\infty \setminus \{P_1, \dots, P_q\}$  de façon à ce que les points  $P_1, \dots, P_{q+r}$  découpent l'arc  $\delta_\infty$  en sous-arcs de diamètres inférieurs à  $\varepsilon/2$  (c'est-à-dire que les composantes connexes de  $v_\infty \setminus \{P_1, \dots, P_{q+r}\}$  sont de diamètres inférieurs à  $\varepsilon/2$ ).

Comme les quadrillages  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$  sont duaux, les arcs  $\delta_1, \delta_2, \dots$  proviennent des itérés des arcs verticaux du quadrillage  $\mathcal{Q}_2$ , et ces arcs verticaux sont en nombre fini puisque  $\mathcal{Q}_2$  est localement fini. Le lemme d'existence d'arcs uniformément non-oscillants (lemme 12.5) montre l'existence d'arcs  $\gamma_{q+1}, \dots, \gamma_{q+r}$  tels que :

1. pour tout  $i$ ,  $\gamma_i$  germe en  $P_i$ ,
2. pour tout  $i$ ,  $\gamma_i$  est uniformément non-oscillant,
3. pour tout  $i$ ,  $\gamma_i$  a une intersection simple avec chacun des arcs  $\delta_1, \delta_2, \dots$

On remarque que les propriétés 1 et 2 ci-dessus ne dépendent que des germes des arcs  $\gamma_{q+1}, \dots, \gamma_{q+r}$ . Quitte à remplacer les arcs  $\gamma_{q+1}, \dots, \gamma_{q+r}$  par des arcs ayant les mêmes germes (tronquer puis prolonger), on supposera de plus que :

- les arcs  $\gamma_1, \dots, \gamma_{q+r}$  sont deux à deux disjoints et inclus dans  $R_1$ .
- les arcs  $\gamma_1, \dots, \gamma_{q+r}$  sont des arcs horizontaux du rectangle  $R_1$ .

Les arcs horizontaux  $\gamma_1, \dots, \gamma_{q+r}$  et les arcs verticaux  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\infty$  forment alors un quadrillage non-oscillant du rectangle  $R_1$ . On note  $\overline{\mathcal{Q}}_1$  ce quadrillage.

**Étape 2** (figure 33) Le lemme 15.4 montre l'existence d'un entier  $i_0$  tel que, pour tout  $i > i_0$ , les arcs horizontaux  $\gamma_1, \dots, \gamma_{q+r}$  découpent l'arc vertical  $\delta_i$  en sous-arcs de diamètres inférieurs à  $\varepsilon$ . On considère des points  $M_1, \dots, M_s$  sur les arcs  $\delta_1, \dots, \delta_{i_0}$  qui découpent ces arcs en sous-arcs de diamètres inférieurs à  $\varepsilon$  (on peut toujours supposer que les points  $M_1, \dots, M_s$  ne sont pas sur les arcs  $\gamma_1, \dots, \gamma_{q+r}$ ).

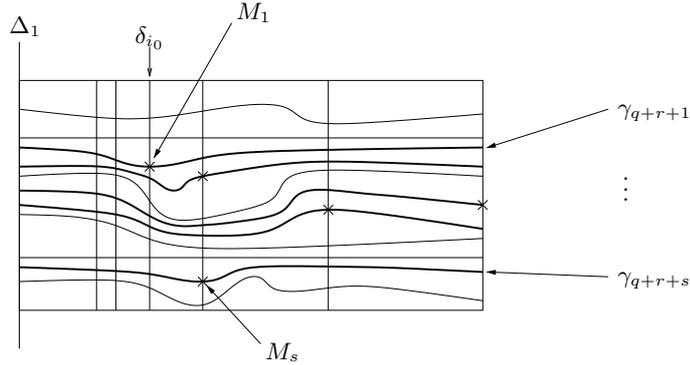


FIGURE 33 – Les points  $M_1, \dots, M_s$

À nouveau, le lemme 12.5 permet de trouver un arc horizontal  $\gamma_{q+r+1}$  de  $R_1$ , non-oscillant, disjoint des arcs horizontaux  $\gamma_1, \dots, \gamma_{q+r}$ , ayant une intersection simple avec les arcs verticaux  $\delta_1, \dots, \delta_\infty$ , et passant par le point  $M_1$ .

On construit ainsi successivement les arcs horizontaux  $\gamma_{q+r+1}, \dots, \gamma_{q+r+s}$  passant respectivement par les points  $M_1, \dots, M_s$ . Les arcs horizontaux  $\gamma_1, \dots, \gamma_{q+r+s}$  et les arcs verticaux  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\infty$  forment alors un quadrillage non-oscillant du rectangle  $R_1$ , de maille verticale inférieure à  $\varepsilon$ .

