

# Ensembles de rotations des homéomorphismes du tore $\mathbb{T}^2$

François Béguin

April 30, 2007

Il y a maintenant 120 ans qu’ H. Poincaré, étudiant le comportement qualitatif des solutions des équations différentielles sur le tore, a été conduit à définir le *nombre de rotation* d’un homéomorphisme  $f$  du cercle  $\mathbb{S}^1$ . Ce nombre mesure la “vitesse moyenne à laquelle une orbite de  $f$  (c’est-à-dire une suite de la forme  $z, f(z), f^2(z), \dots$ ) tourne autour du cercle”. Poincaré s’est très vite aperçu que le seul nombre de rotation d’un homéomorphisme du cercle contient parfois beaucoup d’information sur la dynamique de cet homéomorphisme. Un résultat typique dans cette direction est le célèbre théorème prouvé par A. Denjoy vers 1910 qui affirme que tout difféomorphisme du cercle de classe  $C^2$  préservant l’orientation, et dont le nombre de rotation est irrationnel est topologiquement conjugué à une vraie rotation. La théorie du nombre de rotation des homéomorphismes du cercles a connu de nombreux développements depuis Poincaré jusqu’à aujourd’hui, au travers notamment des travaux de M. Herman, J.C. Yoccoz, etc.

Il est tentant d’essayer de généraliser la notion de nombre de rotation à des homéomorphismes définis sur d’autres variétés que le cercle. Typiquement, si  $f$  est un homéomorphisme du tore  $\mathbb{T}^2$ , il est tentant d’essayer de définir la “vitesse et la direction moyenne avec lesquelles une orbite de  $f$  tourne autour du tore  $\mathbb{T}^2$ ”.

Un point crucial de la théorie sur le cercle est que, si  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  est un homéomorphisme préservant l’orientation, alors les orbites par  $f$  de tous les points de  $\mathbb{S}^1$  “tournent à la même vitesse”. Cette propriété est un avatar de l’existence d’un ordre cyclique sur  $\mathbb{S}^1$  et du fait que  $f$  préserve cet ordre. Ainsi, si  $f$  est un homéomorphisme du tore  $\mathbb{T}^2$ , alors les orbites pour  $f$  des différents points de  $\mathbb{T}^2$  ne tournent pas en général à la même vitesse<sup>1</sup>. C’est pourquoi, à un homéomorphisme du tore  $\mathbb{T}^2$ , on associe plutôt un *ensemble de rotation* qu’un seul nombre de rotation (en gros, chaque point de l’ensemble de rotation d’un homéomorphisme  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  est la vitesse/direction moyenne de rotation d’une certaine orbite de  $f$ ). On verra que l’ensemble de rotation d’un homéomorphisme du tore  $\mathbb{T}^2$  est un sous-ensemble compact convexe de  $\mathbb{R}^2$ .

Au fil des exemples, on s’aperçoit bien vite qu’il est illusoire d’espérer que la dynamique d’un homéomorphisme du tore ne soit entièrement caractérisée par l’ensemble de rotation de cet homéomorphisme. En particulier, le théorème de Denjoy ne se généralise pas en dimension supérieure ou égale à 2. Néanmoins, on verra qu’on peut parfois obtenir des informations importantes sur la dynamique d’un homéomorphisme  $f$  à partir de simples informations sur son ensemble de rotation. Par exemple, on verra que, si  $f$  est un homéomorphisme du tore, et si l’ensemble de rotation de  $f$  a un intérieur non-vide, alors l’entropie topologique de  $f$  est strictement positive.

---

<sup>1</sup>En fait, une orbite n’a même pas, en général, de “vitesse de rotation” bien définie.

Ces notes sont divisée en trois parties. Dans la première partie, on compare les différentes définitions possibles de l'ensemble de rotation d'un homéomorphisme du tore  $\mathbb{T}^2$ . Dans la deuxième partie, on s'intéresse au problème de réalisation des ensembles de rotations: *étant donné un compact convexe  $K$  dans  $\mathbb{R}^2$ , peut-on trouver un homéomorphisme du tore  $\mathbb{T}^2$  dont l'ensemble de rotation est égal à  $K$  ?* Enfin, dans la troisième partie, on s'intéresse à l'information dynamique véhiculée par l'ensemble de rotation d'un homéomorphisme. Plus particulièrement, on étudie la question suivante: *que peut-on dire de la dynamique d'un homéomorphisme dont l'ensemble de rotation est "gros" (par exemple, d'intérieur non-vide) ?*

En toute logique, on devrait alors s'intéresser à la question "symétrique" de la précédente: *que peut-on dire de la dynamique d'un homéomorphisme dont l'ensemble de rotation est "petit" (par exemple, réduit à un seul point) ?* Nous ne le ferons pas; l'étude de cette question est en effet l'objet du cours de Sylvain Crovisier ([7]).

# 1 Définitions et propriétés des ensembles de rotations

## 1.1 Rappel : nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle

Soit  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation. On veut mesurer la vitesse asymptotique à laquelle "les orbites de  $f$  tournent autour de  $\mathbb{S}^1$ ". En fait, on ne peut pas le faire directement, car l'angle entre deux points du cercle n'est bien défini qu'à un entier près. Pour contourner ce problème, on va travailler dans  $\mathbb{R}$  au lieu de  $\mathbb{S}^1$ .

On voit dorénavant le cercle  $\mathbb{S}^1$  comme  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , et on note  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  la projection canonique. On choisit un relevé  $F$  de  $f$  à  $\mathbb{R}$  (autrement dit,  $F$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{R}$  tel que  $\pi \circ F = f \circ \pi$ ). Un tel homéomorphisme  $F$  est croissant et commute à l'action par translation de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{R}$ , autrement dit, pour tout  $\tilde{z} \in \mathbb{R}$  et tout  $p \in \mathbb{Z}$ , on a  $F(\tilde{z} + p) = F(\tilde{z}) + p$ .

Si  $z$  est un point du cercle  $\mathbb{S}^1$ , et si  $\tilde{z} \in \mathbb{R}$  est un relevé de  $z$ , alors, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , le point  $F^n(\tilde{z})$  est un relevé du point  $f^n(z)$ . Ainsi, un moyen de mesurer la vitesse à laquelle le point  $f^n(z)$  tourne autour du cercle  $\mathbb{S}^1$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  revient à mesurer la vitesse à laquelle le point  $F^n(\tilde{z})$  s'éloigne du point  $\tilde{z}$  dans  $\mathbb{R}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Pour tout point  $\tilde{z} \in \mathbb{R}$ , et tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on considère la quantité

$$\rho_n(F, \tilde{z}) = \frac{1}{n}(F^n(\tilde{z}) - \tilde{z}).$$

Cette quantité mesure de combien  $F$  déplace les points, en moyenne le long du segment d'orbite  $\tilde{z}, F(\tilde{z}), \dots, F^n(\tilde{z})$ . On va s'intéresser au comportement de  $\rho_n(F, \tilde{z})$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Toute la théorie du nombre de rotation pour les homéomorphismes du cercle repose sur la proposition suivante:

**Proposition 1.1.** *Pour tout  $\tilde{z} \in \mathbb{R}$ , la quantité  $\rho_n(F, \tilde{z})$  converge vers une limite finie  $\rho(F, \tilde{z})$  quand  $n \rightarrow \infty$ . De plus, cette limite  $\rho(F, \tilde{z})$  ne dépend pas du point  $\tilde{z}$ .*

**Définition 1.2.** On note  $\rho(F)$  la valeur commune des nombres  $\rho(F, \tilde{z})$ . Le réel  $\rho(F)$  s'appelle le *nombre de translation* (ou de *rotation*) de l'homéomorphisme  $F$ .

**Remarque 1.3.** Si  $F'$  est un deuxième autre relevé de  $f$ , alors il existe un entier  $v \in \mathbb{Z}$  tel que  $F'(\tilde{z}) = F(\tilde{z}) + v$  pour tout  $\tilde{z} \in \mathbb{R}$ . Il est alors clair qu'on a  $\rho(F') = \rho(F) + v$ . En particulier, la quantité  $\rho(F)$  vue dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  ne dépend que de l'homéomorphisme  $f$  (et non pas du relevé  $F$ ). C'est pourquoi on peut parler de *nombre de rotation* de l'homéomorphisme  $f$ .

Venons-en à la preuve de la proposition 1.1. Le point clé est le lemme suivant :

**Lemme 1.4.** *Quels que soient les points  $\tilde{z}, \tilde{z}' \in \mathbb{R}$  et l'entier  $n \in \mathbb{N}$ , on a*

$$|(F^n(\tilde{z}) - \tilde{z}) - (F^n(\tilde{z}') - \tilde{z}')| \leq 2.$$

*Preuve du lemme.* Soient  $\tilde{z}, \tilde{z}'$  deux points de  $\mathbb{R}$ . Il existe un entier  $k \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\tilde{z} + k \leq \tilde{z}' < \tilde{z} + (k + 1).$$

Puisque  $F$  préserve l'ordre et commute à l'action par translation de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{R}$ , ceci implique, que, pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ , on a

$$F^n(\tilde{z}) + k \leq F^n(\tilde{z}') < F^n(\tilde{z}) + (k + 1).$$

Le lemme découle immédiatement des deux doubles inégalités ci-dessus. □

On utilisera également le lemme facile suivant :

**Lemme 1.5.** *Il existe une constante  $M$  telle que  $|\rho_n(F, \tilde{z})| \leq M$  pour tous  $\tilde{z} \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Preuve.* Soit  $D := \{F(\tilde{z}) - \tilde{z} \mid \tilde{z} \in \mathbb{R}\}$ . Puisque  $F$  commute à l'action de  $\mathbb{Z}$ , on a aussi  $D = \{F(\tilde{z}) - \tilde{z} \mid \tilde{z} \in [0, 1]\}$  ; en particulier,  $D$  est un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}$ . On pose  $M = \sup D$ . Pour tout  $\tilde{z} \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut écrire

$$\rho_n(F, \tilde{z}) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (F(F^i(\tilde{z})) - F^i(\tilde{z}))$$

Le réel  $\rho_n(F, \tilde{z})$  est donc une combinaison convexe d'éléments de l'ensemble  $D$ . En particulier, on a  $\rho_n(F, \tilde{z}) \leq M$ .  $\square$

*Preuve de la proposition 1.1.* Remarquons tout d'abord que, d'après les lemmes 1.4 et 1.5, si  $\rho_n(F, \tilde{z})$  converge vers une limite quand  $n \rightarrow \infty$  pour un point  $\tilde{z} \in \mathbb{R}$ , alors  $\rho_n(F, \tilde{z})$  converge pour tout point  $\tilde{z} \in \mathbb{R}$ , la limite est finie et ne dépend pas de  $\tilde{z}$ .

Il nous reste donc à fixer un point  $z_0 \in \mathbb{R}$ , et à montrer que la quantité  $\rho_n(F, \tilde{z}_0)$  converge quand  $n \rightarrow \infty$ . Pour ce faire, on note

$$R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_n(F, \tilde{z}_0).$$

On fixe  $\varepsilon > 0$ . On peut alors trouver un entier  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\rho_{n_0}(F, \tilde{z}_0) \geq R - \varepsilon.$$

De plus, comme on peut choisir  $n_0$  arbitrairement grand, on peut supposer que  $1/n_0 \leq \varepsilon$ . Alors, d'après le lemme 1.4, on a pour tout  $\tilde{z} \in \mathbb{R}$ ,

$$(F^{n_0}(\tilde{z}) - \tilde{z}) \geq n_0 R - n_0 \varepsilon - 2.$$

Notons alors  $M = \sup\{|F^i(\tilde{z}) - \tilde{z}| \text{ pour } \tilde{z} \in \mathbb{R}^2 \text{ et } 1 \leq i \leq n_0 - 1\}$ . Pour tout entier  $n$ , on note  $q_n$  le reste de la division euclidienne de  $n$  par  $n_0$  et on écrit

$$\begin{aligned} F^n(\tilde{z}_0) - \tilde{z}_0 &= \left( \sum_{i=0}^{q_n-1} (F^{n_0}(F^{i n_0}(\tilde{z}_0)) - F^{i n_0}(\tilde{z}_0)) \right) + F^n(\tilde{z}) - F^{q_n n_0}(\tilde{z}) \\ &\geq \left( \sum_{i=0}^{q_n-1} (n_0 R - n_0 \varepsilon - 2) \right) - M. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \rho_n(F, \tilde{z}_0) &\geq \frac{q_n n_0}{n} (R - \varepsilon) - 2 \frac{q_n}{n} - \frac{M}{n} \\ &\geq \left(1 - \frac{n_0}{n}\right) (R - \varepsilon) - \frac{4}{n_0} - \frac{M}{n} \end{aligned}$$

Par suite, on a  $\rho_n(F, \tilde{z}_0) \geq R - 10\varepsilon$  pour  $n$  assez grand. Comme on peut prendre  $\varepsilon$  arbitrairement petit, ceci implique que toute valeur d'adhérence de  $\rho_n(F, \tilde{z}_0)$  est plus grande que  $R = \limsup \rho_n(F, \tilde{z}_0)$ . Par conséquent,  $\rho_n(F, \tilde{z}_0)$  converge quand  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

En fait, en reprenant la preuve de la proposition 1.1, on s'aperçoit qu'on peut obtenir beaucoup mieux que la convergence de  $\rho_n(F, \tilde{z})$  quand  $n \rightarrow \infty$  :

**Addendum 1.6.** Pour tout  $\tilde{z} \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $|\rho_n(F, \tilde{z}) - \rho(F)| \leq \frac{2}{n}$ .

*Preuve.* Supposons qu'il existe  $\tilde{z}_0 \in \mathbb{R}^2$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $|\rho_{n_0}(F, \tilde{z}_0) - \rho(F)| > \frac{2}{n_0}$ . Pour fixer les idées, supposons par exemple que  $n_0$  est positif et

$$\rho_{n_0}(F, \tilde{z}_0) = \rho(F) + \frac{2 + \eta}{n_0}$$

c'est-à-dire

$$F^{n_0}(\tilde{z}_0) - \tilde{z}_0 = n_0\rho(F) + 2 + \eta$$

avec  $\eta > 0$ . Le lemme 1.4 implique alors que, pour tout  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$F^{n_0}(\tilde{z}) - \tilde{z} = n_0\rho(F) + 2 + \eta.$$

On note  $M = \sup\{|F^i(\tilde{z}) - \tilde{z}| \text{ pour } \tilde{z} \in \mathbb{R}^2 \text{ et } 1 \leq i \leq n_0 - 1\}$ . Pour tout entier  $n$ , on note  $q_n$  le reste de la division euclidienne de  $n$  par  $n_0$  et on note écrit

$$\begin{aligned} F^n(\tilde{z}_0) - \tilde{z}_0 &= \left( \sum_{i=0}^{q_n-1} (F^{n_0}(F^{i n_0}(\tilde{z}_0)) - F^{i n_0}(\tilde{z}_0)) \right) + F^n(\tilde{z}) - F^{q_n n_0}(\tilde{z}) \\ &\geq \left( \sum_{i=0}^{q_n-1} n_0\rho(F) + \eta \right) - M \\ &= q_n n_0\rho(F) + q_n \eta - M \\ &\geq n\rho(F) - n_0\rho(F) + q_n \eta - M. \end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus implique que, pour tout  $n$  assez grand, on a  $\rho_n(F, \tilde{z}_0) \geq n(\rho(F) + \eta/2)$ , ce qui contredit la définition de  $\rho(F)$ .  $\square$

**Remarque 1.7.** La preuve du lemme 1.4 repose de manière cruciale sur l'existence d'un ordre sur  $\mathbb{R}$  et sur le fait que l'homéomorphisme  $F$  préserve cet ordre. Ces deux propriétés sont tout-à-fait spécifique à la dimension 1. En fait, toutes les affirmations de la proposition 1.1 et de l'addendum 1.6 deviennent fausses lorsqu'on remplace le cercle par une autre variété. Par exemple, si on  $G$  est un relevé d'homéomorphisme du tore  $\mathbb{T}^2$ , la quantité  $\rho_n(G, \tilde{z})$  ne converge en général pas quand  $n \rightarrow \infty$ . Et même dans les cas où  $\rho_n(G, \tilde{z})$  converge pour tout  $\tilde{z}$ , la limite dépend en général du point  $\tilde{z}$ .