**Étape 3** Le quadrillage  $\mathcal{Q}_2$  est localement fini : il ne contient qu'un nombre fini d'arcs verticaux ; par conséquent, on peut trouver un ensemble fini  $E$  de points situés sur les arcs verticaux du quadrillage  $\mathcal{Q}_2$ , et qui découpent ces arcs verticaux en sous-arcs de diamètres inférieurs à  $\varepsilon$ . L'intersection des orbites des points de  $E$  avec le rectangle  $R_1$  est un ensemble fini  $E'$  (parce que les points errent, voir le corollaire 1.2). Comme les quadrillages  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$  sont duaux, les points de  $E'$  sont situés sur des arcs verticaux du quadrillage  $\mathcal{Q}_1$ . Comme à l'étape 2, on construit des arcs horizontaux  $\gamma_{q+r+s+1}, \dots, \gamma_{q+r+s+t}$  de  $R_1$ , non-oscillants, deux à deux disjoints, disjoints des arcs horizontaux  $\gamma_1, \dots, \gamma_{q+r+s}$ , ayant une intersection simple avec les arcs verticaux  $\delta_1, \dots, \delta_\infty$  et passant par les points de  $E'$ .

Les arcs horizontaux  $\gamma_1, \dots, \gamma_{q+r+s+t}$  et les arcs verticaux  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\infty$  forment un nouveau quadrillage non-oscillant du rectangle  $R_1$ , de maille verticale inférieure à  $\varepsilon$  ; on note  $\mathcal{Q}'_1$  ce quadrillage.

**Étape 4** Soit  $\alpha$  un arc horizontal de  $\mathcal{Q}'_1$ , et  $n$  un entier strictement positif. Comme  $\mathcal{Q}'_1$  affine  $\mathcal{Q}_1$ , et que  $\mathcal{Q}_1$  et  $\mathcal{Q}_2$  sont duaux,  $h^n(\alpha) \cap R_2$  est un arc horizontal du rectangle  $R_2$ . On obtient le quadrillage  $\mathcal{Q}'_2$  en rajoutant aux arcs horizontaux de  $\mathcal{Q}_2$  tous les arcs de ce type (pour vérifier qu'il s'agit bien d'un quadrillage, il suffit d'utiliser le fait que  $\mathcal{Q}_1$  et  $\mathcal{Q}_2$  sont duaux).

Le quadrillage  $\mathcal{Q}'_2$  a les mêmes arcs verticaux que  $\mathcal{Q}_2$  donc est localement fini et non-oscillant. Par construction, les quadrillages  $\mathcal{Q}'_1$  et  $\mathcal{Q}'_2$  sont duaux. D'après l'étape 3,  $\mathcal{Q}'_2$  est de maille verticale inférieure à  $\varepsilon$ .  $\triangle$

Le lemme 15.2 est prouvé. La preuve lemme 15.3 est entièrement identique (il suffit d'échanger les rôles des homéomorphismes  $h$  et  $h^{-1}$ , des rectangles  $R_1, R_2$ , ainsi que les rôles des arcs horizontaux et verticaux).

**Preuve du lemme d'affinage 15.1** Pour obtenir le lemme 15.1, il suffit de mettre bout à bout les lemmes 15.2 et 15.3 à la lumière de la remarque suivante : *la maille d'un quadrillage  $\mathcal{Q}$  (localement fini) est inférieure à deux fois la somme de la maille horizontale et de la maille verticale.*  $\triangle$

## 16 Un lemme pour compléter les quadrillages

**Définitions 16.1** Soit  $R$  un rectangle et  $\mathcal{Q}$  un quadrillage de  $R$ . On dit que le quadrillage  $\mathcal{Q}$  est complet si par tout point de  $R$  il passe un arc horizontal et un arc vertical de  $\mathcal{Q}$ .

Le lemme suivant fournit un critère permettant d'étendre un quadrillage dénombrable du carré en un quadrillage complet :

**Lemme 16.2 (Extension des quadrillages)**

1. Tout quadrillage complet d'un carré est homéomorphe au quadrillage canonique<sup>6</sup>.
2. Soit  $\mathcal{C}$  un quadrillage du carré  $[0, 1]^2$ . Supposons que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un sous-quadrillage fini de  $\mathcal{C}$  dont la maille est inférieure à  $\varepsilon$ . Alors  $\mathcal{C}$  s'étend de manière unique en un quadrillage complet.

**Preuve**

**Premier point** Soit  $\mathcal{C}$  un quadrillage complet du carré  $[0, 1]^2$ . On définit une application  $\varphi$  du carré dans lui-même de la façon suivante. Puisque le quadrillage  $\mathcal{C}$  est complet, pour tout point  $M$  du carré, il existe un unique arc horizontal  $\alpha_M$  de  $\mathcal{C}$  qui contient  $M$ . On note  $y_M$  l'unique élément de l'intervalle  $[0, 1]$  tel que  $(0, y_M) \in \alpha_M$ . On définit de même  $x_M$  tel que  $(x_M, 0)$  est sur le même arc vertical de  $\mathcal{C}$  que  $M$ . On pose alors  $\varphi(M) = (x_M, y_M)$ .

Les propriétés des quadrillages entraînent l'injectivité de  $\varphi$ , et la complétude implique sa surjectivité.

Montrons la continuité. On suppose pour simplifier que  $M$  est dans l'intérieur du carré, l'autre cas se prouvant de manière analogue. Soit  $(x, y) = \varphi(M)$ , et  $\varepsilon > 0$  assez petit. On note  $T_h$  le tube compris entre les deux arcs horizontaux passant par les points  $(0, y - \varepsilon)$  et  $(0, y + \varepsilon)$ . On définit de même le tube vertical  $T_v$ . Les propriétés de séparation des courbes du plan entraînent que  $T_h \cap T_v$  est un voisinage de  $M$ , et que  $\varphi(T_h \cap T_v) \subset [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \times [y - \varepsilon, y + \varepsilon]$ . Ceci montre la continuité de  $\varphi$  au point  $M$ . Par compacité,  $\varphi^{-1}$  est également continue : c'est donc un homéomorphisme du carré, qui envoie le quadrillage  $\mathcal{C}$  sur le quadrillage canonique, ce qui prouve le premier point.

---

<sup>6</sup>voir l'exemple 14.3

**Deuxième point** Pour montrer l'existence d'un quadrillage complet qui étend  $\mathcal{C}$ , on construit directement un homéomorphisme qui envoie  $\mathcal{C}$  sur un sous-quadrillage du quadrillage canonique. On considère pour cela l'ensemble

$$E = \left( \bigcup \{ \alpha \text{ arc horizontal de } \mathcal{C} \} \right) \cap \left( \bigcup \{ \beta \text{ arc vertical de } \mathcal{C} \} \right).$$

On définit une application  $\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow [0, 1]^2 \\ M & \longmapsto (x_M, y_M) \end{cases}$  comme dans la preuve du premier point.

D'après l'hypothèse sur  $\mathcal{C}$ ,  $E$  est dense dans le carré. Soit  $\varepsilon > 0$ , et  $\mathcal{C}_\varepsilon$  un sous-quadrillage fini de  $\mathcal{C}$  dont le diamètre est inférieur à  $\varepsilon$ . En considérant le nombre

$$\delta = \min \{ d(C_1, C_2) \mid C_1, C_2 \text{ cases disjointes de } \mathcal{C} \}.$$

où  $d(C_1, C_2)$  est la distance minimale entre un point de  $C_1$  et un point de  $C_2$ , on montre que  $\varphi$  est uniformément continue sur  $E$ .

On en déduit que  $\varphi$  se prolonge continûment à  $[0, 1]^2$  en une application  $\tilde{\varphi}$  ([14, théorème 2-83]). Il reste à montrer que  $\tilde{\varphi}$  est un homéomorphisme, ce qui ne pose pas de problème.

Pour montrer l'unicité de l'extension en un quadrillage complet, il suffit de vérifier la propriété suivante : si  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont deux arcs horizontaux du carré  $[0, 1]^2$ , qui sont tous deux disjoints de tous les arcs horizontaux du quadrillage  $\mathcal{C}$ , alors  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont disjoints ou confondus. △

## 17 Construction de la conjugaison

Tous les éléments nécessaires à la preuve du théorème 2bis sont réunis. On considère donc un homéomorphisme de Brouwer  $h$  tel que l'ensemble des couples singuliers de  $h$  est un produit de deux droites topologiques, et tel que l'ensemble oscillant de  $h$  est vide. D'après la proposition 10.1, quitte à conjuguer, on peut supposer que  $h$  vérifie l'hypothèse  $(\star)$  (notation 10.4). Nous allons construire une conjugaison entre les homéomorphismes  $h$  et  $h_0$ .

### 17.1 Construction d'une paire de quadrillages complets duaux

On considère maintenant une paire de rectangles  $R_1, R_2$  comme construite à la section 13. Grâce aux résultats des sections 15 et 16, nous allons construire une paire de quadrillages complets duaux des rectangles  $R_1, R_2$ .

- On considère d'abord sur les rectangles  $R_1$  et  $R_2$  les quadrillages initiaux  $\mathcal{Q}_1^0$  et  $\mathcal{Q}_2^0$  construits à la section 14.2.

- On choisit alors une suite  $(\varepsilon_k)_{k \geq 0}$  de réels strictement positifs tendant vers 0. Le lemme d'affinage 15.1, appliqué une infinité de fois, fournit deux suites de quadrillages  $(\mathcal{Q}_1^k)_{k \geq 0}$  et  $(\mathcal{Q}_2^k)_{k \geq 0}$  telles que, pour tout  $k \geq 0$ , les quadrillages  $\mathcal{Q}_1^{k+1}, \mathcal{Q}_2^{k+1}$  sont duaux, localement finis, non-oscillants, de maille inférieure à  $\varepsilon_k$ , et affinent les quadrillages  $\mathcal{Q}_1^k, \mathcal{Q}_2^k$ .