On peut également définir le nombre de rotation d'un homéomorphisme d'un cercle par une méthode totalement différente, qui consiste à utiliser une mesure probabilité invariante. Pour ce faire, on considère la *fonction déplacement*  $D(F) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  définie comme suit: pour tout  $z \in \mathbb{S}^1$ , on choisit un relevé  $\tilde{z}$  de  $z$ , et on pose

$$D(F)(z) = F(\tilde{z}) - \tilde{z}$$

(après avoir remarqué que cette quantité dépend de  $z$ , mais pas du choix du relevé  $\tilde{z}$ ). On a alors la proposition suivante:

**Proposition 1.8.** Pour toute mesure de probabilité  $f$ -invariante  $\mu$  sur  $\mathbb{S}^1$ , on a

$$\int_{\mathbb{S}^1} D(F)(z) d\mu(z) = \rho(F).$$

*Preuve.* Soit  $\mu$  une mesure de probabilité  $F$ -invariante. Le théorème ergodique de Birkhoff affirme alors que, pour  $\mu$ -presque tout point  $z \in \mathbb{S}^1$ , la somme de Birkhoff

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} D(F)(f^i(z))$$

converge vers un réel  $\phi(z)$ . On remarque alors que, en notant  $\tilde{z}$  un relevé de  $z$ , on a

$$D(F)(f^i(z)) = F^{i+1}(\tilde{z}) - F^i(\tilde{z})$$

(car  $F^i(\tilde{z})$  est un relevé de  $f^i(z)$ ). On en déduit que, pour tout  $z \in \mathbb{S}^1$ , on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D(F)(f^k(z)) = \frac{1}{n} (F^n(\tilde{z}) - \tilde{z}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho(F).$$

Par unicité de la limite, on voit donc que  $\phi$  est une fonction constante égale à  $\rho(F)$ . Par ailleurs, le théorème ergodique de Birkhoff nous dit aussi que la fonction  $z \mapsto \phi(z)$  est  $\mu$ -intégrable et que

$$\int_{\mathbb{S}^1} \phi(z) d\mu(z) = \int_{\mathbb{S}^1} D(F)(z) d\mu(z).$$

On obtient donc finalement l'égalité souhaitée  $\rho(F) = \int_{\mathbb{S}^1} D(F)(z) d\mu(z)$ . □

## 1.2 Ensembles de rotations d'un homéomorphisme du tore $\mathbb{T}^2$

Soit  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  le tore de dimension 2. On verra ci-dessous (remarque 1.11) que les diverses définitions d'ensembles de rotations d'un homéomorphisme du tore  $\mathbb{T}^2$  n'ont vraiment de sens que pour les homéomorphismes qui sont *isotopes à l'identité* (de même la définition du nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle n'a de sens que si cet homéomorphisme préserve l'orientation, c'est-à-dire est isotope à l'identité). Rappelons qu'un homéomorphisme  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  isotope à l'identité s'il existe un chemin continu dans les homéomorphismes de  $\mathbb{T}^2$  joignant  $f$  à l'identité. Ceci est équivalent au fait que l'action de  $f$  sur le groupe fondamental du tore est triviale (i.e., pour toute courbe fermée  $\gamma$  dans  $\mathbb{T}^2$ , les courbes  $\gamma$  et  $f(\gamma)$  sont homotopes). On notera  $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$  l'ensemble des homéomorphismes du tore isotope à l'identité.

On essaie de mimer la théorie du nombre de rotation des homéomorphismes du cercle. Ainsi, pour décrire la façon dont les orbites d'un homéomorphisme  $f$  du tore  $\mathbb{T}^2$  "tournent autour de  $\mathbb{T}^2$ ", on choisira un relevé  $F$  de  $f$  à  $\mathbb{R}^2$ , et on décrira la façon dont les orbites de  $f$  s'en vont à l'infini. Il est alors important de noter le fait suivant:

**Fait 1.9.** *Un homéomorphisme  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un relevé d'un homéomorphisme du tore  $\mathbb{T}^2$  isotope à l'identité si et seulement si  $F$  commute à l'action de  $\mathbb{Z}^2$  par translation, i.e. si et seulement si pour tout  $v \in \mathbb{Z}^2$  et tout  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$ , on a  $F(\tilde{z} + v) = F(\tilde{z}) + v$ .*

En effet, il est clair que  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un relevé d'un homéomorphisme  $f$  du tore  $\mathbb{T}^2$ , alors pour tout  $v \in \mathbb{Z}^2$  et tout  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$ , on a  $F(\tilde{z} + v) = F(\tilde{z}) + g(v)$  où  $g$  est un homomorphisme du groupe additif  $\mathbb{Z}^2$ . La théorie des revêtements nous dit alors que l'homomorphisme  $g$  est trivial (i.e. égal à l'identité) si et seulement si l'action de  $f$  sur le groupe fondamental de  $\mathbb{T}^2$  est triviale (i.e.  $f$  agit par l'identité).

On notera  $\pi$  la projection canonique de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , et on notera  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  l'ensemble des homéomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  qui commutent à l'action de  $\mathbb{Z}^2$  par translation.

On se fixe maintenant un homéomorphisme  $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ , ainsi qu'un relevé  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  de cet homéomorphisme.

Comme dans le cas des homéomorphismes du cercle, on cherche à comprendre la limite de la quantité

$$\rho_n(F, \tilde{z}) := \frac{1}{n}(F^n(\tilde{z}) - \tilde{z})$$

lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  (pour tout  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$ ). Par rapport au cas des homéomorphismes du cercle, on se heurte à deux nouvelles difficultés. Tout d'abord, la limite de la quantité  $\rho_n(F, \tilde{z})$  dépend *a priori* du point  $\tilde{z}$  (autrement dit, "les orbites de deux points distincts n'ont en général pas la même vitesse/direction asymptotique de rotation"). Deuxièmement, même lorsqu'on fixe le point  $\tilde{z}$ , il arrive que la quantité  $\rho_n(F, \tilde{z})$  ne converge pas (une orbite peut avoir plusieurs vitesses/directions asymptotiques de rotation). Bien entendu, la solution consiste à définir l'ensemble de rotation de  $F$  comme l'ensemble de toutes les valeurs d'adhérences possible (lorsque  $n \rightarrow \infty$ ) pour des quantités du type  $\rho_n(F, \tilde{z})$ . On peut procéder de manière différentes:

- soit on fait tendre  $n$  vers  $+\infty$  à  $\tilde{z}$  fixé, puis on fait l'union sur tous les  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$ ,
- soit on fait l'union sur tous les  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$  à  $n$  fixé, puis on fait tendre  $n$  vers l'infini.

Ceci donnera lieu à deux ensembles de rotation *a priori* différents.

**Définition 1.10.** Pour tout point  $z \in \mathbb{T}^2$ , on choisit un relevé  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$  de  $z$ , et on note

$$\rho(F, z) = \{\text{valeurs d'adhérences de } \rho_n(F, \tilde{z}) \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty\}.$$

Cet ensemble ne dépend pas du relevé  $\tilde{z}$  point  $z$  choisi. On définit alors l'ensemble

$$\rho_{\text{points}}(F) = \bigcup_{z \in \mathbb{T}^2} \rho(F, z).$$

**Remarque 1.11.** Dans la définition ci-dessus, le fait que la quantité  $\frac{1}{n}(F^n(\tilde{z}) - \tilde{z})$  ne dépende que du point  $z$ , et pas du choix du relevé  $\tilde{z}$  de  $z$  provient de ce que  $F$  commute avec les translation de vecteurs à coordonnées entières. Rappelons que ce fait provient lui-même de ce que  $F$  relève un homéomorphismes *isotope à l'identité*. C'est pour cette raison qu'on doit se restreindre aux difféomorphismes du tore isotopes à l'identité.

**Définition 1.12.** Pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , on note

$$D_n(F) = \{\rho_n(F, \tilde{z}) \mid \tilde{z} \in \mathbb{R}^2\}.$$

Puisque  $F$  commute aux translations de vecteur à coordonnées entières, cet ensemble est compact. On définit alors l'ensemble

$$\rho(F) = \limsup_{n \rightarrow \infty} D_n(F) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n \geq p} D_n(F)}.$$

Soit  $v \in \mathbb{R}^2$ . Par définition, le vecteur  $v$  appartient à l'ensemble  $\rho_{point}(F)$  s'il existe un point  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$  et une suite strictement croissante d'entiers  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tels que  $\rho_{n_k}(F, \tilde{z}) \rightarrow v$  quand  $k \rightarrow \infty$ . Par ailleurs, on vérifie que le vecteur  $v$  appartient à l'ensemble  $\rho(F)$  s'il existe une suite strictement croissante d'entiers  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et une suite de points  $(\tilde{z}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{R}^2$  tels que  $\rho_{n_k}(F, \tilde{z}_k) \rightarrow v$  quand  $k \rightarrow \infty$ . On a donc l'inclusion

$$\rho_{point}(F) \subset \rho(F).$$

On verra que cette inclusion est stricte en général. En fait, l'ensemble  $\rho(F)$  a de bien meilleures propriétés que l'ensemble  $\rho_{points}(F)$ : l'ensemble  $\rho(F)$  est clairement fermé, et on verra qu'il est de plus convexe ; par contre, on verra que l'ensemble  $\rho_{points}(F)$  n'est en général ni fermé, ni convexe, ni même connexe.

Décrire la direction et la vitesse avec lesquelles l'orbite pour  $F$  d'un point  $\tilde{z}$  s'en va à l'infini dans  $\mathbb{R}^2$ , c'est décrire la direction et la vitesse avec lesquelles  $F$  déplace les points "en moyenne le long de l'orbite de  $\tilde{z}$ ". On peut généraliser cette construction en mesurant la direction et la vitesse avec lesquelles  $F$  déplace en moyenne par rapport à une mesure de probabilité  $f$ -invariante quelconque. Ceci conduit aux définitions suivantes:

**Définition 1.13.** On note  $\mathcal{M}(f)$  l'ensemble des mesures de probabilités  $f$ -invariantes sur  $\mathbb{T}^2$ . Pour tout  $z \in \mathbb{R}^2$ , on choisit un point  $\tilde{z} \in \pi^{-1}(z)$ , et on note

$$D(F)(z) = F(\tilde{z}) - \tilde{z}.$$

Cette quantité (appelée *déplacement de  $F$  en  $z$* ) ne dépend pas du choix du relevé  $\tilde{z}$  de  $z$ . Pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}(f)$ , on note alors

$$\rho(F, \mu) = \int_{\mathbb{T}^2} D(F)(z) d\mu(z).$$

Finalement, on définit l'ensemble

$$\rho_{mes}(F) = \{\rho(F, \mu) \mid \mu \in \mathcal{M}(f)\}.$$

Il peut être intéressant de voir ce qui se passe si on se restreint aux mesures ergodiques:

**Définition 1.14.** On note  $\mathcal{M}_{erg}(f)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{M}(f)$  constitué des mesures ergodiques, et on définit l'ensemble

$$\rho_{erg}(F) = \{\rho(F, \mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_{erg}(f)\}.$$

Avant de comparer les ensembles  $\rho_{points}(F)$ ,  $\rho(F)$ ,  $\rho_{mes}(F)$  et  $\rho_{erg}(F)$ , nous allons décrire quelques propriétés fondamentales partagées par tous ces ensembles.

**Proposition 1.15.** *Pour toute translation  $T$  de vecteur  $u$  à coordonnées entières, on a:*

1.  $\rho_{points}(T \circ F) = \rho_{points}(F) + u,$
2.  $\rho(T \circ F) = \rho(F) + u,$
3.  $\rho_{mes}(T \circ F) = \rho_{mes}(F) + u,$
4.  $\rho_{erg}(T \circ F) = \rho_{erg}(F) + u.$



*Preuve.* Pour tout point  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$  et tout entier  $n > 0$ , on a

$$\frac{1}{n} ((T \circ F)^n(\tilde{z}) - \tilde{z}) = \frac{1}{n} (T^n \circ F^n(\tilde{z}) - \tilde{z}) = \frac{1}{n} (n \cdot u + F^n(\tilde{z}) - \tilde{z}) = \left( \frac{1}{n} (F^n(\tilde{z}) - \tilde{z}) \right) + u$$

(la première égalité résulte de la commutation de  $F$  avec  $T$ ). On en déduit immédiatement les égalités  $\rho_{points}(T \circ F) = \rho_{points}(F) + u$  et  $\rho(T \circ F) = \rho(F) + u$ .

En utilisant les égalités ci-dessus pour  $n = 1$  on voit que, pour toute mesure de probabilité  $f$ -invariante  $\mu$ , on a

$$\int_{\mathbb{T}^2} D(T \circ F)(z) d\mu(z) = \left( \int_{\mathbb{T}^2} D(F)(z) d\mu(z) \right) + u.$$

En utilisant alors que  $F$  et  $T \circ F$  sont deux relevés de l'homéomorphisme  $f$ , on en déduit les égalités  $\rho_{mes}(T \circ F) = \rho_{mes}(F) + u$  et  $\rho_{erg}(T \circ F) = \rho_{erg}(F) + u$ .  $\square$

Tout relevé  $F'$  de l'homéomorphisme  $f$  est de la forme  $F' = T \circ F = F \circ T$  où  $T$  est une translation de vecteurs à coordonnées entières. La proposition 1.15 montre donc que les ensembles de rotations  $\rho_{points}(F)$ ,  $\rho(F)$ ,  $\rho_{mes}(F)$  et  $\rho_{erg}(F)$  ne dépendent que très peu du choix du relevé  $F$  de  $f$  : si on avait choisit un autre relevé, on aurait obtenu les mêmes ensembles translatés par un vecteur à coordonnées entières.

**Proposition 1.16.** *Pour tout entier  $q \geq 0$ , on a*

1.  $\rho_{points}((F^q) = q \cdot \rho_{points}(F)$ ,
2.  $\rho((F^q) = q \cdot \rho(F)$ ,
3.  $\rho_{mes}((F^q) = q \cdot \rho_{mes}(F)$ ,
4.  $\rho_{erg}((F^q) = q \cdot \rho_{erg}(F)$ .

*Preuve.* Soit  $v \in \rho(F^q)$ . Alors il existe une suite d'entiers  $(n_k)_{k \geq 0}$  et une suite de points  $(\tilde{z}_k)_{k \geq 0}$  telles que

$$\frac{(F^q)^{n_k}(\tilde{z}_k) - \tilde{z}_k}{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} v.$$

Alors

$$\frac{F^{qn_k}(\tilde{z}_k) - \tilde{z}_k}{qn_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{1}{q} v.$$

Par conséquent,  $\frac{1}{q} v \in \rho(F)$ . Ceci montre que  $\rho(F^q) \subset q \cdot \rho(F)$ .

Réciproquement, soit  $q \in \rho(F)$ . Alors il existe une suite d'entiers  $(n_k)_{k \geq 0}$  et une suite de points  $(\tilde{z}_k)_{k \geq 0}$  telles que

$$\frac{F^{n_k}(\tilde{z}_k) - \tilde{z}_k}{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} v.$$

Considérons une constante  $M$  telle que, pour tout  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$  et tout  $i \in \{0, \dots, q-1\}$ , on a  $\|F^i(\tilde{z}) - \tilde{z}\| \leq M$ . Pour tout  $k \geq 0$ , notons  $p_k$  et  $r_k$  le quotient et le reste de la division euclidienne de  $n_k$  par  $q$ , et notons  $\tilde{z}'_k = F^{qp_k}(\tilde{z}_k)$ . On a alors

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{F^{n_k}(\tilde{z}_k) - \tilde{z}_k}{n_k} - \frac{F^{qp_k}(\tilde{z}_k) - \tilde{z}_k}{qp_k} \right\| \\ & \leq \left\| \frac{F^{n_k}(\tilde{z}_k) - \tilde{z}_k}{n_k} - \frac{F^{n_k}(\tilde{z}_k) - \tilde{z}_k}{qp_k} \right\| + \left\| \frac{F^{n_k}(\tilde{z}_k) - \tilde{z}_k}{qp_k} - \frac{F^{r_k}(\tilde{z}'_k) - \tilde{z}'_k}{qp_k} \right\| \\ & \leq \frac{r_k}{qp_k} \left\| \frac{F^{n_k}(\tilde{z}_k) - \tilde{z}_k}{n_k} \right\| + \frac{M}{qp_k} \end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque  $k$  tend vers l'infini. On en déduit que

$$\frac{F^{qp_k}(\tilde{z}_k) - \tilde{z}_k}{p_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} qv.$$

Donc  $qv \in \rho(F^q)$ . Ceci montre que  $\rho(F^q) \subset q \cdot \rho(F)$ , et termine la preuve de l'item 2. L'item 1 se montre de même en remplaçant la suite  $(\tilde{z}_k)_{k \geq 0}$  dans le raisonnement ci-dessus par une suite constante.

Afin de montrer les items 3 et 4, on commence par remarquer qu'on a

$$D(F^q) = \sum_{i=0}^{q-1} D(F) \circ f^i.$$

Considérons alors un vecteur  $v \in \rho_{mes}(F^q)$ . Par définition, il existe une mesure  $\mu \in \mathcal{M}(f^q)$  telle que

$$v = \int_{\mathbb{T}^2} D(F^q)(z) d\mu(z) = \sum_{i=0}^{q-1} \int_{\mathbb{T}^2} D(F) \circ f^i(z) d\mu(z) = q \cdot \int_{\mathbb{T}^2} D(F^q)(z) d\nu(z),$$

où

$$\nu := \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} (f^i)_*(\mu).$$

La mesure  $\nu$  appartient à  $\mathcal{M}(f)$ . Par conséquent,  $\frac{1}{q}v \in \rho_{mes}(F)$ . Ceci montre que  $\rho_{mes}(F^q) \subset q \cdot \rho_{mes}(F)$ . On remarque de plus que, dans le raisonnement ci-dessus, la mesure  $\nu$  est ergodique pour  $f$  dès lors que la mesure  $\mu$  l'est pour  $f^q$ . Ceci montre que  $\rho_{erg}(F^q) \subset q \cdot \rho_{erg}(F)$ .

Considérons alors un vecteur  $v \in \rho_{mes}(F)$ . Il existe une mesure  $\nu \in \mathcal{M}(f)$  telle que

$$v = \int_{\mathbb{T}^2} D(F)(z) d\nu(z).$$

La mesure  $\nu$  est invariante par  $f^q$ , et on a

$$\int_{\mathbb{T}^2} D(F^q)(z) d\nu(z) = \sum_{i=0}^{q-1} \int_{\mathbb{T}^2} D(F) \circ f^i(z) d\nu(z) = q \cdot \int_{\mathbb{T}^2} D(F)(z) d\nu(z) = qv$$

(l'égalité centrale résulte du fait que  $\mu$  est  $f$ -invariante). On en déduit que  $qv \in \rho_{mes}(F^q)$ . Ceci montre que  $q \cdot \rho_{mes}(F) \subset \rho_{mes}(F^q)$ , et termine la preuve de l'item 3. Pour terminer la preuve de l'item 4, il faut un peu modifier le raisonnement ci-dessus. En effet, supposons que la mesure  $\nu$  est ergodique pour  $f$ . Alors, elle n'est pas nécessairement ergodique pour  $f^q$ . Néanmoins, on sait qu'il existe un entier  $q'$  qui divise  $q$  et une mesure  $\mu$  invariante et ergodique pour  $f^{q'}$  tels que

$$\nu = \frac{1}{q'} \sum_{i=0}^{q'-1} (f^{q'} \circ f^i)_*(\mu).$$

On a alors en particulier,

$$\nu = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} (f^i)_*(\mu)$$

et donc

$$v = \int_{\mathbb{T}^2} D(F)(z) d\nu(z) = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} \int_{\mathbb{T}^2} D(F) \circ f^i(z) d\mu(z) = \frac{1}{q} \int_{\mathbb{T}^2} D(F^q)(w) d\mu(z).$$

Par conséquent,  $qv \in \rho_{erg}(F^q)$ . Ceci montre que  $q \cdot \rho_{erg}(F) \subset \rho_{erg}(F^q)$ , et termine la preuve de l'item 4.  $\square$

**Proposition 1.17.** *Pour tout entier  $q \geq 0$ , on a*

1.  $\rho((F^{-1}) = -\rho(F)$ ,
2.  $\rho_{mes}((F^{-1}) = -\rho_{mes}(F)$ ,
3.  $\rho_{erg}((F^{-1}) = -\rho_{erg}(F)$ .

*Proof.* Si  $(n_k)_{k \geq 0}$  est une suite d'entiers, et si  $(\tilde{z}_k)_{k \geq 0}$  est une suite de points de  $\mathbb{R}^2$ , alors pour tout  $k \geq 0$ , on a

$$\frac{F^{n_k}(\tilde{z}_k) - \tilde{z}_k}{n_k} = - \frac{(F^{-1})^{n_k}(\tilde{z}'_k) - \tilde{z}'_k}{n_k}$$

où  $\tilde{z}'_k = F^{n_k}(\tilde{z}_k)$ . On en déduit immédiatement l'item 1.

Pour montrer les item 2 et 3, on remarque que  $D(F^{-1}) = -D(F) \circ f^{-1}$ . Par ailleurs, pour toute mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\mathbb{T}^2$ , la mesure  $\mu$  est  $f$ -invariante si et seulement si elle est  $f^{-1}$ -invariante, et on a

$$\int_{\mathbb{T}^2} D(F^{-1}) d\mu = - \int_{\mathbb{T}^2} D(F) d(f^{-1})_*(\mu) = \int_{\mathbb{T}^2} D(F) d\mu.$$

L'item 2 en découle immédiatement. Pour montrer l'item 3, il suffit de reprendre le raisonnement ci-dessus en remarquant qu'une mesure est ergodique pour  $f$  si et seulement si elle l'est pour  $f^{-1}$ .  $\square$

**Question 1.18.** *L'égalité  $\rho_{points}(F^{-1}) = -\rho_{points}(F)$  est-elle vraie ?*

Lorsqu'on a défini les ensembles  $\rho_{points}(F)$ ,  $\rho(F)$ ,  $\rho_{mes}(F)$  et  $\rho_{erg}(F)$ , on a utilisé la structure affine sur  $\mathbb{R}^2$ . La proposition ci-dessous montre cependant que les ensembles  $\rho_{points}(F)$ ,  $\rho(F)$ ,  $\rho_{mes}(F)$  et  $\rho_{erg}(F)$  sont cependant indépendant de tout choix de coordonnées locales sur  $\mathbb{T}^2$ :

**Proposition 1.19.** *Les ensembles  $\rho_{points}(F)$ ,  $\rho(F)$ ,  $\rho_{mes}(F)$  et  $\rho_{erg}(F)$  sont des invariants de conjugaison. Plus précisément, si  $H \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{T}^2)$ , alors on a*

1.  $\rho_{points}(H^{-1} \circ F \circ H) = \rho_{points}(F)$ ,
2.  $\rho(H^{-1} \circ F \circ H) = \rho(F)$ ,
3.  $\rho_{mes}(H^{-1} \circ F \circ H) = \rho_{mes}(F)$ ,
4.  $\rho_{erg}(H^{-1} \circ F \circ H) = \rho_{erg}(F)$ .

*Preuve.* Puisque  $H$  commute à l'action de  $\mathbb{Z}^2$ , on peut trouver une constante  $M$  telle que, pour tout  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$ , on a  $\|H^{-1}(\tilde{z}) - \tilde{z}\| \leq M$ . Considérons maintenant une suite d'entiers  $(n_k)_{k \geq 0}$  et une suite de points  $(\tilde{z}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Pour tout  $k \geq 0$ , notons  $\tilde{z}'_k = H(\tilde{z}_k)$ . On a alors

$$\frac{(H^{-1} \circ F \circ H)^{n_k}(\tilde{z}_k) - \tilde{z}_k}{n^k} = \frac{H^{-1} \circ F^{n_k} \circ H(\tilde{z}_k) - \tilde{z}_k}{n^k} = \frac{H^{-1} \circ F^{n_k}(\tilde{z}'_k) - H^{-1}(\tilde{z}'_k)}{n^k}.$$

D'où

$$\left\| \frac{(H^{-1} \circ F \circ H)^{n_k}(\tilde{z}_k) - \tilde{z}_k}{n^k} - \frac{F^{n_k}(\tilde{z}'_k) - \tilde{z}'_k}{n^k} \right\| \leq \frac{2M}{n_k}$$

qui tend vers 0 lorsque  $k \rightarrow \infty$ . L'item 2 en découle. Pour obtenir l'item 1, il suffit de prendre la suite  $(\tilde{z}_k)_{k \geq 0}$  constante dans le raisonnement ci-dessus.

Soit maintenant  $\mu \in \mathcal{M}(f)$ . On note  $h$  l'homéomorphisme du tore  $\mathbb{T}^2$  dont  $H$  est un relevé. Alors  $h_*(\mu) \in \mathcal{M}(h^{-1} \circ f \circ h)$ . De plus, en notant  $\tilde{\mu}$  la mesure  $\mu$  relevée à  $\mathbb{R}^2$ , on a, pour tout  $q \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \rho(H^{-1} \circ F \circ H, h_*(\mu)) &= \int_{\mathbb{T}^2} D(H^{-1} \circ F \circ H)(\tilde{z}) - \tilde{z} \, dh_*(\mu)(z) \\ &= \int_{[0,1]^2} H^{-1} \circ F \circ H(\tilde{z}) - \tilde{z} \, dH_*(\tilde{\mu})(\tilde{z}) \\ &= \frac{1}{q} \int_{[0,1]^2} H^{-1} \circ F^q \circ H(\tilde{z}) - \tilde{z} \, dH_*(\tilde{\mu})(\tilde{z}) \\ &= \frac{1}{q} \int_{[0,1]^2} H^{-1} \circ F^q \circ -H^{-1}(\tilde{z}) \, d\tilde{\mu}(\tilde{z}) \end{aligned}$$

En utilisant que  $\|(H^{-1} \circ F^q \circ H(\tilde{z}) - H^{-1}(\tilde{z})) - (F^q(\tilde{z}) - \tilde{z})\| \leq 2M$  pour tout  $\tilde{z}$ , on en déduit que

$$\|\rho(H^{-1} \circ F \circ H, h_*(\mu)) - \rho(F, \mu)\| \leq \frac{2M}{q}.$$

Et laissant  $q$  tendre vers l'infini, on obtient finalement  $\rho(H^{-1} \circ F \circ H, h_*(\mu)) = \rho(F, \mu)$ . L'item 3 en découle, ainsi que l'item 4 après avoir remarqué que  $\mu$  est ergodique pour  $f$  si et seulement si  $h_*(\mu)$  l'est pour  $h^{-1} \circ f \circ h$ .  $\square$

**Remarque 1.20.** Dans la preuve de la proposition 1.19, le seul point crucial est le fait que  $H$  est à distance finie de l'identité. Par contre, le fait que  $H$  soit injective n'intervient pas réellement. Ainsi, la même preuve que ci-dessus montre que, si  $F$  et  $G$  sont deux éléments de  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{T}^2)$ , et s'il existe une application continue (pas nécessairement injective)  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $\|H - \text{Id}\|_\infty < \infty$  par exemple,  $H$  et telle que  $F \circ H = H \circ G$ , alors on a  $\rho(F) = \rho(G)$ .

### 1.3 Comparaison des différents ensembles de rotations

Dans la partie précédente, nous avons défini quatre ensembles  $\rho(F)$ ,  $\rho_{\text{points}}(F)$ ,  $\rho_{\text{mes}}(F)$  et  $\rho_{\text{erg}}(F)$  qui mesurent tous la façon dont les orbites de  $f$  tournent autour du tore  $\mathbb{T}^2$ . Nous allons maintenant essayer de comprendre les liens entre ces divers ensembles<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Rappelons que, dans le cas des homéomorphismes du cercle, les analogues des ensembles  $\rho(F)$ ,  $\rho_{\text{points}}(F)$ ,  $\rho_{\text{mes}}(F)$  et  $\rho_{\text{erg}}(F)$  sont tous égaux à un singleton  $\{\rho\}$  (et le réel  $\rho$  est, par définition, le nombre de rotation de l'homéomorphisme considéré).

**Proposition 1.21.** *L'ensemble  $\rho_{mes}(F)$  est convexe, et*

$$\rho_{mes}(F) = \text{Conv}(\rho_{erg}(F)).$$

*Preuve.* On vérifie immédiatement que l'ensemble  $\mathcal{M}(f)$  est convexe. Par ailleurs, si  $\mu, \nu$  sont deux mesures dans  $\mathcal{M}(f)$  et si  $t \in [0, 1]$ , alors, par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\rho(F, t.\mu + (1-t).\nu) = t.\rho(F, \mu) + (1-t).\rho(F, \nu).$$

On en déduit immédiatement que  $\rho_{mes}(F)$  est convexe. Par ailleurs, le théorème de décomposition ergodique affirme que toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}(f)$  est une moyenne de mesures ergodiques. Plus précisément, il existe une mesure  $\theta_\mu$  sur l'ensemble  $\mathcal{M}_{erg}(f)$  telle que, pour toute fonction continue  $\Psi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$\int_{\mathbb{T}^2} \Psi(z) d\mu(z) = \int_{\mathcal{M}_{erg}(f)} \int_{\mathbb{T}^2} \Psi(z) d\nu(z) d\theta_\mu(\nu).$$

Si on prend  $\Psi = D(F)$ , on obtient

$$\rho(F, \mu) = \int_{\mathcal{M}_{erg}(f)} \rho(F, \nu) d\theta_\mu(\nu).$$

En particulier,  $\rho(F, \mu)$  est une moyenne (i.e. une combinaison convexe) d'éléments de  $\rho_{erg}(F)$ . Autrement dit,  $\rho(F, \mu) \in \text{Conv}(\rho_{erg}(F))$ .  $\square$

**Proposition 1.22.** *On a*

$$\rho_{erg}(F) \subset \rho_{points}(F).$$

*Preuve.* La proposition découle du théorème ergodique de Birkhoff. Considérons en effet un vecteur  $v \in \rho_{erg}(F)$ . Alors, il existe une mesure  $\mu \in \mathcal{M}_{erg}(f)$  tel que

$$v = \rho(F, \mu) = \int_{\mathbb{T}^2} D(F)(z) d\mu(z).$$

Puisque  $\mu$  est ergodique, le théorème ergodique de Birkhoff affirme que, pour  $\mu$ -presque tout point  $z \in \mathbb{T}^2$ , on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} D(F)(f^i(z)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^2} D(F)(z) d\mu(z) = v.$$

On remarque alors que, en notant  $\tilde{z}$  un relevé de  $z$ , on a

$$D(F)(f^i(z)) = F^{i+1}(\tilde{z}) - F^i(\tilde{z})$$

(car  $F^i(\tilde{z})$  est un relevé de  $f^i(z)$ ). On en déduit que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D(F)(f^k(z)) = \frac{1}{n} (F^n(\tilde{z}) - \tilde{z}) = \rho_n(F, \tilde{z})$$

En particulier, on a trouvé un point  $z$  tel que  $\rho_n(F, \tilde{z}) \rightarrow v$ . Donc  $v \in \rho_{points}(F)$ .  $\square$

**Remarque 1.23.** En fait, on a montré un peu plus fort que la proposition 1.22 : pour tout  $v \in \rho_{erg}(F)$ , il existe un point  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\rho_n(F, \tilde{z}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v$  (ce qui est un peu plus fort que le fait que  $v \in \rho_{points}(F)$ ).

**Proposition 1.24.** *On a*

$$\text{Conv}(\rho(F)) = \text{Conv}(\rho_{points}(F)) = \rho_{mes}(F).$$

*Preuve.* Les propositions 1.21 et 1.22 mises bout-à-bout montrent que  $\rho_{mes}(F) \subset \text{Conv}(\rho_{points}(F))$ . Par ailleurs, on a trivialement l'inclusion  $\rho_{points}(F) \subset \rho(F)$ . Il nous reste à montrer que  $\text{Conv}(\rho(F)) \subset \rho_{mes}(F)$ . Et comme on sait que  $\rho_{mes}(F)$  est convexe, il suffit de montrer que  $\rho(F) \subset \rho_{mes}(F)$ .

Considérons donc un vecteur  $v \in \rho(F)$ . Il existe alors une suite strictement croissante d'entiers  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et une suite de points  $(\tilde{z}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{R}^2$  tels que

$$\frac{1}{n_k} (F^{n_k}(\tilde{z}_k) - \tilde{z}_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} v.$$

Pour tout  $k$ , on considère alors la mesure de probabilité  $\mu_k$  sur  $\mathbb{T}^2$  définie par

$$\mu_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \delta_{f^i(z_k)}.$$

On note  $\mu$  une valeur d'adhérence pour la topologie faible-\* de la suite  $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$  (rapelons que l'ensemble des mesures de probabilité sur un espace compact muni de sa tribu borélienne est compact pour la topologie faible-\*). Pour tout  $k$ , on a

$$f_*(\mu_k) = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} \delta_{f^i(z_k)}.$$

Pour toute fonction continue  $\Phi$  sur  $\mathbb{T}^2$ , on a donc

$$\left| \int_{\mathbb{T}^2} \Phi(z) d(f_*(\mu_k)(z)) - \int_{\mathbb{T}^2} \Phi(z) d\mu_k(z) \right| = \frac{1}{n_k} |\Phi(f^{n_k}(z_k) - \Phi(z_k))| \leq \frac{2}{n_k} \|\Phi\|_\infty.$$

En faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$ , on voit que ceci montre que la mesure  $\mu$  est  $f$ -invariante. Il nous reste à montrer que  $\rho(F, \mu) = v$ . Pour ce faire, on remarque tout d'abord que la convergence de  $\mu_k$  vers  $\mu$  et le fait que  $D(F)$  est une fonction continue sur  $\mathbb{T}^2$  implique que

$$\rho(F, \mu_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \rho(F, \mu).$$

Puis on remarque que, par définition de la mesure  $\mu_k$ , on a

$$\rho(F, \mu_k) = \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} D(F)(f^i(z_k)) = \frac{1}{n_k} (F^{n_k}(\tilde{z}_k) - \tilde{z}_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} v.$$

Par conséquent, on a bien  $\rho(F, \mu) = v$ . D'où l'inclusion  $\rho(F) \subset \rho_{mes}(F)$ . □

**Théorème 1.25** (Misuirevicz, Ziemian, [33]). *L'ensemble  $\rho(F)$  est convexe.*

Contrairement aux propositions 1.21, 1.22 et 1.24, ce résultat utilise fortement le fait que  $F$  est un homéomorphisme, et le fait qu'on est en dimension 2.