- On considère le quadrillage  $\mathcal{Q}_1^\infty$  de  $R_1$  obtenu en prenant tous les arcs horizontaux et tous les arcs verticaux de tous les quadrillages  $(\mathcal{Q}_1^k)_{k \geq 0}$ ; on définit de même le quadrillage  $\mathcal{Q}_2^\infty$ .

- On voit facilement que ces deux quadrillages vérifient les hypothèses du lemme de complétion 16.2 (point 2); on peut donc les étendre en deux quadrillages complets  $\mathcal{Q}_1$  et  $\mathcal{Q}_2$ .

**Lemme 17.1** *Les quadrillages  $\mathcal{Q}_1$  et  $\mathcal{Q}_2$  sont duaux.*

**Preuve** Soit  $n > 0$ . Rappelons que le compact  $R = R_1 \cap h^{-n}(R_2)$  est naturellement muni d'une structure de rectangle (remarque 13.3) ; et que les quadrillages  $\mathcal{Q}_1^0, \mathcal{Q}_1^1, \dots, \mathcal{Q}_1^\infty$  et  $\mathcal{Q}_1$  induisent chacun un quadrillage sur ce rectangle (puisqu'ils affinent le quadrillage initial  $\mathcal{Q}_1^0$ , voir la remarque 14.6). De même, les quadrillages  $\mathcal{Q}_2^0, \mathcal{Q}_2^1, \dots, \mathcal{Q}_2^\infty$  et  $\mathcal{Q}_2$  induisent des quadrillages sur le rectangle  $R' = h^n(R_1) \cap R_2$ .

Par dualité, pour tout  $k \geq 0$ , la trace de  $\mathcal{Q}_2^k$  sur  $R'$  est l'image par  $h^n$  de la trace de  $\mathcal{Q}_1^k$  sur  $R$ . Par conséquent, l'homéomorphisme  $h^n$  envoie aussi la trace de  $\mathcal{Q}_1^\infty$  sur  $R$  sur la trace de  $\mathcal{Q}_2^\infty$  sur  $R'$ . Par unicité de la complétion de quadrillage (lemme 16.2), l'homéomorphisme  $h^n$  envoie encore la trace de  $\mathcal{Q}_1$  sur  $R$  sur la trace de  $\mathcal{Q}_2$  sur  $R'$  : ceci prouve le lemme.  $\triangle$

**Remarque 17.2** On peut prouver (en utilisant la dualité) que les quadrillages  $\mathcal{Q}_1$  et  $\mathcal{Q}_2$  sont non-oscillants, mais cette propriété n'intervient pas directement dans la suite.

## 17.2 Construction d'une conjugaison sur $V$

Nous allons maintenant construire une application  $g$ , définie sur le fermé<sup>7</sup>  $V$ , qui conjugue les homéomorphismes  $h$  et  $h_0$ . L'image de  $V$  par  $g$  sera un voisinage  $V_0$  de  $\Delta_{1,0} \cup \Delta_{2,0}$  dans  $\Sigma$ , qui sera invariant par  $h_0$ . L'application réalisera un homéomorphisme de  $V$  sur  $V_0$ .

**Construction de l'application  $g$**  Soit  $M$  un point de  $V \setminus \Delta_{2,0}$ . D'après le lemme 13.5, il existe un entier  $p$  tel que le rectangle  $h^p(R_1)$  contient  $M$ . Puisque le quadrillage  $\mathcal{Q}_1$  est complet, il existe un arc horizontal  $\alpha$  du quadrillage  $\mathcal{Q}_1$  tel que  $M$  appartient à l'arc  $\alpha(M) = h^p(\alpha)$ . La disposition des itérés du rectangle  $R_1$  (figure 27 et remarque 13.2) montre que l'arc  $\alpha(M)$  ainsi obtenu ne dépend que du point  $M$  (bien qu'il puisse y avoir deux choix pour l'entier  $p$ ). Soit  $M_1$  le point d'intersection de  $\alpha(M)$  avec  $\Delta_{1,0}$  ; on note  $\hat{y}(M)$  son ordonnée (figure 34).