Pour tout ensemble  $A \in \mathbb{R}^2$  et tout réel  $r > 0$ , on note  $B(A, r)$  l'ensemble des points situés à distance inférieure ou égale à  $r$  de  $A$  pour la distance euclidienne. On dit qu'un ensemble  $A$  est  $r$ -presque convexe si  $\text{Conv}(A) \subset B(A, r)$ . On rappelle par ailleurs qu'un domaine fondamental connexe de l'action par translation de  $\mathbb{Z}^2$  le plan  $\mathbb{R}^2$  est, par définition, un disque topologique fermé  $D \subset \mathbb{R}^2$  tel que  $(D+v) \cap \text{Int}(D) = \emptyset$  pour tout  $v \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et si  $\bigcup_{v \in \mathbb{Z}^2} D + v = \mathbb{R}^2$ . La clé du théorème 1.25 est le lemme suivant :

**Lemme 1.26.** *Tout domaine fondamental connexe de l'action par translation de  $\mathbb{Z}^2$  le plan  $\mathbb{R}^2$  est  $\sqrt{2}$ -presque convexe.*

*Proof.* Soit  $D$  un domaine fondamental connexe de l'action de  $\mathbb{Z}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  par translations. On raisonne par l'absurde: on suppose que  $D$  n'est pas  $\sqrt{2}$ -presque convexe. Alors il existe  $\tilde{z} \in \text{Conv}(D)$  tel que la boule fermée de centre  $z$  de rayon  $\sqrt{2}$  soit disjointe de  $D$ . On peut alors trouver choisir deux points  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \text{Int}(D)$  tel que le point  $\tilde{z}$  est sur le segment  $I = [\tilde{x}, \tilde{y}]$ . Puis on peut choisir un arc  $\alpha \subset \text{Int}(D)$  joignant  $\tilde{x}$  à  $\tilde{y}$  et disjoint de l'intérieur segment  $I$ . On note  $\gamma$  la courbe fermé simple constituée du segment  $I$  et de l'arc  $\alpha$ , et  $\Delta$  le disque topologique fermé bordé par  $\gamma$  (figure 1). Alors  $\Delta \cap B(z, \sqrt{2})$  est un demi-disque euclidien fermé de rayon  $\sqrt{2}$ . Par suite, il existe au moins un vecteur  $v \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $\tilde{x} + v \in \Delta \cap B(z, \sqrt{2})$ . Le lemme 1.27 ci-dessous implique alors que les arcs  $\alpha + v$  et  $\alpha$  s'intersectent ; en particulier, les intérieurs des domaines  $D + v$  et  $D$ . Contradiction.  $\square$

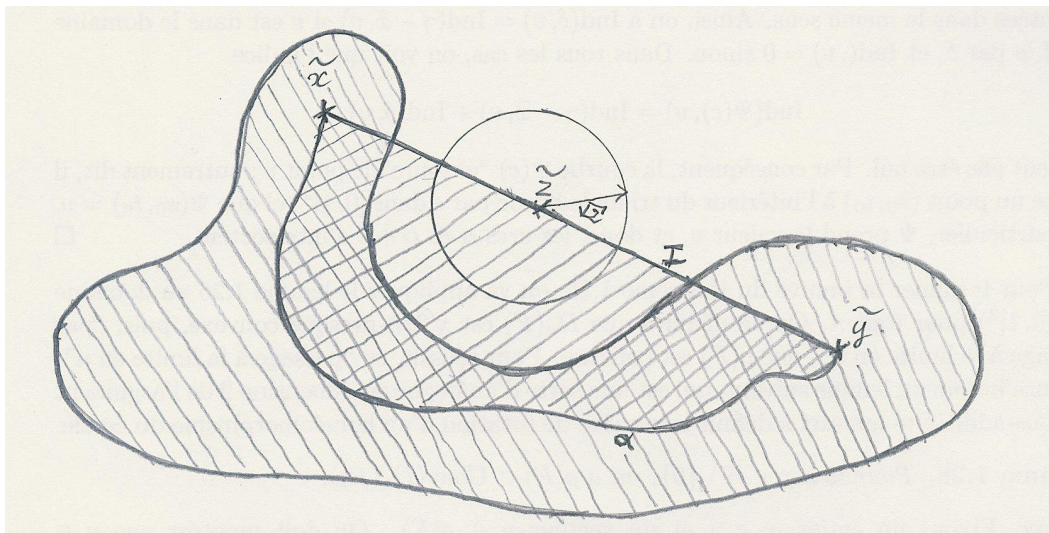


Figure 1: Les objets de la preuve du lemme 1.26

**Lemme 1.27.** *Soient  $\tilde{x}, \tilde{y}$  deux points distincts du plan  $\mathbb{R}^2$  et  $\alpha$  un arc joignant  $\tilde{x}$  à  $\tilde{y}$  sans intersecter l'intérieur du segment  $I = [\tilde{x}, \tilde{y}]$ . On note  $\Delta$  le disque fermé bordé par l'arc  $\gamma$  et le segment  $I$ , et on suppose qu'il existe un vecteur  $v \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\tilde{x} + v$  est dans l'intérieur de  $\Delta$ . Alors les arcs  $\alpha + v$  et  $\alpha$  s'intersectent.*

*Preuve (A. Douady).* On paramètre l'arc  $\alpha$  par l'intervalle  $[0, 1]$  (tel que  $\alpha(0) = \tilde{x}$  et  $\alpha(1) = \tilde{y}$ ), et on considère l'application  $\Psi : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$\Psi(s, t) = \alpha(s) - \alpha(t)$$

(attention,  $\Psi$  n'arrive pas dans le plan affine  $\mathbb{R}^2$  mais dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$  sous-jacent). On remarque que les arcs  $\alpha + v$  et  $\alpha$  s'intersectent si et seulement si  $\Psi$  ne prend pas la valeur  $v$ . On va donc montrer que  $\Psi$  ne prend pas la valeur  $v$ . Et pour ce faire, on va exhiber une courbe fermée simple  $c \subset [0, 1]^2$  telle que  $\text{Ind}(\Psi(c), v) \neq 0$ .

On considère la courbe fermée simple  $c \subset [0, 1]^2$  obtenue en parcourant le triangle de sommets  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  et  $(1, 1)$  dans le sens direct. L'image par  $\Psi$  du segment joignant  $(0, 0)$  à  $(1, 0)$  est l'arc  $\alpha - \tilde{x}$ . L'image par  $\Psi$  du segment joignant  $(1, 0)$  à  $(1, 1)$  est l'arc  $\tilde{y} - \alpha$ . Enfin, l'image par  $\Psi$  du segment joignant  $(1, 1)$  à  $(0, 0)$  stagne à l'origine de  $\mathbb{R}^2$ . Ainsi, la courbe fermée  $\Psi(c)$  consiste à parcourir l'arc  $\alpha - \tilde{x}$  (qui joint l'origine au point  $\tilde{y} - \tilde{x}$ ), puis l'arc  $\tilde{y} - \alpha$  (qui joint  $\tilde{y} - \tilde{x}$  à l'origine). On peut aussi voir  $\Psi(c)$  comme la concaténée de deux courbes fermées :

- la courbe fermée  $\gamma - \tilde{x}$  obtenue en suivant l'arc  $\alpha - \tilde{x}$  de l'origine à  $\tilde{y} - \tilde{x}$ , puis en suivant le segment  $I - \tilde{x}$  de  $\tilde{y} - \tilde{x}$  à l'origine ,
- la courbe fermée  $\delta$  obtenue en suivant le segment  $I - \tilde{x}$  de l'origine à  $\tilde{y} - \tilde{x}$ , puis en suivant l'arc  $\tilde{y} - \alpha$  de  $\tilde{y} - \tilde{x}$  à l'origine. On remarque que cette courbe  $\delta$  est la symétrique de la courbe  $\gamma - \tilde{x}$  par rapport au point  $1/2(\tilde{y} - \tilde{x})$ .

Par hypothèse le point  $\tilde{x} + v$  est dans le domaine  $\Delta$  bordé par la courbe  $\gamma$ . Donc le point  $v$  est dans le domaine  $\Delta - \tilde{x}$  bordé par  $\gamma - \tilde{x}$ . L'indice  $\text{Ind}(\gamma - \tilde{x}, v)$  est donc égal à  $-1$  ou  $1$  suivant que la courbe fermée simple  $\gamma$  est orientée dans le sens direct ou indirect. Puisque  $\delta$  est la symétrique de  $\gamma - \tilde{x}$  par rapport au point  $1/2(\tilde{y} - \tilde{x})$ , les courbes  $\delta$  et  $\gamma - \tilde{x}$  sont orientées dans le même sens. Ainsi, on a  $\text{Ind}(\delta, v) = \text{Ind}(\gamma - \tilde{x}, v)$  si  $v$  est dans le domaine bordé par  $\delta$ , et  $\text{Ind}(\delta, v) = 0$  sinon. Dans tous les cas, on voit que l'indice

$$\text{Ind}(\Psi(c), v) = \text{Ind}(\gamma - \tilde{x}, v) + \text{Ind}(\delta, v)$$

ne peut pas être nul. Par conséquent, la courbe  $\Psi(c)$  "entoure" le point  $v$  ; autrement dit, il existe un point  $(s_0, t_0)$  à l'intérieur du triangle bordé par  $c$  dans  $[0, 1]^2$  tel que  $\Psi(s_0, t_0) = v$ . En particulier,  $\Psi$  prend la valeur  $v$ , et donc, les arcs  $\alpha$  et  $\alpha + v$  s'intersectent.  $\square$

Pour terminer la preuve du théorème 1.25, on va appliquer le lemme 1.26 au domaine  $F^n([0, 1]^2)$  pour tout  $n$ . On en déduira que  $D_n(F)$  est  $\sqrt{2}/n$ -presque convexe, puis, "par passage à la limite en  $n$ ", que  $\rho(F)$  est convexe. Pour réussir, ce "passage à la limite en  $n$ ", on aura besoin du lemme suivant, qui est une sorte d'analogue en dimension 2 de l'argument de sous-additivité qui sert à définir le nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle.

**Lemme 1.28.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , on a  $\rho(F) \subset \text{Conv}(D_n(F))$ .*

*Preuve.* Fixons un entier  $n \geq 1$  et un vecteur  $v \in \rho(F)$ . On doit montrer que  $v \in \text{Conv}(D_n(F))$ . Et puisque  $\text{Conv}(D_n(F))$  est clairement un ensemble fermé, il nous suffit d'exhiber une suite d'éléments de  $D_n(F)$  qui tend vers  $v$ . Fixons donc  $\varepsilon < 0$ . Puisque  $v \in \rho(F)$ , il existe une suite strictement croissante d'entiers  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et une suite de points  $(\tilde{z}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tels que  $\rho_{n_k}(F, \tilde{z}_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} v$ . Pour tout  $k$ , on peut alors écrire

$$\begin{aligned} \rho_{n_k}(F, \tilde{z}_k) &= \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{q-1} (F^n(F^{i \cdot n}(\tilde{z}_k)) - F^{i \cdot n}(\tilde{z}_k)) + \frac{1}{n_k} (F^r(F^{q \cdot n}(\tilde{z}_k)) - F^{q \cdot n}(\tilde{z}_k)) \\ &= \left(1 - \frac{r}{n_k}\right) \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} \frac{F^n(F^{i \cdot n}(\tilde{z}_k)) - F^{i \cdot n}(\tilde{z}_k)}{n} + \frac{r}{n_k} \frac{F^r(F^{q \cdot n}(\tilde{z}_k)) - F^{q \cdot n}(\tilde{z}_k)}{r} \end{aligned}$$



où  $q$  et  $r$  sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de  $n_k$  par  $n$ . Pour tout  $k$ , on considère le vecteur

$$v_k = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} \frac{F^n(F^{i.n}(\tilde{z}_k)) - F^{i.n}(\tilde{z}_k)}{n}.$$

Ce vecteur est, par définition, une combinaison convexe d'élément de  $D_n(F)$ . D'autre part, en notant  $M = \sup_{i=1, \dots, n} \left\| \frac{1}{i} (F^i - \text{Id}) \right\|$ , les égalités ci-dessus montrent que

$$\left\| v_k - \frac{F^{n_k}(\tilde{z}_k) - \tilde{z}_k}{n_k} \right\| \leq \frac{r}{n_k} \left( \|v_k\| + \left\| \frac{F^r(F^{qn}(\tilde{z}_k)) - F^{qn}(\tilde{z}_k)}{r} \right\| \right) \leq \frac{n}{n_k} (M + M).$$

On en déduit que  $v_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} v$ . Par conséquent,  $v \in \text{Conv}(D_n(F))$ .  $\square$

*Preuve du théorème 1.25.* Puisque  $F$  commute avec les translation de vecteurs à coordonnées entières, on a

$$D_n(F) = \{\rho_n(F, \tilde{z}) \mid \tilde{z} \in \mathbb{R}^2\} = \{\rho_n(F, \tilde{z}) \mid \tilde{z} \in [0, 1]^2\}.$$

On en déduit

$$D_n(F) \subset B\left(\frac{F^n([0, 1]^2)}{n}, \frac{\sqrt{2}}{n}\right) \quad \text{et} \quad \frac{F^n([0, 1]^2)}{n} \subset B\left(D_n(F), \frac{\sqrt{2}}{n}\right).$$

On remarque alors que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $F^n([0, 1]^2)$  est un domaine fondamental connexe de l'action par translation de  $\mathbb{Z}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  (car  $F^n$  commute à l'action de  $\mathbb{Z}^2$ ). Le lemme 1.26 implique donc que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$B\left(\text{Conv}\left(\frac{F^n([0, 1]^2)}{n}, \frac{\sqrt{2}}{n}\right), \frac{\sqrt{2}}{n}\right) \subset B\left(\frac{F^n([0, 1]^2)}{n}, \frac{2\sqrt{2}}{n}\right).$$

En combinant les inclusions ci-dessus, on obtient

$$\text{Conv}(D_n(F)) \subset B\left(D_n(F), \frac{3\sqrt{2}}{n}\right).$$

Soit maintenant  $v \in \text{Conv}(\rho(F))$ . D'après le lemme 1.28,  $v \in \text{Conv}(D_n(F))$  pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . D'après les inclusions ci-dessus, il en résulte que

$$v \in B\left(D_n(F), \frac{3\sqrt{2}}{n}\right)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Par conséquent, il existe une suite de vecteurs  $(v_n)_{n>0}$  telle que  $v_n \in D_n(F)$  pour tout  $n > 0$ , et telle que  $v_n \rightarrow v$  quand  $n \rightarrow \infty$ . En particulier,  $v \in \limsup D_n(F) = \rho(F)$ . Par conséquent,  $\rho(F)$  est convexe.  $\square$

**Remarque 1.29.** La preuve du théorème 1.25 montre en fait que la suite de compacts  $(D_n(F))_{n>0}$  converge en topologie de Hausdorff vers  $\rho(F)$ .

En rassemblant les résultats prouvés ci-dessus, on obtient finalement les relations suivantes entre les différents ensembles de rotations de  $F$ :

$$\rho(F) = \rho_{mes}(F) = \text{Conv}(\rho_{points}(F)) = \text{Conv}(\rho_{erg}(F))$$

et

$$\rho_{erg}(F) \subset \rho_{points}(F).$$

Comme le montre l'exemple 1.33 ci-dessous, l'ensemble  $\rho_{points}(F)$  n'est, en général, pas convexe (autrement dit, on n'a pas en général égalité entre les ensembles  $\rho_{points}(F)$  et  $\rho(F)$ ). Par contre, je ne sais pas si la réponse à la question suivante est connue :

**Question 1.30.** *Existe-t-il des exemples d'homéomorphismes  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{T}^2}(\mathbb{R}^2)$  où l'inclusion  $\rho_{erg}(F) \subset \rho_{points}(F)$  est stricte ?*

## 1.4 Premiers exemples

**Exemple 1.31.** Quel que soient  $v \in \mathbb{R}^2$ , la translation  $F_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$F_v(z) = z + v$$

est le relevé d'un homéomorphisme  $f_v$  du tore  $\mathbb{T}^2$ , appelé *rotation d'angle  $v$* . Pour tout  $z \in \mathbb{T}^2$ , on a clairement  $\rho(F_v, z) = \{z\}$ . Par suite, on a

$$\rho(F_v) = \rho_{points}(F_v) = \rho_{mes}(F_v) = \rho_{erg}(F_v) = \{v\}.$$

**Exemple 1.32.** Soit  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction 1-périodique. On considère l'homéomorphisme  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini par

$$F(x, y) = (x + \Phi(y), y).$$

Cet homéomorphisme commute clairement à toutes les translations à coordonnées entières ; c'est donc le relevé d'un homéomorphisme du tore  $\mathbb{T}^2$  isotope à l'identité. Pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , la droite horizontale  $D_y := \mathbb{R} \times \{y\}$  est invariante par  $F$ , et, quel que soit  $\tilde{z} \in D_y$ , on a clairement  $\rho(F, \tilde{z}) = \Phi(y)$  (l'homéomorphisme  $F$  agit comme une translation de vecteur  $(\Phi(y), 0)$  sur la droite  $D_y$ ). Par suite, on a

$$\rho_{points}(F) = \Psi(\mathbb{R}).$$

Cet ensemble est bien sûr un intervalle compact par continuité et périodicité de  $\Psi$  ; en particulier,  $\rho_{points}(F)$  est convexe, et coïncide donc avec  $\rho(F) = \rho_{mes}(F)$  (on aurait aussi pu déterminer directement l'ensemble  $\rho(F)$ ).

**Exemple 1.33.** Considérons l'homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  défini par

$$F(x, y) = \left( x + \cos(2\pi y), y + \frac{1}{100} \sin(2\pi y) \right).$$

Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , cet homéomorphisme laisse la droite horizontale  $D_k = \mathbb{R} \times \left\{ \frac{k}{2} \right\}$  invariante. Si le point  $p$  est sur la droite  $D_k$  alors on a clairement

$$\rho(F, p) = \begin{cases} \{(0, 1)\} & \text{si } k \text{ est pair} \\ \{(0, -1)\} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

De plus, on voit facilement que l' $\omega$ -limite de tout point  $z = (x, y)$  est la droite  $D_k$  où  $k$  est le plus petit entier supérieur ou égal à  $2y$ . Ainsi, pour tout point  $z \in \mathbb{R}^2$ , on a  $\rho(F, z) = \{(0, -1)\}$  ou  $\rho(F, z) = \{(0, 1)\}$ . On a donc

$$\rho_{points}(F) = \{(0, -1), (0, 1)\}.$$

En particulier, l'ensemble  $\rho_{points}(F)$  n'est pas convexe, et ne coïncide donc pas avec l'ensemble  $\rho(F)$  (qui est égal au segment joignant les points  $(0, -1)$  et  $(0, 1)$  dans  $\mathbb{R}^2$ ).

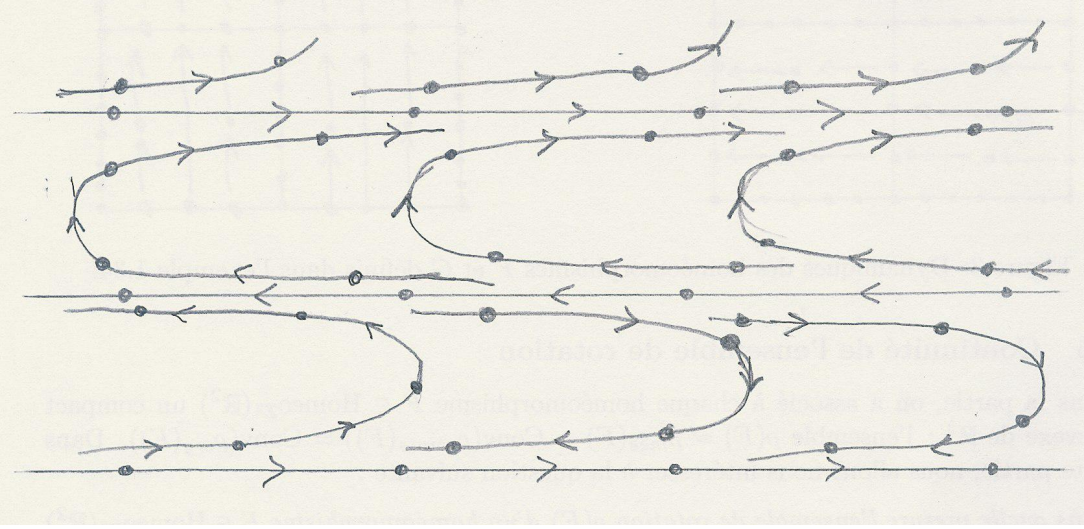


Figure 2: Dynamique de l'homéomorphisme défini dans l'exemple 1.33.

**Exemple 1.34.** Considérons deux applications 1-périodiques  $\Phi, \Psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  telles que  $\Phi(t) = \Psi(t) = 0$  si  $t \in \mathbb{Z}$  et  $\Phi(t) = \Psi(t) = 1$  si  $t \in 1/2 + \mathbb{Z}$ . Considérons alors l'homéomorphisme  $F = H \circ G$  où

$$G(x, y) = (x + \Phi(y), y) \quad \text{et} \quad H(x, y) = (x, y + \Psi(x)).$$

Puisque  $\Phi$  et  $\Psi$  sont 1-périodique l'homéomorphisme  $F$  relève un homéomorphisme de  $\mathbb{T}^2$  isotope à l'identité.

On remarque alors que  $F(1/2, 0) = (1/2, 1)$  ; par récurrence, on a donc  $F^n(1/2, 0) = (1/2, n)$  pour tout  $n$  ; et par suite,  $\rho(F, (1/2, 0)) = (0, 1)$ . De même, on vérifie que  $\rho(F, (0, 1/2)) = (1, 0)$ ,  $\rho(F, (1/2, 1/2)) = (1, 1)$  et  $\rho(F, (0, 0)) = (0, 0)$ . Les quatre coins du carré  $[0, 1]^2$  sont donc dans  $\rho_{points}(F)$ . L'ensemble  $\rho(F) = \text{Conv}(\rho_{points}(F))$  contient donc le carré  $[0, 1]^2$ . Par ailleurs, pour tout point  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on remarque que  $F(x, y) - (x, y) = (\Phi(x), \Psi(x + \Phi(y)))$ . En particulier,  $F(x, y) - (x, y) \in [0, 1]^2$ . Par récurrence, on en déduit que, pour tout  $n$ , on a  $F^n(x, y) - (x, y) \in [0, n]^2$ . Par conséquent, l'ensemble  $\rho(F)$  est inclus dans le carré  $[0, 1]^2$ . Nous avons donc prouvé que

$$\rho(F) = [0, 1]^2.$$

Nous verrons plus tard que les ensembles  $\rho_{erg}(F)$  et  $\rho_{points}(F)$  ne coïncident pas avec l'ensemble  $\rho(F)$ . En fait, on a les ensembles  $\rho_{points}$  et  $\rho_{erg}(F)$  sont tous deux égaux à la réunion du carré ouvert  $]0, 1[^2$  et des quatre coins de ce carré.

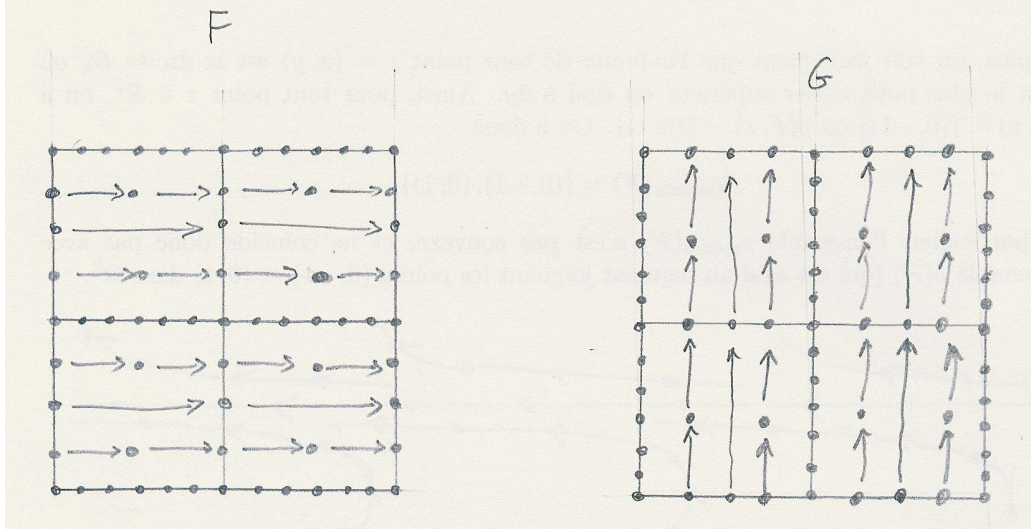


Figure 3: Dynamiques des homéomorphismes  $F$  et  $G$  définis dans l'exemple 1.34.

### 1.5 Continuité de l'ensemble de rotation

Dans la partie, on a associé à chaque homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  un compact convexe de  $\mathbb{R}^2$  : l'ensemble  $\rho(F) = \rho_{\text{mes}}(F) = \text{Conv}(\rho_{\text{points}}(F)) = \text{Conv}(\rho_{\text{erg}}(F))$ . Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la question suivante :

*Dans quelle mesure l'ensemble de rotation  $\rho(F)$  d'un homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  dépend-il continument de  $F$  ?*

**Remarque 1.35.** On peut bien sûr s'intéresser à la même question en remplaçant l'ensemble  $\rho(F)$  par l'ensemble  $\rho_{\text{points}}(F)$  ou  $\rho_{\text{erg}}(F)$ . On a décidé de ne parler que du seul ensemble  $\rho(F)$  afin d'alléger le discours, et parce que cet ensemble jouit de propriétés plus agréables (compacité, convexité) que les ensembles  $\rho_{\text{points}}(F)$  ou  $\rho_{\text{erg}}(F)$ . Le lecteur attentif notera cependant que certains résultats de semi-continuité de l'ensemble  $\text{Rot}(F)$  présentés ci-dessous s'étendent en résultats de semi-continuité de l'ensemble  $\rho_{\text{points}}(F)$ .

Afin de lever toute ambiguïté sur le sens de la question ci-dessus, il convient de préciser les topologies qu'on considère :

- les deux topologies usuelles sur  $\text{Homeo}(\mathbb{R}^2)$  (la topologie compacte-ouverte, et la topologie forte de Whitney) coïncident sur  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  ; on munit  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  de l'une de ces deux topologies ;
- l'image de l'application  $F \mapsto \rho(F)$  définie sur  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  est incluse dans l'ensemble des compacts de  $\mathbb{R}^2$  ; on note  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$  cet ensemble, et on le munit de la topologie de Hausdorff.

Le premier résultat de continuité remonte à l'article fondateur de Misiurevicz et Ziemian:

**Théorème 1.36** (Misiurevicz, Ziemian, [33]). *L'application  $F \mapsto \rho(F)$  de  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  dans  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$  est semi-continue supérieurement.*

Autrement dit, si  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  qui converge vers un homéomorphisme  $F$ , alors

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho(F_n) \subset \rho(F)$$

(où la  $\limsup$  s'entend au sens de la topologie de Hausdorff). De manière équivalente: si  $F$  est un élément de  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$ , et  $U$  un voisinage de  $\rho(F)$  dans  $\mathbb{R}^2$  de l'ensemble  $\rho(F)$ , alors, pour tout  $G \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  suffisamment proche de  $F$ , on a

$$\rho(G) \subset U.$$

*Preuve de la proposition 1.36.* Le résultat découle facilement de la caractérisation de l'égalité  $\rho(F) = \rho_{mes}(F)$ , et de la compacité (faible) de l'ensemble des mesures de probabilité sur  $\mathbb{T}^2$ .

Considérons en effet une suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  qui converge vers un homéomorphisme  $F$ . On note  $f_n$  (resp.  $f$ ) l'homéomorphisme de  $\mathbb{T}^2$  dont  $F_n$  (resp.  $F$ ) est un relevé. Soit  $v$  un vecteur dans  $\limsup \rho(F_n)$ . Il existe alors une suite strictement d'entiers  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , et, pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , un vecteur  $v_k \in \rho(F_{n_k})$  tel que la suite  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $v$ . D'après l'égalité  $\rho(F) = \rho_{mes}(F)$ , on peut trouver, pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , une mesure de probabilité  $f_{n_k}$ -invariante sur  $\mathbb{T}^2$  tel que  $\rho(F_{n_k}, \mu_k) = v_k$ . L'espace des mesures de probabilité de  $\mathbb{T}^2$  est compact pour la topologie faible- $\star$ ; quitte à extraire, on peut donc supposer que la suite  $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers une mesure de probabilité  $\mu$ . On vérifie immédiatement que  $\mu$  est  $f$ -invariante, et que  $\rho(F, \mu) = v$ . En particulier,  $v \in \rho(F)$ . Par conséquent,  $\limsup \rho(F_n) \subset \rho(F)$ .  $\square$

**Question 1.37.** *Les applications  $F \mapsto \rho_{points}(F)$  et  $F \mapsto \rho_{erg}(F)$  de  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  dans  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$  sont-elles semi-continues supérieurement ?*

L'application  $F \mapsto \rho(F)$  de  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  dans  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$  n'est pas semi-continue inférieurement, comme le montre l'exemple suivant:

**Exemple 1.38.** On considère l'homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  défini par

$$F_0(x, y) = (x + \cos(2\pi y), y).$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , l'homéomorphisme  $F_0$  préserve la droite horizontale  $\mathbb{R} \times \{t\}$ , et pour tout  $z \in \mathbb{R} \times \{t\}$ , on a  $\rho(F_0, z) = \{(\cos(2\pi t), 0)\}$ . On a donc  $\rho_{points}(F_0) = [-1, 1] \times \{0\}$ . Et par suite,  $\rho(F_0) = \text{Conv}(\rho_{points}(F_0)) = [-1, 1] \times \{0\}$ . On considère maintenant, pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, l'homéomorphisme  $F_\varepsilon \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  défini par

$$F_\varepsilon(x, y) = (x + \cos(2\pi y), y + \varepsilon \sin^2(\pi y)).$$

On vérifie facilement que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble  $\omega$ -limite de toute orbite de  $F_\varepsilon$  est inclus dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ . Or, pour tout  $z \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ , on a  $\rho(F_\varepsilon, z) = \{(1, 0)\}$ . Par conséquent, on a  $\rho_{points}(F_\varepsilon)$  est réduit au singleton  $\{(1, 0)\}$ . Et par suite,  $\rho(F) = \text{Conv}(\rho_{points}(F_\varepsilon))$  est également réduit à ce singleton. Ceci montre que l'application  $F \mapsto \rho(F)$  n'est pas semi-continue inférieurement au point  $F$ .

L'application  $F \mapsto \rho(F)$  de  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  dans  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$  possède cependant de nombreux points de continuité. On observe tout d'abord que cette application est continue en tout point  $\tilde{f}$  tel que  $\rho(F)$  est "suffisamment petit":

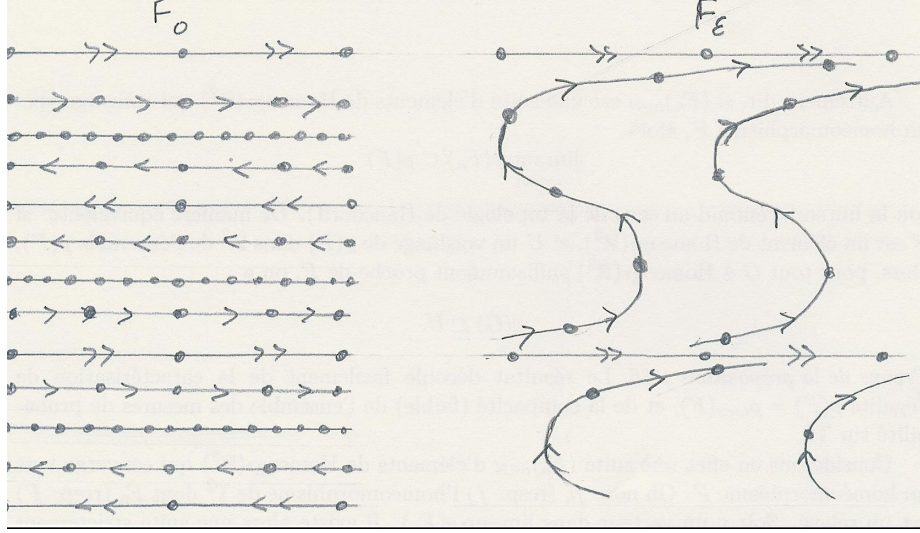


Figure 4: Les homéomorphismes  $F_0$  et  $F_\varepsilon$  (pour  $\varepsilon > 0$ ) définis dans l'exemple 1.38

**Proposition 1.39.** *L'application  $F \mapsto \rho(F)$  de  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}^2)$  dans  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$  est continue en tout point  $F$  tel que  $\rho(F)$  est réduit à un point.*

*Preuve.* La proposition découle en fait directement du théorème 1.36. Considérons en effet un homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\rho(F)$  est réduit à un singleton  $\{v\}$ , et un réel  $\varepsilon > 0$ . On doit montrer que pour tout  $G$  proche de  $F$ , l' $\varepsilon$ -voisinage de  $\rho(F)$  contient  $\rho(G)$  et réciproquement. D'après le théorème 1.36, il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $F$  dans  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}^2)$  tel que, pour tout  $G$  dans  $\mathcal{U}$ , l'ensemble  $\rho(G)$  est inclus dans l' $\varepsilon$ -voisinage du singleton  $\{v\}$ . Par ailleurs, pour tout  $G$  dans  $\mathcal{U}$ , choisissons un point  $v_G$  dans  $\rho(G)$ . Alors, la distance entre  $v$  et  $v_G$  est inférieure à  $\varepsilon$  (car  $\rho(G)$  est inclus dans l' $\varepsilon$ -voisinage de  $\{v\}$ ), et par conséquent, l'ensemble  $\rho(F) = \{v\}$  est inclus dans l' $\varepsilon$ -voisinage de  $\rho(G)$ .  $\square$

L'application  $F \mapsto \rho(F)$  de  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}^2)$  dans  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$  est également continue en tout point  $F$  tel que  $\rho(F)$  est "suffisamment gros":

**Théorème 1.40** (Llibre, MacKay, [32]). *L'application  $F \mapsto \rho(F)$  de  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}^2)$  dans  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$  est continue en chaque homéomorphisme  $F$  tel que  $\rho(F)$  est d'intérieur non-vide.*

En tenant compte du fait que les ensembles de rotations sont convexes, ceci signifie que: étant donné un homéomorphisme  $F$  tel que l'ensemble  $\rho(F)$  est d'intérieur non-vide, étant donné deux compacts  $K_1$  et  $K_2$  tels que  $K_1 \subset \text{Int}(\rho(F)) \subset \rho(F) \subset \text{Int}(K_2)$ , pour tout  $G$  proche de  $F$ , on a

$$K_1 \subset \rho(G) \subset K_2.$$

*Preuve du théorème 1.40.* Soit  $F$  un élément de  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}^2)$  (relevé d'un homéomorphisme  $f$  de  $\mathbb{T}^2$ ) tel que  $\rho(F)$  est d'intérieur non-vide. On sait déjà (théorème 1.36) que l'application  $\rho : \text{Homeo}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$  est semi-continue supérieurement. Il nous reste à montrer la semi-continuité inférieure au point  $F$ . Pour ce faire, on considère un compact  $K$  inclus dans l'intérieur de  $\rho(F)$ . On doit montrer que, pour tout  $G$  assez proche de  $F$ , le compact  $K$  est inclus dans  $\rho(G)$ . L'argument clé est le fait suivant que l'on démontrera dans la partie 3 (voir l'addendum 3.16):

*Fait.* Soit  $v = (p_1/q, p_2/q)$  un vecteur à coordonnées rationnelles dans  $\text{Int}(\rho(F))$ . Alors, pour tout  $G$  suffisamment proche de  $F$ , il existe un point  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$  tel que  $G^q(x) = x + (p_1, p_2)$  (autrement dit, si on note  $g$  l'homéomorphisme de  $\mathbb{T}^2$  induit par  $G$ , le projeté de  $x$  sur  $\mathbb{T}^2$  est périodique de période  $q$  pour  $g$  et  $\rho(G, x) = (p_1/q, p_2/q)$ ).

Pour terminer la preuve, il suffit de remarquer qu'on peut trouver un nombre fini de vecteurs à coordonnées rationnelles  $v_1, \dots, v_n \in \rho(F)$  tels que le compact  $K$  est inclus dans le polygone  $P = \text{Conv}(v_1, \dots, v_n)$ . D'après le fait ci-dessus, on peut trouver un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $F$  dans  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  tel que, pour tout  $G$  dans  $\mathcal{U}$ , les vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  sont dans  $\rho(G)$ . Par convexité de l'ensemble de rotation, ceci implique que  $P \subset \rho(G)$  pour tout  $G \in \mathcal{U}$ . En particulier,  $K \subset \rho(G)$  pour tout  $G \in \mathcal{U}$ .  $\square$

**Remarque 1.41.** Le théorème 1.40 implique en particulier que l'ensemble

$$\{F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2) \mid \rho(F) \text{ est d'intérieur non-vide} \}$$

est un ouvert de  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$ .

**Remarque 1.42.** En fait, la preuve du théorème 1.40 montrent que les applications  $F \mapsto \rho_{\text{points}}(F)$  et de  $F \mapsto \rho_{\text{erg}}(F)$  de  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  dans  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$  est continue en chaque homéomorphisme  $F$  qui vérifie les hypothèses de ce théorème.