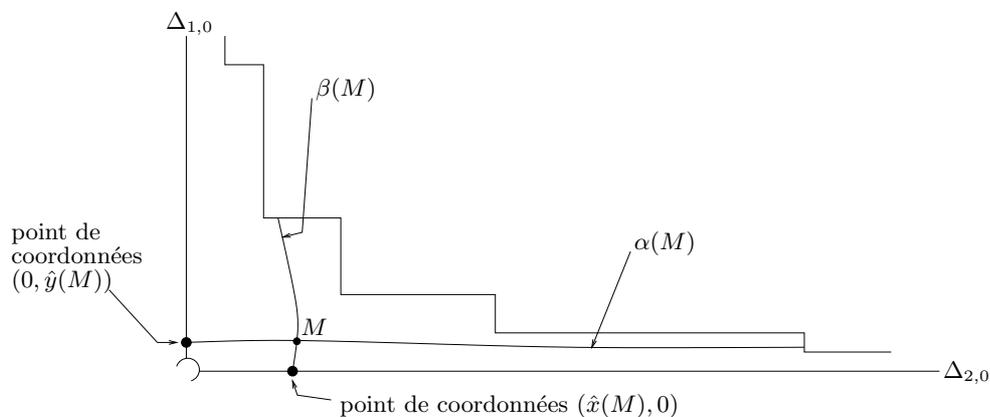


FIGURE 34 – Construction de la conjugaison sur  $V$

La fonction  $\hat{y}$  est ainsi définie sur  $V \setminus \Delta_{2,0}$  ; on la prolonge par la valeur 0 sur  $\Delta_{2,0}$ . De manière symétrique, on définit pour tout point  $M$  de  $V \setminus \Delta_{1,0}$  un arc  $\beta(M)$ , puis une fonction  $\hat{x}$  (voir la figure 34). Enfin, on pose  $g(M) = (\hat{x}(M), \hat{y}(M))$ .

**L'application  $g$  est une conjugaison** En reprenant la construction de l'application  $g$ , et en utilisant l'égalité des restrictions de  $h$  et  $h_0$  à  $\Delta_{1,0} \cup \Delta_{2,0}$  ainsi que la formule  $h_0(\hat{x}, \hat{y}) = (2\hat{x}, \hat{y}/2)$ , on vérifie immédiatement que, pour tout point  $M$  de  $V$ , on a  $g \circ h(M) = h_0 \circ g(M)$ . Autrement dit, l'application  $g$  conjugue  $h$  à  $h_0$ .

<sup>7</sup>Le lecteur ayant oublié la définition de  $V$  est pardonné et invité à jeter un œil sur la figure 28.

**Image de  $V$  par  $g$**  On note  $M_0$  l'unique point d'intersection des rectangles  $R_1$  et  $R_2$ . On note  $R_{1,0}$ ,  $R_{2,0}$  et  $\gamma_0$  les images par  $g$  des rectangles  $R_1$ ,  $R_2$  et de l'arc  $\gamma$ . La définition de  $g$  montre que

$$\begin{aligned} R_{1,0} &= \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \hat{x}(M_0) \text{ et } \hat{y}(M_0) \leq y \leq 2\hat{y}(M_0)\} \\ R_{2,0} &= \{(x, y) \mid \hat{x}(M_0) \leq x \leq 2\hat{x}(M_0) \text{ et } 0 \leq y \leq \hat{y}(M_0)\} \\ \gamma_0 &= \{(x, y) \mid x = \hat{x}(M_0) \text{ et } \hat{y}(M_0) \geq y \geq 2\hat{y}(M_0)\} \\ &\quad \cup \{(x, y) \mid \hat{x}(M_0) \geq x \geq 2\hat{x}(M_0) \text{ et } y = \hat{y}(M_0)\}. \end{aligned}$$

On pose alors

$$\Gamma_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h_0^n(\gamma_0).$$

En utilisant la définition explicite de  $h_0$ , on montre immédiatement que  $\Gamma_0$  est une droite topologique invariante par  $h_0$ . Par ailleurs, puisque  $g$  conjugue  $h$  et  $h_0$ , on a l'égalité  $\Gamma_0 = g(\Gamma)$ .

On note maintenant  $V_0$  l'unique fermé connexe du trois-quarts de plan  $\mathbb{R}_0^2$  dont la frontière est l'union des trois droites topologiques  $\Delta_{1,0}$ ,  $\Delta_{2,0}$  et  $\Gamma_0$ . On a alors :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h_0^n(R_{1,0}) = V_0 \setminus \Delta_{2,0} \quad \text{et} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h_0^n(R_{2,0}) = V_0 \setminus \Delta_{1,0}$$

(ces égalités s'obtiennent très facilement en utilisant les formules explicites qui définissent  $R_{1,0}$ ,  $R_{2,0}$ ,  $\gamma_0$  et  $h_0$ ). Comme  $g$  conjugue  $h$  et  $h_0$ , on en déduit que  $V_0 = g(V)$ .

**Injectivité de  $g$**  Pour tout point  $M$  de  $V \setminus (\Delta_{1,0} \cup \Delta_{2,0})$ , par dualité des quadrillages (lemme 17.1), on a  $\alpha(M) \cap \beta(M) = \{M\}$ ; ceci montre l'injectivité sur  $V \setminus (\Delta_{1,0} \cup \Delta_{2,0})$ ; on en déduit facilement l'injectivité sur  $V$ .