## 2 Ensembles de rotations réalisables

Misiurevicz et Ziemian ont montré que l'ensemble de rotation  $\rho(F)$  d'un homéomorphisme du tore est toujours un sous-ensemble compact convexe de  $\mathbb{R}^2$ . Il est alors naturel de s'intéresser à la question suivante:

*Pour quels ensembles compacts convexes  $K \subset \mathbb{R}^2$  convexes existe-t-il un homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{T}^2)$  tel que  $\rho(F) = K$  ?*

À ce jour, on est loin de posséder une réponse complète à cette question. Par ailleurs, il se pourrait bien que la réponse ne soit guère excitante en elle-même: il se pourrait que tout compact convexe de  $\mathbb{R}^2$  soit l'ensemble de rotation d'un élément de  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{T}^2)$ . Cependant, l'attaque de cette question est une occasion de construire des exemples intéressants d'homéomorphismes du tore.

**Remarque 2.1.** On pourrait bien sûr s'intéresser à l'analogie de la question ci-dessus pour l'ensemble  $\rho_{\text{points}}(F)$  ou l'ensemble  $\rho_{\text{erg}}(F)$  au lieu de l'ensemble  $\rho(F) = \rho_{\text{mes}}(F)$ . Mais on obtiendrait alors une question beaucoup plus délicate. En effet, on ne sait à peu près rien sur les ensembles  $\rho_{\text{points}}(F)$  et  $\rho_{\text{erg}}(F)$  en général (en particulier, ces ensembles ne sont ni convexe, ni fermés en général). On devrait donc envisager tous les sous-ensembles (bornés) du plan au lieu de se restreindre aux ensembles compacts convexes (qui sont beaucoup moins nombreux). Il est donc plus raisonnable de commencer par se concentrer sur l'ensemble  $\rho(F)$ .

### 2.1 Points

Commençons par une remarque triviale. Étant donné un vecteur  $v \in \mathbb{R}^2$ , considérons la translation  $F_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de vecteur  $v$ . Cet homéomorphisme commute bien sûr à l'action de  $\mathbb{Z}^2$  par translation ( $\mathbb{R}^2$  est abélien !), et on a clairement  $\rho(F_v) = \{v\}$ . On en déduit le fait trivial suivant:

**Fait 2.2.** *Pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$ , il existe un homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  tel que l'ensemble  $\rho(F)$  est réduit au singleton  $\{v\}$ .*

Au-delà de cette remarque triviale, il est intéressant, étant donné un vecteur  $v \in \mathbb{R}^2$ , de chercher des exemples d'homéomorphismes  $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{R}^2)$  ayant un relevé  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  tels que  $\rho(F) = \{v\}$ . On s'aperçoit alors qu'on peut trouver des exemples où la dynamique de  $f$  est très différente de celle d'une simple rotation:

- c'est évident dans le cas où les coordonnées de  $v$  sont rationnelles. Considérons par exemple le cas où  $v = (0, 0)$ . Quel que soit l'homéomorphisme  $F$  du carré  $[0, 1]^2$  égal à l'identité sur le bord de ce carré, on peut prolonger  $F$  en un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  qui commute avec les transformation entière. On aura alors automatiquement  $\rho(F) = \{(0, 0)\}$ . En choisissant correctement  $F$  sur le carré  $[0, 1]^2$ , on peut cependant avoir des dynamiques locales très riches (par exemple, on peut choisir  $F$  d'entropie topologique strictement positive). Cette construction se généralise au cas où  $v$  est un vecteurs à coordonnées rationnelles quelconques : si  $v = (p/q, p'/q)$  avec  $p, p', q$  premiers, il suffit de remplacer le carré  $[0, 1]^2$  par le carré  $[0, 1/q]^2$  dans la construction ci-dessus afin d'obtenir un homéomorphisme  $F$  qui commute à l'action par translation de  $(1/q)\mathbb{Z}$  (et tel que  $\rho(F) = \{(0, 0)\}$ ), puis de composer cet homéomorphisme par la translation de vecteur  $v = (p/q, p'/q)$ .



- c’est beaucoup moins évident (et donc beaucoup plus intéressant) dans le cas où les coordonnées de  $v$  sont irrationnelles (en particulier lorsqu’elle sont rationnellement indépendantes) Il existe cependant plusieurs techniques pour construire des exemples d’homéomorphismes  $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$  tels que, pour un certain relevé  $F$  de  $f$ , l’ensemble  $\rho(F)$  est un singleton à coordonnées irrationnelles, et tels que la dynamique de  $f$  est fort différente de celle d’une rotation. On peut par exemple obtenir des homéomorphismes topologiquement mélangeants, d’entropie topologique strictement positive, etc. Ces constructions seront présentées dans les cours de S. Crovisier ([7]) et B. Fayad ([8]).

## 2.2 Segments

### Segments à pente rationnelle contenant un point rationnel

**Proposition 2.3.** *Si  $K$  est un segment non-trivial dans  $\mathbb{R}^2$ , de pente rationnelle, et contenant un point à coordonnées rationnelles, alors il existe un homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\rho(F) = K$ .*

Avant de donner une preuve formelle de cette proposition, commençons par expliquer l’idée de cette preuve. Dans l’exemple 1.32, on a expliqué comment construire un homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\rho(F)$  est un segment arbitraire inclus dans l’axe horizontal ( $y = 0$ ). L’homéomorphisme  $F$  préserve alors chaque droite horizontale dans  $\mathbb{R}^2$  ; autrement dit, l’homéomorphisme  $f$  induit par  $F$  sur  $\mathbb{T}^2$  préserve feuille à feuille le feuilletage en cercles horizontaux de  $\mathbb{T}^2$ . En fait, la direction horizontal n’a aucune propriété particulière ; on peut facilement généraliser la construction de l’exemple 1.32 afin d’obtenir un homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\rho(F)$  est un segment arbitraire inclus dans une droite de pente  $\alpha \in \mathbb{Q}$  (pour  $\alpha \in \mathbb{Q}$  arbitraire) (il est nécessaire que  $\alpha$  soit rationnel, sinon on n’arrive pas à obtenir que  $F$  commute avec l’action de  $\mathbb{Z}$  par translation). L’homéomorphisme  $F$  préserve alors chaque droite de pente  $\alpha$  ; autrement dit, l’homéomorphisme  $f$  induit par  $F$  sur  $\mathbb{T}^2$  préserve feuille à feuille le feuilletage en cercles de pente  $\alpha$  de  $\mathbb{T}^2$ . Dans la construction, on peut demander que  $F$  commute à une translation  $T_{(0,\beta)}$  de vecteur  $(0, \beta)$  (avec  $\beta \in \mathbb{Q}$  arbitraire). En posant  $F' = F \circ T_{(0,\beta)}$ , on obtient un homéomorphisme tel que  $\rho(F')$  est un segment arbitraire dans la droite ( $y = \alpha x + \beta$ ) où  $\alpha, \beta$  sont des nombres rationnels arbitraires. L’homéomorphisme  $f'$  induit sur  $\mathbb{T}^2$  par  $F'$  préserve toujours globalement (mais pas feuille à feuille) le feuilletage en cercle de pente  $\alpha$ . Voici une preuve plus formelle:

*Preuve de la proposition 2.3.* Supposons que  $K$  n’est pas vertical. Alors  $K$  est inclus dans une droite d’équation ( $y = \alpha x + \beta$ ) avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ . Plus précisément, il existe deux réels  $x_-, x_+$  tel que  $K$  est le segment joignant le point  $(x_-, \alpha x_- + \beta)$  au point  $(x_+, \alpha x_+ + \beta)$ . On considère alors une fonction  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\inf \Psi = x_-$  et  $\sup \Psi = x_+$ , et l’homéomorphisme  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définit par

$$F(x, y + \alpha x) = (x + \Psi(y), y + \alpha(x + \Psi(y))).$$

On vérifie facilement que, pour que  $F$  commute à l’action de  $\mathbb{Z}$  et à la translation  $T$  de vecteur  $(0, \beta)$ , il suffit que  $\Psi$  soit triplement périodique de périodes 1,  $1/\alpha$  et  $\beta$ . C’est possible puisque  $\mathbb{Z} + (1/\alpha)\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$  est discret ( $1/\alpha$  et  $\beta$  sont rationnels). On pose alors  $\rho(F)$  est le segment joignant  $T^{-1}(K)$ . Comme  $T$  commute à  $F$ , on en déduit que, si on pose  $F' = T \circ F = F \circ T$ , alors  $\rho(F') = T(\rho(F)) = K$ .

Dans le cas où  $v$  est vertical, il suffit de reprendre la construction ci-dessus en échangeant les rôles des coordonnées  $x$  et  $y$ .  $\square$

### Segments à pente irrationnelle avec une extrémité rationnelle

Une construction conduisant à un homéomorphisme dont l'ensemble de rotation est un segment (non réduit à un point) à pente irrationnel ne peut être aussi simple que la construction qui conduit à la preuve de la proposition 2.3. Ceci provient tout simplement du fait que les rotations du tore dont "l'angle" est à coordonnées irrationnelles sont beaucoup plus rigides que les rotations "d'angle" à coordonnées rationnelles. On possède cependant un résultat général de réalisabilité de certains segments à pente irrationnelle:

**Proposition 2.4** (Katok). *Pour tout segment non-trivial  $K$ , de pente irrationnelle, dont l'une des extrémités est à coordonnées rationnelles, il existe un homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\rho(F) = K$ .*

Cette proposition se déduit facilement d'un exemple dont la construction est esquissée dans un article de M. Handel ([19] ; voir aussi [17]). Celui-ci attribue la paternité de l'exemple en question à A. Katok.

Pour expliquer le principe de la preuve de la proposition 2.4, considérons le cas particulier où l'une des extrémités de  $K$  est le point  $(0, 0)$ . Notons  $\alpha$  la pente (irrationnelle) de  $K$ . L'idée est de partir du flot d'un champ de vecteurs constant de pente  $\alpha$ , puis de ralentir ce flot au voisinage d'un point  $z_0 \in \mathbb{T}^2$ , jusqu'à créer un point fixe en  $z_0$ . On obtient alors un flot qui possède un point fixe (donc l'ensemble de rotation de son relevé canonique contient  $(0, 0)$ ) et dont les orbites ont pour pente  $\alpha$  (l'ensemble de rotation est donc contenu dans la droite passant par  $K$ ). Il reste alors à voir que, quitte à ajuster la façon dont on "ralentit" le flot de  $X$  au voisinage de  $z_0$ , certaines orbites passent une proportion non-nulle de temps loin de  $z_0$ . Il en résulte que certaines orbites ont un nombre de rotation non-nul. L'ensemble de rotation est donc de la forme  $c.K$  pour un certain  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Il suffit alors de multiplier le champ de vecteurs dont on est parti par  $1/c$  pour obtenir exactement  $K$  comme ensemble de rotation. Essayons de mettre cela en forme :

*Preuve de la proposition 2.4.* Commençons par traiter le cas particulier où  $K$  l'une des extrémités est  $(0, 0)$ . On note  $\alpha$  la pente de  $K$ .

On choisit un champ de vecteurs  $\tilde{X}$  constant non-nul de pente  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Ce champ  $\tilde{X}$  induit un champ  $X$  sur  $\mathbb{T}^2$ . On considère une fonction  $u : \mathbb{T}^2 \rightarrow [0, 1]$  qui s'annule en un point  $z_0 \in \mathbb{T}^2$  et qui est strictement positive sur  $\mathbb{T}^2 \setminus \{z_0\}$  (on imposera d'autres conditions à  $u$  plus tard). On s'intéresse au champ de vecteurs  $Y = u.X$ . On note  $\tilde{Y}$  le relevé de  $Y$  à  $\mathbb{R}^2$ . On note  $f = Y^1$  le temps 1 du flot de  $Y$ , et  $F = \tilde{Y}^1$  le temps 1 du flot de  $\tilde{Y}$ . On a alors les propriétés suivantes:

- D'une part, le point  $z_0$  est alors fixe par le flot de  $Y$  ; autrement dit, tout relevé de  $z_0$  est fixe par le flot de  $\tilde{Y}$ . En particulier,  $F$  possède un point fixe.
- D'autre part, le champ  $\tilde{Y}$  est partout colinéaire au champ  $\tilde{X}$ , donc il a partout pour pente  $\alpha$  ; par conséquent, pour tout  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$ , le vecteur  $F(\tilde{z}) - \tilde{z}$  a pour pente  $\alpha$ .

Les deux propriétés ci-dessus impliquent que le vecteur  $(0, 0)$  appartient à l'ensemble  $\rho(F)$ , et que l'ensemble  $\rho(F)$  est inclus dans la droite qui porte le segment  $K$ . Par convexité de l'ensemble  $\rho(F)$ , ceci implique que  $\rho(F)$  est de la forme  $c.K$  pour un certain  $c \in \mathbb{R}$ . Il nous reste à montrer qu'on peut choisir la fonction  $u$  tel que la constante  $c$  soit non-nulle (en

effet, dans ce cas, il suffira de multiplier le champ  $Y$  par  $1/c$  pour obtenir exactement  $K$  comme ensemble de rotation). Autrement dit, il nous reste à montrer qu'on peut choisir la fonction  $u$  tel que  $\rho(F)$  contient un vecteur non-nul.

Pour ce faire, on considère le cercle vertical  $C$  passant par  $z_0$ . Les orbites de  $Y$  coïncident au paramétrage près avec les orbites de  $X$ , sauf pour l'orbite de  $z_0$  pour  $X$  qui se trouve "découpée" en trois orbites de  $X$ . Ainsi presque toute orbite de  $Y$  est la projection sur  $\mathbb{T}^2$  d'une droite de pente  $\alpha$ . En particulier, l'application de retour  $\Phi : C \rightarrow C$  des orbites de  $Y$  sur le cercle  $C$  est bien définie presque partout, et coïncide, là où elle est définie, avec la rotation d'angle  $\alpha$  sur le cercle  $C$ . La mesure de Lebesgue sur  $C$  est donc invariante et ergodique pour l'application de retour  $\Phi$ . On notera  $\tau : C \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction "temps de retour" des orbites de  $Y$  sur  $C$  (cette fonction est finie presque partout). On a bien sûr  $\Phi(z) = Y^{\tau(z)}$ .

*Affirmation.* On peut choisir la fonction  $u$  tel que  $\tau$  soit intégrable sur  $C$  par rapport à la mesure de Lebesgue.

Pour montrer cela, on commence par relier  $\tau$  et  $u$ . Pour tout  $z \in \mathbb{T}^2$ , notons  $\|z - z_0\| = |x - x_0| + |\alpha| \cdot |y - y_0|$  où  $z_0 = (x_0, y_0)$  et  $z = (x, y)$ , et supposons  $u(z)$  est une fonction décroissante de  $\|z - z_0\|$ . Alors on voit facilement que, le long du segment d'orbite joignant un point  $z$  à son retour  $\Phi(z)$ , la valeur de  $u$  est minimale soit en  $z$ , soit en  $\Phi(z)$ . Par suite, la norme de  $Y$  le long du segment d'orbite joignant un point  $z$  à son retour  $\Phi(z)$ , est supérieure à  $\kappa \cdot \min(u(z), u(\Phi(z)))$  où  $\kappa$  est la norme du champ de vecteurs constant  $X$ . Par suite, le temps de retour  $\tau(z)$  est inférieur à l'inverse de  $\kappa \cdot \min(u(z), u(\Phi(z)))$ . Finalement, on voit qu'il suffit que l'inverse de  $u$  soit intégrable pour que  $\tau$  le soit. Dorénavant, on suppose  $\tau$  intégrable.

*Affirmation.* Si  $\tau$  est intégrable, alors  $\rho(F)$  contient un vecteur différent de  $(0, 0)$ .

Pour tout  $z \in C$ , on note

$$\tau_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \tau(\Phi^k(z))$$

le  $n^{\text{eme}}$  temps de retour de  $z$  sur  $C$ . Puisque la mesure de Lebesgue est ergodique pour  $\Phi$  et puisque  $\tau$  est intégrable, le théorème ergodique de Birkhoff nous dit que, pour Lebesgue presque tout point  $z \in C$ , la quantité  $\tau_n(z)/n$  reste bornée quand  $n \rightarrow \infty$ . Considérons donc un point  $z \in C$  tel que cette quantité reste bornée, ainsi qu'un relevé  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$  de  $z$ . On s'intéresse au segment d'orbite du flot de  $\tilde{Y}$  allant de  $z$  à  $\tilde{Y}^{\tau_n(z)}(\tilde{z})$ . Les relevés du cercle  $C$  sont les droites verticales passant par les points  $\tilde{z} + (k, 0)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . L'orbite de  $\tilde{z}$  pour le flot de  $\tilde{Y}$  est la droite de pente  $\alpha$  passant par  $\tilde{z}$ . L'orbite de  $\tilde{z}$  coupe donc l'union des relevés de  $C$  successivement aux points  $\tilde{z}, \tilde{z} + (1, \alpha), \tilde{z} + 2 \cdot (1, \alpha), \text{etc.}$  Puisque  $\tau_n(z)$  est le  $n^{\text{eme}}$  temps de retour de  $\tilde{z}$  sur  $C$ , on sait que le point  $\tilde{Y}^{\tau_n(z)}(\tilde{z})$  est le  $n^{\text{eme}}$  point d'intersection après  $\tilde{z}$  de l'orbite de  $\tilde{z}$  avec l'union des relevés du cercle  $C$ . Par conséquent,  $\tilde{Y}^{\tau_n(z)}(\tilde{z}) = \tilde{z} + n \cdot (1, \alpha)$ . On a donc

$$\frac{1}{\tau_n(z)} (\tilde{Y}^{\tau_n(z)}(\tilde{z}) - \tilde{z}) = \frac{n \cdot (\alpha, 1)}{\tau_n(z)} = \frac{(\alpha, 1)}{\tau_n(z)/n}$$

Puisque  $\tau_n(z)/n$  reste borné lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on obtient que

$$\frac{1}{\tau_n(z)} (\tilde{Y}^{\tau_n(z)}(\tilde{z}) - \tilde{z})$$

a une valeur d'adhérence non-nulle lorsque  $n \rightarrow \infty$ . On en déduit facilement que

$$\frac{1}{n}(\tilde{Y}^n(\tilde{z}) - \tilde{z}) = \frac{1}{n}(F^n(\tilde{z}) - \tilde{z})$$

a une valeur d'adhérence non-nulle lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Donc  $\rho(F)$  contient un vecteur non-nul. Ceci achève la preuve de la proposition dans le cas où l'une des extrémités de  $K$  est le point  $(0,0)$ .

Considérons maintenant le cas général où  $K$  un segment de pente irrationnelle, dont l'une des extrémités est un vecteur à coordonnées rationnelles  $v = (p/q, p'/q)$  (avec  $p, p', q$  entiers premiers entre eux). Alors  $K - v$  est un segment de pente irrationnelle, dont l'une des extrémités est  $(0,0)$ . On a expliqué ci-dessus comment construire un homéomorphisme  $F$  tel que  $\rho(F) = K - v$ . De plus, il n'est pas difficile de modifier la construction ci-dessus pour obtenir que l'homéomorphisme  $F$  commute à la translation  $T_v$  de vecteur  $v$  (il suffit de choisir la fonction  $u$  invariante par  $(1/q)\mathbb{Z}$ ). On pose alors  $F' = T_v \circ F = F \circ T_v$ . On vérifie immédiatement que  $\rho(F') = K$ .  $\square$

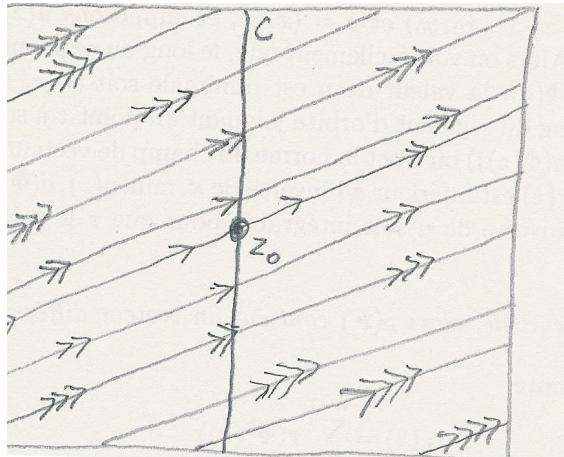


Figure 5: Les orbites du flot du champ de vecteurs  $Y$ , et le cercle  $C$ .

### Autres segments

Franks et Misiurevicz ont conjecturé que le fait 2.2 et les propositions 2.3 et 2.4 décrivent tous les compacts convexes d'intérieurs vides réalisables comme ensembles de rotations:

**Conjecture 2.5** (Franks, Misiurevicz, [17]). *Pour tout  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$ , si le convexe  $\rho(F)$  est d'intérieur vide alors il est de l'un des types suivants :*

- un singleton,
- un segment de pente rationnelle passant par un point à coordonnées rationnelles<sup>3</sup>,
- un segment de pente irrationnelle dont l'une des extrémités est à coordonnées rationnelles.

<sup>3</sup>Les points à coordonnées rationnelles sont alors automatiquement denses dans ce segment

Cette conjecture est appuyée par le théorème suivant:

**Théorème 2.6** (Franks, Misiurewicz, [17]). *Soit  $f$  un homéomorphisme du tore  $\mathbb{T}^2$  isotope à l'identité et  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  un relevé de  $f$ . Si  $f$  est le temps 1 d'un flot continu, alors l'ensemble  $\rho(F)$  est de l'un des trois types suivants:*

- un singleton,
- un segment contenu dans une droite de pente rationnelle passant par  $(0, 0)$  (le segment lui-même ne contient pas nécessairement  $(0, 0)$ ),
- un segment de pente irrationnelle, dont l'une des extrémités est le point  $(0, 0)$ .

*Preuve.* Soit  $(\phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$  un flot continu sur  $\mathbb{T}^2$  dont  $f$  est le temps 1. Soit  $(\Phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$  un relevé à  $\mathbb{R}^2$  du flot  $(\phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ . On supposera que  $\rho(F) \neq \{(0, 0)\}$  (dans le cas contraire, il n'y a rien à démontrer). Le cœur de la preuve est l'affirmation suivante:

*Affirmation.* *Il existe un vecteur non-nul  $v$  tel que toute orbite du flot  $(\Phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$  reste à distance bornée de la droite  $\mathbb{R}.v$  (la borne dépend de l'orbite).*

Pour montrer cette affirmation, on va s'intéresser aux abscisses des points d'intersections des orbites de  $(\Phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$  avec les droites horizontales d'ordonnées entières. Plus précisément, on considère l'ensemble

$$E = \{\tilde{z} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{n}(F^n(\tilde{z}) - \tilde{z}) \text{ converge vers un vecteur non-horizontale}\}$$

Cet ensemble est bien sûr invariant sous l'action de  $\mathbb{Z}^2$ . Pour tout  $z \in E$ , l'orbite pour le flot  $(\Phi^t)$  du point  $\tilde{z}$  coupe la droite  $(y = n)$ ; on note  $A_n(\tilde{z})$  le premier point d'intersection de l'orbite de  $\tilde{z}$  avec cette droite, et  $x_n(\tilde{z})$  l'abscisse de  $A_n(\tilde{z})$ . On note

$$X_n = \{x_n(\tilde{z}) \mid \tilde{z} \in E\}$$

et  $X$  l'union de tous les  $X_n$ . On s'intéresse alors à l'application  $T : X \rightarrow X$  définie par

$$T(x_n(\tilde{z})) = x_{n+1}(\tilde{z})$$

En utilisant la commutation de  $\Phi^t$  avec l'action de  $\mathbb{Z}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ , on voit que  $X$  est invariant par l'action de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{R}$ , que  $T$  est bien définie et commute à l'action par translations de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{R}$ . En utilisant le fait que les orbites du flot  $(\Phi^t)$  ne se croisent pas, on vérifie facilement que  $T$  est une application strictement croissante ou strictement décroissante. L'application  $T$  n'est définie que sur un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ , mais on peut l'étendre à  $\mathbb{R}$  entier tout en préservant la monotonie et la commutation avec l'action de  $\mathbb{Z}$ . Ceci suffit à définir un nombre de translation de  $\rho$  pour l'application  $T$  (la définition du nombre de translation des homéomorphismes de  $\mathbb{R}$  commutant  $\mathbb{R}$  à l'action de  $\mathbb{Z}$  n'utilise pas que le fait que ces homéomorphismes sont strictement croissants), et à montrer que la quantité  $T^n(\tilde{z}) - \tilde{z} - n\rho$  est bornée indépendamment de  $n$  (voir l'addendum 1.6). Autrement dit, la suite des points  $(A_n(\tilde{z}))_{n \in \mathbb{Z}}$  reste à distance bornée de la droite  $x = \rho y$ . On en déduit immédiatement que, pour tout  $z \in E$ , l'orbite par  $(\Phi^t)$  de  $\tilde{z}$  reste à distance bornée de la droite  $x = \rho y$  (il suffit d'augmenter la borne précédente de la longueur du segment d'orbite entre  $A_n(\tilde{z})$  et  $A_{n+1}(\tilde{z})$ , qui ne dépend pas de  $n$  puisque le flot  $(\Phi^t)$  commute à l'action de  $\mathbb{Z}^2$ ). En particulier, la quantité  $F^n(\tilde{z}) - \tilde{z}$  reste à distance bornée de la droite  $x = \rho y$ . Maintenant, si  $\tilde{y}$  est un point quelconque de  $\mathbb{R}^2$ , on choisit  $k$  tel que  $\tilde{y}$  est situé entre

l'orbite de  $\tilde{z}$  et l'orbite par  $\tilde{z} + (0, k)$ . Puisque les orbites ne se croisent pas, l'orbite de  $\tilde{y}$  est coincée entre ces deux orbites, et reste donc à distance bornée de la droite ( $x = \rho y$ ). Ceci termine la preuve de l'affirmation (en posant  $v = (\rho, 1)$ ).

L'affirmation implique en particulier que l'ensemble  $\rho(F)$  est inclus dans la droite  $\mathbb{R}.v$ . En particulier,  $\rho(F)$  est un segment (éventuellement réduit à un point). Pour terminer la preuve du théorème, il reste à montrer que, dans le cas où la pente de  $v$  est irrationnelle, alors l'un des points extrémaux du segment  $\rho(F)$  est situé en  $(0, 0)$ . Supposons que le contraire. Alors,  $\rho(F)$  possède deux points extrémaux  $v_1, v_2$  distincts de  $(0, 0)$ . L'égalité  $\rho(F) = \text{Conv}(\rho_{erg}(F))$  montre alors qu'il existe deux mesures de probabilités  $\mu_1, \mu_2$  sur  $\mathbb{T}^2$ , ergodiques pour  $f$ , et telles que  $\rho(F, \mu_1) = v_1$  et  $\rho(F, \mu_2) = v_2$ . L'application  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  induit une application  $t : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Les mesures  $\mu_1, \mu_2$  induisent deux mesures de probabilité  $\nu_1, \nu_2$  sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  invariante et ergodiques pour l'application  $t$  (on relève les mesures  $\mu_1, \mu_2$  à  $\mathbb{T}^2$ , on projette ensuite sur  $X \subset \mathbb{R}$  via  $\tilde{z} \mapsto x_n(\tilde{z})$ , puis on projette sur  $X/\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ). Les mesures  $\nu_1, \nu_2$  sont distinctes car les mesures  $\mu_1, \mu_2$  le sont. Mais l'application  $t$  a, par hypothèse, un nombre de rotation irrationnel (égal à  $\rho$ , où  $v = (\rho, 1)$ ) ; elle est donc uniquement ergodique. Contradiction.  $\square$

**Remarque 2.7.** Dans [27], Kwapisz affirme qu'il n'existe aucun homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\rho(F)$  est un segment non-trivial à pente rationnelle ne passant pas par aucun point à coordonnées rationnelles (théorème 1.2). Cependant, la preuve fournie pour ce résultat ne semble pas correcte (le lemme 6.4 est faux). À ma connaissance, il n'y a donc eu aucune avancée en direction de la conjecture 2.5 depuis que Franks et Misiurevicz l'ont énoncée.

## 2.3 Compacts convexes d'intérieurs non-vides

### 2.3.1 Polygones à sommets rationnels

Le résultat le plus intéressant concernant la réalisation de convexe d'intérieurs non-vides comme ensembles de rotations d'homéomorphismes du tore est dû à J. Kwapisz:

**Théorème 2.8** (Kwapisz, [22]). *Pour tout polygone convexe  $K$  dont les sommets ont des coordonnées rationnelles, il existe un homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\rho(F) = K$ .*

L'outil principal de la preuve de ce théorème est la notion de *partition de Markov*. Commençons par rappeler quelques définitions et propriétés liées à cette notion.

Soit  $\Sigma$  une surface. On appellera *rectangle* l'image  $R = h(I \times J)$  d'un plongement topologique de  $h$  du produit de deux segments  $I, J \subset \mathbb{R}$  dans  $\Sigma$ . Étant un tel rectangle  $R = h(I \times J)$ , l'ensemble  $h(I \times \partial J)$  (formé de deux segments disjoints) s'appelle le *bord horizontal* de  $R$  ; l'ensemble  $h(\partial I \times J)$  s'appelle le *bord vertical* de  $R$ . Un *sous-rectangle horizontal* de  $R$  est un rectangle  $H \subset R$  tel que le bord instable de  $H$  est inclus dans celui de  $R$ . Un *sous-rectangle horizontal* de  $R$  est un rectangle  $V \subset R$  tel que le bord stable de  $V$  est inclus dans celui de  $R$ . Le point important est que tout sous-rectangle horizontal de  $R$  a une intersection non-vide avec tout sous-rectangle vertical de  $R$ .

Soit  $F$  un homéomorphisme d'une surface  $\Sigma$ . On appellera *partition de Markov* pour  $F$  toute une collection (éventuellement infinie)  $\mathcal{M}$  de rectangles deux-à-deux disjoints dans  $\Sigma$  avec la propriété suivante: si  $R$  et  $R'$  sont deux rectangles de  $\mathcal{M}$ , alors toute composante

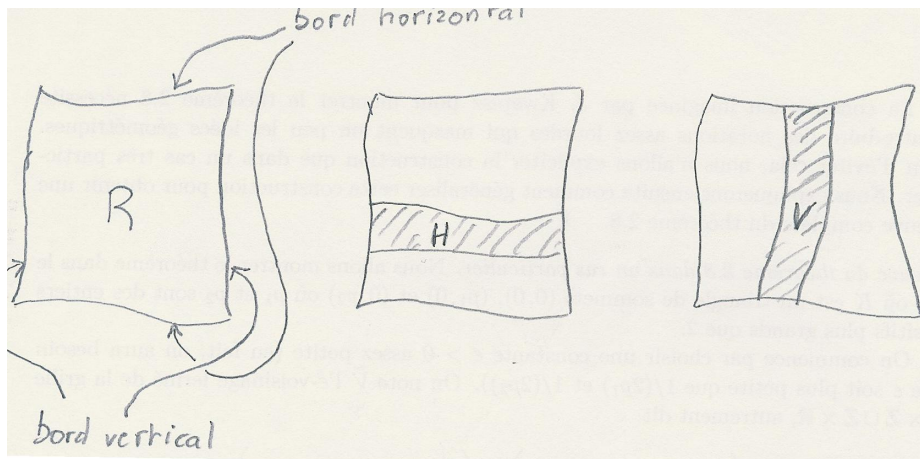


Figure 6: Un rectangle  $R$ , un sous-rectangle horizontal  $H$  de  $R$ , et un sous-rectangle vertical  $V$  de  $R$

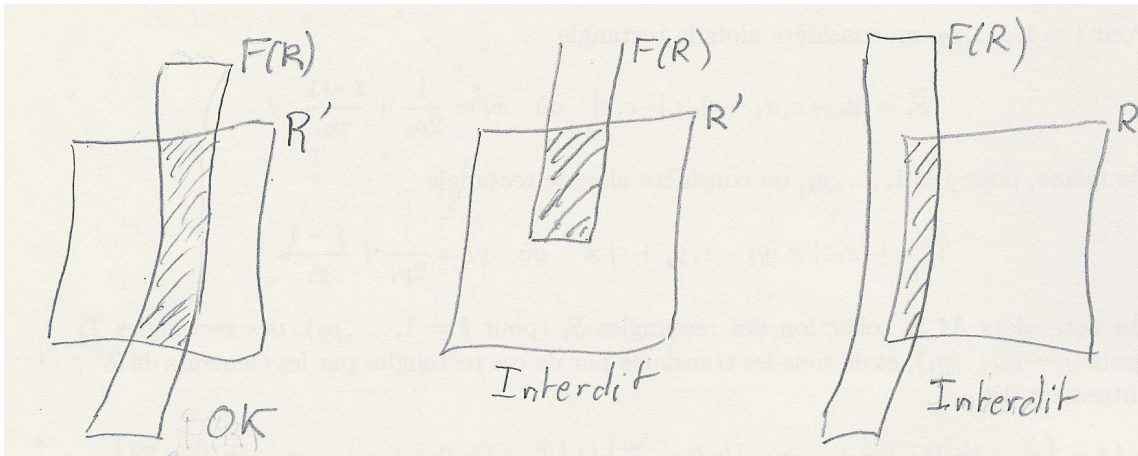


Figure 7: Intersections autorisées et interdites pour une partition de Markov

connexe de  $F(R) \cap R'$  est à la fois un sous-rectangle vertical de  $R'$  et l'image par  $F$  d'un sous-rectangle horizontal de  $R$ .

La propriété fondamentale d'une partition de Markov est la suivante:

**Fait 2.9.** Si  $R$ ,  $R'$  et  $R''$  sont trois rectangles (non nécessairement distincts) d'une partition de Markov  $\mathcal{M}$  pour un homéomorphisme  $F$ , si  $F(R)$  intersecte  $R'$  et  $F(R'j)$  intersecte  $R''$ , alors  $F^2(R)$  intersecte  $R''$ .

*Preuve.* Soit  $S$  une composante connexe de  $F(R) \cap R'$ , et  $T$  une composante connexe de  $F(R'j) \cap R''$ . Alors, par définition d'une partition de Markov,  $S$  est un sous-rectangle vertical de  $R'$ , et  $F^{-1}(T)$  est un sous-rectangle horizontal de  $R'$ . Par conséquent,  $S$  intersecte  $F^{-1}(T)$ . Ceci implique en particulier que  $F(R)$  intersecte  $F^{-1}(R'')$ . De manière équivalente,  $F^2(R)$  intersecte  $R''$ .  $\square$

Étant une partition de Markov  $\mathcal{M}$  pour un homéomorphisme  $F$ , le *graphe d'incidence* de  $\mathcal{M}$  est le graphe orienté  $\mathcal{G}$  dont les sommets sont les rectangles de  $\mathcal{M}$  et tel qu'il y a une arête du sommet  $R$  vers le sommet  $R'$  si le rectangle  $F(R)$  intersecte le rectangle  $R'$ . On peut alors reformuler le fait 2.9 comme suit:

**Fait 2.10.** *S'il y a un chemin orienté de longueur  $n$  allant du sommet  $R$  au sommet  $R'$  dans le graphe d'incidence  $\mathcal{G}$  d'une partition de Markov  $\mathcal{M}$ , alors le rectangle  $F^n(R)$  intersecte le rectangle  $R'$ .*

La construction imaginée par J. Kwapisz pour montrer le théorème 2.8 nécessite d'introduire des notations assez lourdes qui masquent un peu les idées géométriques. Afin d'éviter cela, nous n'allons expliciter la construction que dans un cas très particulier. Nous expliquerons ensuite comment généraliser cette construction pour obtenir une preuve complète du théorème 2.8.