**Continuité de  $g$**  Il s'agit de prouver la continuité des fonctions  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  définies sur  $V$ ; montrons par exemple celle de la fonction  $\hat{y}$ .

Sur le rectangle  $R_1$ , le quadrillage  $\mathcal{Q}_1$  est complet, donc homéomorphe au quadrillage canonique (lemme 16.2); on en déduit la continuité de la fonction  $\hat{y}$  sur  $R_1$ .

Le même argument (ou la relation de conjugaison) montre la continuité sur  $h^p(R_1)$  pour tout entier  $p$ . La fonction  $\hat{y}$  étant continue sur chacun des fermés  $h^p(R_1)$ , elle est continue sur toute réunion finie de tels fermés; comme d'autre part, d'après le lemme sur les itérés d'un compact (11.3, point 1), la famille des itérés  $\{h^p(R_1)\}$  est localement finie en tout point de  $V \setminus \Delta_{2,0}$  (qui est aussi l'union de tous les itérés de  $R_1$  d'après le lemme 13.5), on en déduit la continuité de la fonction  $\hat{y}$  sur  $V \setminus \Delta_{2,0}$ .

Il reste à montrer la continuité en tout point de  $\Delta_{2,0}$ . Soit  $p$  un entier; l'ensemble

$$F = \bigcup_{k \leq p} h^k(R_1)$$

est fermé dans le quart de plan  $\Sigma$  (point 1 du lemme 11.3). Son complémentaire  $U = V \setminus F$  est un voisinage de  $\Delta_{2,0}$ ; pour  $p$  arbitrairement grand, l'ensemble  $U_1 = \Delta_{1,0} \cap U$  est un voisinage arbitrairement petit du point  $(0, 0)$  dans  $\Delta_{1,0} \cup \{(0, 0)\}$ . Par définition de la fonction  $\hat{y}$ , et en identifiant  $[0, +\infty[$  à la demi-droite  $\Delta_{1,0} \cup \{(0, 0)\}$ , on a  $\hat{y}^{-1}(U_1) = U$ . Ceci montre la continuité de la fonction  $\hat{y}$  en tout point de  $\Delta_{2,0}$ .

**Continuité de  $g^{-1}$**  Ceci revient à montrer que l'application  $g$  est propre, c'est-à-dire que l'image réciproque de tout compact  $K_0$  de  $V_0 = g(V)$  est un compact. Un tel compact  $K_0$  est inclus, pour  $p$  assez grand, dans l'ensemble

$$K_{p,0} = \bigcup_{n=-p}^p h_0^n(R_{1,0} \cup R_{2,0}).$$

Or on a, d'après la relation de conjugaison et l'injectivité,

$$g^{-1}(K_{p,0}) = \bigcup_{n=-p}^p h^n(R_1 \cup R_2)$$

qui est bien un ensemble compact ; par conséquent  $g$  est propre, et  $g^{-1}$  est continue.

### 17.3 Extension de la conjugaison sur le trois-quarts de plan $\mathbb{R}_0^2$

L'adhérence du complémentaire de  $V$  dans le trois-quarts de plan  $\mathbb{R}_0^2$  est formé de trois composantes connexes  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ , qui sont des demi-plans topologiques fermés, bordés respectivement par les droites  $\Delta_{1,0}$ ,  $\Delta_{2,0}$  et  $\Gamma$ . De même, l'adhérence du complémentaire de  $V_0$  est formé des trois demi-plans topologiques fermés  $P_{1,0}$ ,  $P_{2,0}$  et  $P_{3,0}$  bordés respectivement par les droites  $\Delta_{1,0}$ ,  $\Delta_{2,0}$  et  $\Gamma_0$ . De plus, aucun des demi-plans  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  ne contient de couples de points singuliers pour  $h$  (hypothèse  $(\star)$ ), et aucun des demi-plans  $P_{1,0}$ ,  $P_{2,0}$  et  $P_{3,0}$  ne contient de couples de points singuliers pour  $h_0$ .

On étend l'application  $g$  sur chacun de ces demi-plans en une conjugaison entre  $h$  et  $h_0$  en utilisant la proposition suivante (adaptée du théorème de Kérékjártó [18]) :

**Proposition 17.3** *Soit  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un homéomorphisme de Brouwer, et  $P \subset \mathbb{R}^2$  un demi-plan topologique fermé totalement invariant par  $H$ . On suppose que  $P \times P$  ne contient aucun couple de points singulier pour  $H$ . Alors, la restriction de  $H$  au demi-plan  $P$  est conjuguée à la translation  $\tau : (x, y) \mapsto (x + 1, y)$  du demi-plan  $\{y \geq 0\}$ .*

*Plus précisément, tout homéomorphisme de la frontière de  $P$  sur l'axe  $\{y = 0\}$  qui conjugue les restrictions de  $H$  et  $\tau$  se prolonge en un homéomorphisme de  $P$  sur le demi-plan  $\{y \geq 0\}$  qui conjugue  $H$  à  $\tau$ .*

**Preuve** L'hypothèse sur l'ensemble singulier permet de montrer que l'espace  $P/H$  quotient de  $P$  par l'action de  $H$  est un espace topologique séparé (d'après le deuxième point de la remarque 2.2) ; c'est alors une surface topologique (en effet, tout point de  $P/H$  possède un voisinage homéomorphe à un voisinage d'un point de  $\mathbb{R}^2$ , d'après le point (i) du corollaire 1.2). Son bord est clairement homéomorphe au cercle  $\mathbb{S}^1$ , son groupe fondamental est  $\mathbb{Z}$  (car le passage au quotient est un revêtement universel). La classification des surfaces (voir [1, en particulier, paragraphes I.44D et I.46A]) montre alors que l'espace quotient  $P/H$  est homéomorphe au demi-anneau ouvert  $\mathbb{S}^1 \times [0, +\infty[$ . Le quotient du demi-plan  $\{y \geq 0\}$  par la translation  $\tau$  est bien sûr également homéomorphe au demi-anneau  $\mathbb{S}^1 \times [0, +\infty[$ . On obtient la conjugaison recherchée en relevant un homéomorphisme entre les espaces quotients  $P/H$  et  $\{y \geq 0\}/\tau$ .  $\triangle$

Ceci achève la preuve du théorème 2bis, et, par suite, celle du théorème 2.

## Appendice : le théorème de Schoenflies-Homma

On rappelle ici un résultat peu connu de Homma, qui généralise le théorème de Schoenflies. Suivant [15], on appelle *ensemble en forme de  $\ll Y \gg$*  un ensemble qui est la réunion de trois

arcs ayant en commun un seul point, extrémité de chacun d'eux. L'orientation de la sphère induit un ordre cyclique sur l'ensemble des trois arcs qui constituent n'importe quel ensemble de ce type.

**Théorème 17.4 (théorème de « Schoenflies-Homma », [15])** *Soit  $F$  un compact connexe localement connexe de la sphère. Une application continue et injective de  $F$  dans la sphère s'étend en un homéomorphisme de la sphère  $\mathbb{S}^2$  préservant l'orientation si et seulement si elle préserve l'ordre cyclique de tous les ensembles en forme de «  $Y$  » contenus dans  $F$ .*

Dans cet article, nous appliquons le théorème de Schoenflies-Homma à diverses situations ; voici un exemple :

**Proposition 17.5** *Soient  $D_1, D_2$  un couple de droites topologiques disjointes dans  $\mathbb{R}^2$ , et  $\Delta_1, \Delta_2$  un autre couple de droites topologiques disjointes dans  $\mathbb{R}^2$ . Il existe un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ , qui envoie  $D_1$  sur  $\Delta_1$ , et qui envoie  $D_2$  sur  $\Delta_2$ .*

**Preuve** Considérons le compactifié d'Alexandroff  $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  du plan  $\mathbb{R}^2$ . Dans ce compactifié,  $D_1 \cup \{\infty\}$  et  $D_2 \cup \{\infty\}$  sont deux cercles topologiques qui ne s'intersectent qu'au seul point  $\infty$  ; de même,  $\Delta_1 \cup \{\infty\}$  et  $\Delta_2 \cup \{\infty\}$  sont deux cercles topologiques qui ne s'intersectent qu'au seul point  $\infty$ . Par suite, les extrémités de  $D_1$  et  $D_2$  sont disposées autour du point  $\infty$  dans un ordre cyclique pour lequel les deux extrémités de  $D_1$  sont adjacentes (ainsi que les deux extrémités de  $D_2$ ) (figure 35.(a)). De même pour les extrémités de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  (figure 35.(b)). Il en résulte l'existence d'un plongement  $g : D_1 \cup D_2 \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ , qui envoie  $D_1 \cup \{\infty\}$  sur  $\Delta_1 \cup \{\infty\}$ , qui envoie  $D_2 \cup \{\infty\}$  sur  $\Delta_2 \cup \{\infty\}$ , et qui préserve l'ordre cyclique autour du point  $\infty$ . On peut alors d'appliquer le théorème de Schoenflies-Homma et conclure.  $\triangle$

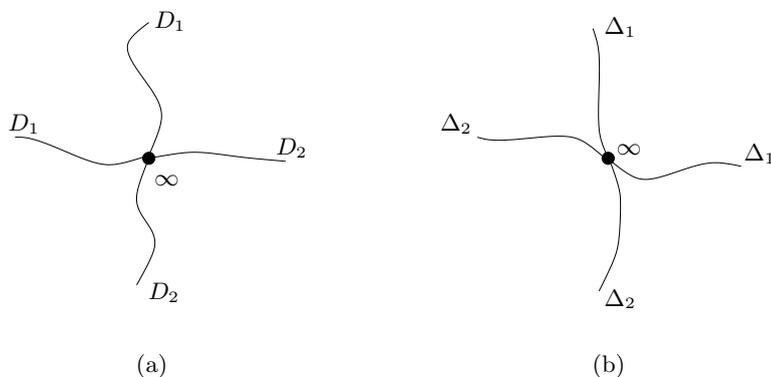


FIGURE 35 – Configuration des extrémités de  $D_1$  et  $D_2$ , et de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  au voisinage du point  $\infty$

## Références

- [1] L. V. Ahlfors and L. Sario. *Riemann surfaces*. Princeton University Press, Princeton, 1960.
- [2] C. Bonatti et E. Dufraine. Equivalence topologique de connexions de selles en dimension 3. *Prépublication du laboratoire de Topologie de l'Université de Bourgogne* **243** (2001).
- [3] L. E. Brouwer. Beweis des ebenen translationssatzes. *Math. Ann.* **72** (1912), 37-54.

- [4] EW. Daw. A maximally pathological Brouwer homeomorphism. *Trans. Amer. Math Soc.* **343**, 1994.
- [5] W. De Melo. Moduli of stability of two-dimensional diffeomorphisms. *Topology* **19** (1980), 9-21.
- [6] W. De Melo and F. Dumortier. A type of moduli for saddle connections of planar diffeomorphisms. *J. Diff. Eq* **75** (1988), 88-102.
- [7] E. Dufraine. Some topological invariants for three dimensional flows. A criterion for the existence of a topological invariant. *Prépublication du laboratoire de Topologie de l'Université de Bourgogne* **200** (1999).
- [8] J. Ecalle. Théorie des invariants holomorphes. *Public. Math. d'Orsay* **67**, 7409 (1974).
- [9] J. Franks. Generalizations of the Poincaré-Birkhoff theorem. *Ann. Math.* **128** (1988), 139-151.
- [10] C. Godbillon, G. Reeb. Fibrés sur le branchement simple. *Ens. Math.* **12** (1966), 277-287.
- [11] M. Golubitsky, V. Guillemin. *Stable Mappings and their Singularities*. Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 1973.
- [12] L. Guillou. Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré-Birkhoff. *Topology* **33** (1994), 331-351.
- [13] A. Haefliger, G. Reeb. Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan. *Ens. Math.* **3** (1957), 107-125.
- [14] J. G. Hocking, G. S. Young. *Topology*. Dover Publications, Inc., New York, 1988.
- [15] T. Homma. An extension of the Jordan Curve Theorem. *Yokohama Math. J.* **1** (1953), 125-129.
- [16] T. Homma and H. Terasaka. On the structure of the plane translation of Brouwer. *Osaka Math. J.* **5** (1953), 233-266.
- [17] W. Kaplan. Regular curve-families filling the plane, I. *Duke Math. J.* **7** (1940) 154-185.
- [18] B. Kerékjártó. Sur le groupe des transformations topologiques du plan. *Ann. S.N.S. Pisa II Ser.* **3** (1934), 393-400.
- [19] R. Langevin. Quelques nouveaux invariants des difféomorphismes Morse-Smale d'une surface. *Ann. Inst. Fourier* **43** (1993), 265-278.
- [20] F. Le Roux. Bounded recurrent sets for planar homeomorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **19** (1999), 1085-1091.
- [21] F. Le Roux. Il n'y a pas de classification borélienne des homéomorphismes de Brouwer. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **21** (2001), 233-247.
- [22] F. Le Roux. A Brouwer homeomorphism which preserves each leaf of the Reeb foliation but is not flowable. *Texte introuvable*.
- [23] F. Le Roux. Dynamique des homéomorphismes de surfaces. Versions topologiques des théorèmes de la fleur de Leau-Fatou et de la variété stable. *Notes de cours* (2001).

- [24] J. Mather. Commutators of diffeomorphisms. *Comm. Math. Helv.* **49** (1974), 512-528.
- [25] S. B. Nadler. Hyperspaces of sets. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 49. *Marcel Dekker, Inc., New York-Basel*, 1978.
- [26] H. Nakayama. A non flowable plane homeomorphism whose non Hausdorff set consists of two disjoint lines. *Houston J. of Math.* **21** (1995), 569-572.
- [27] J. Palis. A differentiable invariant of topological conjugacies and modulus of stability. *Astérisque* **51** (1978), 335-346.
- [28] J. Palis and J. C. Yoccoz. Differentiable conjugacies of Morse-Smale diffeomorphisms. *Bol. Soc. Bras. Mat.* **20** (1990), 25-48.
- [29] S. M. Voronin. Analytic classification of germs of conformal mappings  $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  with identity linear part. *Funct. Anal. and Applications* **15** (1981), 1-17.
- [30] H. Whitney. Regular families of curves. *Ann. of Math., II. Ser.* **34** (1933), 244-270.