*Preuve du théorème 2.8 dans un cas particulier.* Nous allons montrer le théorème dans le cas où  $K$  est un triangle de sommets  $(0, 0)$ ,  $(p_1, 0)$  et  $(0, p_2)$  où  $p_1$  et  $p_2$  sont des entiers positifs plus grands que 2.

On commence par choisir une constante  $\varepsilon > 0$  assez petite (en fait, on aura besoin que  $\varepsilon$  soit plus petite que  $1/(2p_1)$  et  $1/(2p_2)$ ). On note  $\tilde{V}$  l' $\varepsilon$ -voisinage fermé de la grille  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ , autrement dit

$$\left( \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k - \varepsilon, k + \varepsilon] \times \mathbb{R} \right) \cup \left( \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{R} \times [k - \varepsilon, k + \varepsilon] \right)$$

Pour  $i = 1, \dots, p_2$ , on considère alors le rectangle

$$\tilde{S}_i = [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \quad \text{où} \quad x_i = \frac{1}{2p_2} + \frac{i-1}{p_2}.$$

De même, pour  $j = 1, \dots, p_1$ , on considère alors le rectangle

$$\tilde{T}_j = [-\varepsilon, \varepsilon] \times [y_j - \varepsilon, y_j + \varepsilon] \times \quad \text{où} \quad y_j = \frac{1}{2p_1} + \frac{j-1}{p_1}.$$

On note alors  $\mathcal{M}$  la collection des rectangles  $S_i$  (pour  $i = 1, \dots, p_2$ ), des rectangles  $T_j$  (pour  $j = 1, \dots, p_1$ ), et de tous les translatés par de ces rectangles par les éléments de  $\mathbb{Z}^2$ ; autrement dit

$$\mathcal{M} = \left\{ \tilde{S}_i + (k, l) ; i = 1 \dots p_2, (k, l) \in \mathbb{Z}^2 \right\} \cup \left\{ \tilde{T}_j + (k, l) ; j = 1 \dots p_1, (k, l) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

La région  $\tilde{V}$  et les rectangles de  $\mathcal{M}$  sont représentés sur la figure 8.

*Affirmation.* *Il existe un homéomorphisme  $F : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  avec les propriétés suivantes:*

1. *L'homéomorphisme  $F$  commute à l'action par translations de  $\mathbb{Z}^2$ .*
2. *La collection de rectangles  $\mathcal{M}$  est une partition de Markov pour  $F$ .*
3. *Pour  $i = 1, \dots, p_2 - 1$ , le rectangle  $F(\tilde{S}_i)$  intersecte le rectangle  $\tilde{S}_i$  et le rectangle  $\tilde{S}_{i+1} = \tilde{S}_i + \left(\frac{1}{p_2}, 0\right)$  (mais aucun autre rectangle  $\mathcal{M}$ ).*
4. *Pour  $j = 1, \dots, p_1 - 1$ , le rectangle  $F(\tilde{T}_j)$  intersecte le rectangle  $\tilde{T}_j$  et le rectangle  $\tilde{T}_{j+1} = \tilde{T}_j + \left(0, \frac{1}{p_1}\right)$  (mais aucun autre rectangle de  $\mathcal{M}$ ).*



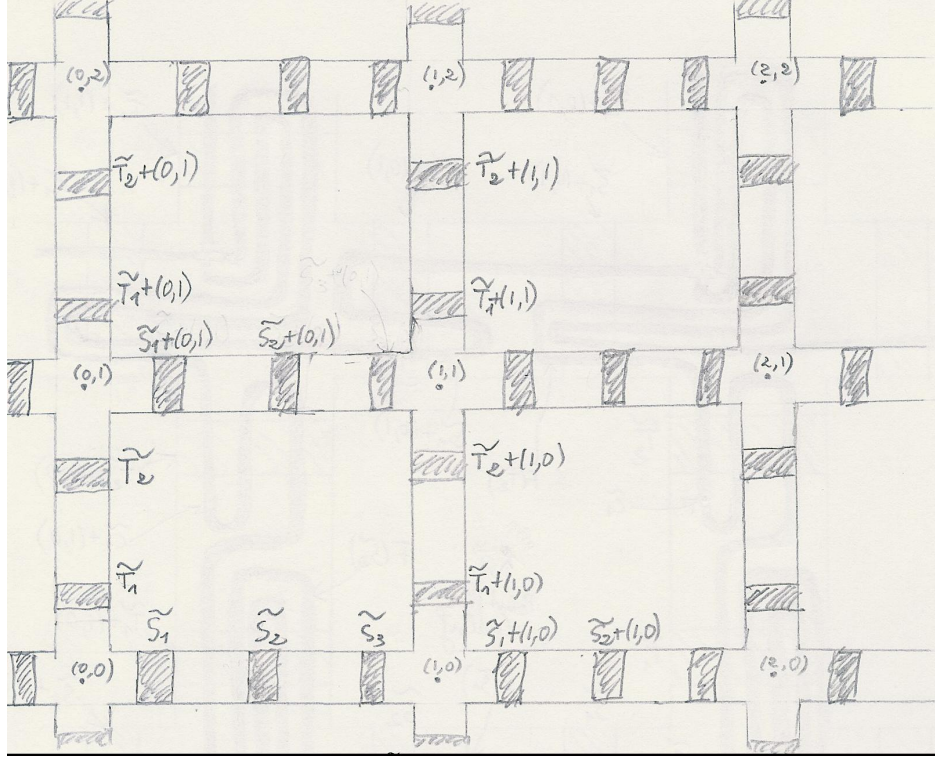


Figure 8: La région  $\tilde{V}$  et les rectangles de la collection  $\mathcal{M}$

5. Le rectangle  $F(\tilde{S}_{p_2})$  intersecte le rectangle  $\tilde{S}_{p_2}$ , le rectangle  $\tilde{S}_1 + (1, 0) = \tilde{S}_{p_2} + \left(\frac{1}{p_2}, 0\right)$  et le rectangle  $\tilde{T}_1 + (1, 0) = \tilde{S}_{p_2} + \left(\frac{1}{2p_2}, \frac{1}{2p_1}\right)$  (mais aucun autre rectangle de  $\mathcal{M}$ ).
6. Le rectangle  $F(\tilde{T}_{p_1})$  intersecte le rectangle  $\tilde{T}_{p_1}$ , le rectangle  $\tilde{T}_1 + (0, 1) = \tilde{T}_{p_1} + \left(0, \frac{1}{p_1}\right)$  et le rectangle  $\tilde{S}_1 + (0, 1) = \tilde{T}_{p_1} + \left(\frac{1}{2p_2}, \frac{1}{2p_1}\right)$  (mais aucun autre rectangle de  $\mathcal{M}$ ).
7. La région  $\tilde{V}$  est stable par  $F$ . Pour tout point  $\tilde{z} \in \tilde{V}$ , soit l'orbite positive de  $\tilde{z}$  ne sort jamais de l'union des rectangle de  $\tilde{\mathcal{M}}$ , soit elle tend vers un point fixe attractif de  $F$ .
8. Chaque composante connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{V}$  contient un point fixe répulsif de  $F$ . Les orbites positives des autres points de  $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{V}$  sortent de  $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{V}$  au bout d'un certain temps.

Écrire (et lire) une preuve formelle de cette affirmation est particulièrement fastidieux. Nous avons préféré représenter l'allure de l'homéomorphisme  $F$  recherché sur la figure 9. Sur cette figure, le point  $\tilde{a}$  est un point fixe attractif de  $F$  dont le bassin d'attraction contient toute la zone en forme de croix de  $\tilde{V}$  située entre les rectangles  $\tilde{S}_{p_2} - (1, 0)$ ,  $\tilde{S}_1$ , et  $\tilde{T}_{p_1} - (1, 0)$  et  $\tilde{T}_1$ . De même, pour  $i = 1, \dots, p_2 - 1$ , le point  $\tilde{b}_i$  est un point fixe attractifs dont le bassin contient la zone de  $\tilde{V}$  située entre les rectangles  $\tilde{S}_i$  et  $\tilde{S}_{i+1}$ , et pour  $j = 1, \dots, p_1 - 1$  le point  $\tilde{c}_j$  est un point fixe attractifs dont le bassin contient la zone de  $\tilde{V}$  située entre les rectangles  $\tilde{T}_i$  et  $\tilde{T}_{i+1}$ .

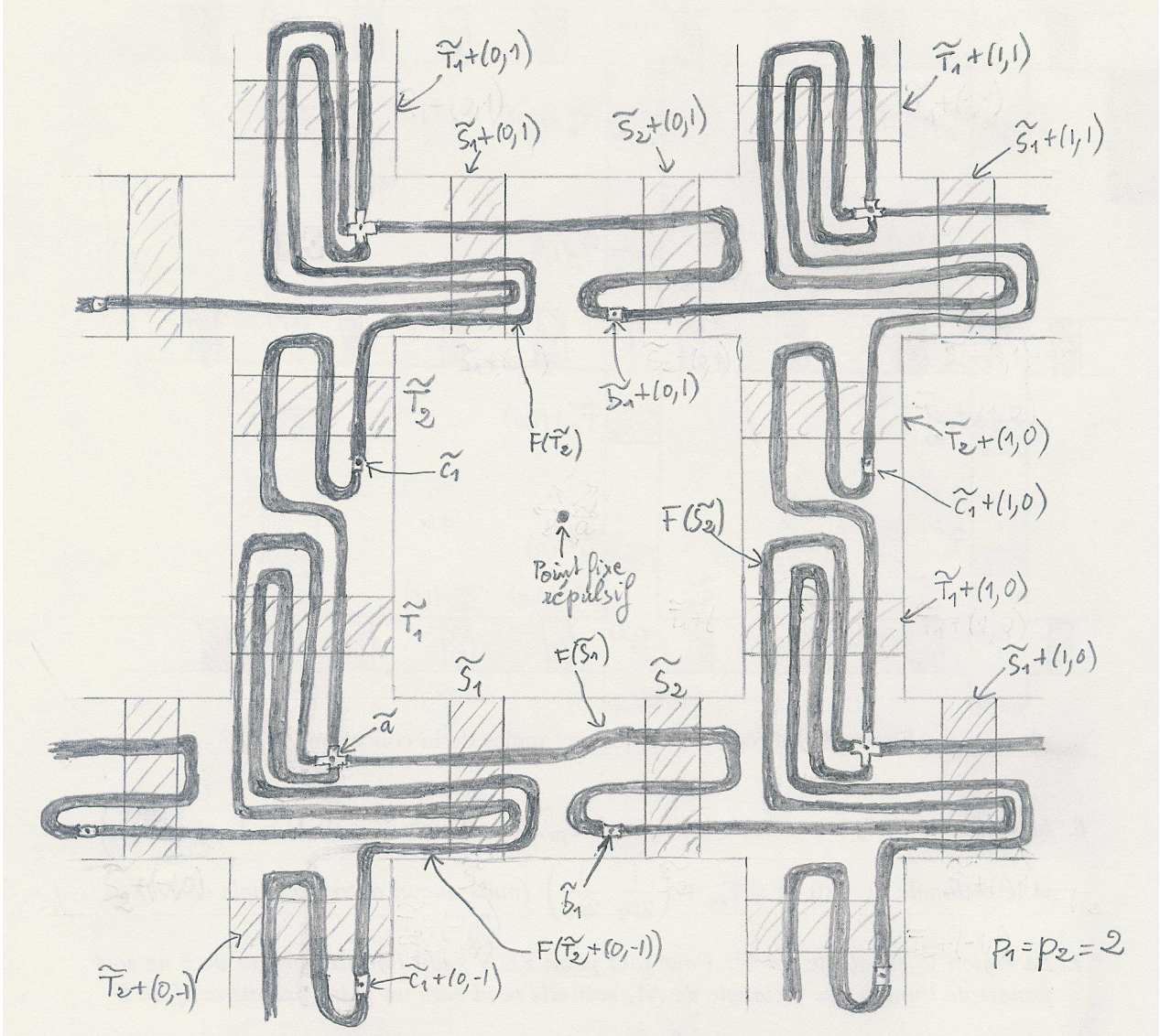


Figure 9: Allure du difféomorphisme  $F$  construit dans la preuve du théorème 2.8.

*Affirmation.* On a  $\rho(F) = \text{Conv} \left\{ (0, 0); \left( \frac{1}{p_2}, 0 \right); \left( 0, \frac{1}{p_1} \right) \right\} = \frac{1}{p_1 p_2} K$ .

Pour montrer cette affirmation, on remarque tout d'abord que le vecteur  $(0, 0)$  appartient à l'ensemble  $\text{Rot}(F)$  puisque  $F$  possède des points fixes. On considère ensuite le graphe d'incidence  $\mathcal{G}$  de la partition de Markov  $\mathcal{M}$ . Les propriétés 1, 3 et 5 de l'homéomorphisme  $F$  montrent qu'il existe un chemin orienté de longueur  $p_2$  joignant le rectangle  $\tilde{S}_1$  au rectangle  $\tilde{S}_1 + (1, 0)$  dans  $\mathcal{G}$ . Puisque  $F$  commute à l'action de  $\mathbb{Z}^2$ , on en déduit que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe un chemin orienté de longueur  $k p_2$  joignant le rectangle  $\tilde{S}_1$  au rectangle  $\tilde{S}_1 + (k, 0)$  dans  $\mathcal{G}$ . Puisque  $\mathcal{M}$  est une partition de Markov pour  $F$ , ceci implique que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , le rectangle  $F^{k \cdot p_2}(\tilde{S}_1)$  intersecte le rectangle  $\tilde{S}_1 + (k, 0)$  (voir fait 2.9). Par conséquent, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe un point  $\tilde{z}_k \in \tilde{S}_1$  tel

que  $F^{kp_2}(\tilde{z}_k) \in \tilde{S}_1 + (k, 0)$ , ce qui entraîne que

$$\left\| \rho_{kp_2}(F, \tilde{z}_k) - \left( \frac{1}{p_2}, 0 \right) \right\| = \left\| \frac{1}{kp_2} \left( F^{kp_2}(\tilde{z}_k) - \tilde{z}_k \right) - \left( \frac{1}{p_2}, 0 \right) \right\| \leq \frac{2\text{Diam}(\tilde{S}_1)}{kp_2} = \frac{2\sqrt{2}\varepsilon}{k \cdot p_2}.$$

Par conséquent, le vecteur  $(1/p_2, 0)$  appartient à l'ensemble  $\rho(F)$ . En utilisant l'existence d'un chemin orienté de longueur  $p_1$  entre le rectangle  $\tilde{T}_1$  et le rectangle  $\tilde{T}_1 + (0, 1)$  dans le graphe  $\mathcal{G}$ , on montre de même que le vecteur  $(0, 1/p_1)$  est dans l'ensemble  $\rho(F)$ . Ceci conclut la preuve de l'inclusion  $\frac{1}{p_1 p_2} K \subset \rho(F)$ .

Voyons maintenant comment montrer l'inclusion réciproque. Tout d'abord, les propriétés 7 et 8 impliquent que pour tout point  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$ , soit il existe  $n_0$  telle que l'orbite positive de  $F^{n_0}(\tilde{z})$  est contenue dans l'union des rectangles de  $\mathcal{M}$ , soit l'orbite positive de  $\tilde{z}$  tend vers un point fixe de  $F$ . Par conséquent, s'il n'existe aucun  $n_0$  telle que l'orbite positive de  $F^{n_0}(\tilde{z})$  est contenue dans l'union des rectangles de  $\mathcal{M}$ , alors  $\rho_n(F, \tilde{z}) \rightarrow (0, 0)$  quand  $n \rightarrow \infty$ . On se préoccupe maintenant des points dont l'orbite positive est contenue dans l'union des rectangles de  $\mathcal{M}$ . Les propriétés 1, 3, 4, 5 et 6 de  $F$  impliquent que, si  $R$  et  $R'$  sont deux rectangles de  $\mathcal{M}$  tels que  $F(R)$  intersecte  $R'$  alors  $R' = R + v$  où

$$v = (0, 0) \text{ ou } \left( \frac{1}{p_2}, 0 \right) \text{ ou } \left( 0, \frac{1}{p_1} \right) \text{ ou } \left( \frac{1}{2p_2}, \frac{1}{2p_1} \right).$$

Par récurrence, on en déduit que, pour tout  $n$ , si  $R$  et  $R'$  sont deux rectangles de  $\mathcal{M}$  tel qu'il existe un chemin de longueur  $n$  de  $R$  à  $R'$  de longueur  $n$ , alors  $R' = R + v$  avec  $v = (v_x, v_y)$ ,  $0 \leq v_x$ ,  $0 \leq v_y$  et  $p_1 v_x + p_2 v_y \leq 1$ ; autrement dit,

$$R' = R + v \quad \text{où} \quad v \in \frac{1}{p_1 p_2} K.$$

Par conséquent, si  $\tilde{z}$  est un point de  $\mathbb{T}^2$  tel que les points  $\tilde{z}, F(\tilde{z}), \dots, F^n(\tilde{z})$  sont tous dans l'union des rectangles de  $\mathcal{M}$ , alors

$$\rho_n(F, \tilde{z}) = v \quad \text{où} \quad v \in B \left( \frac{1}{p_1 p_2} K, \frac{2\sqrt{2}\varepsilon}{n} \right).$$

Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on en déduit  $\rho(F) \subset \frac{1}{p_1 p_2} K$ , ce qui conclut la preuve de l'affirmation.

Il ne nous reste plus qu'à poser  $F' = F^{p_1 p_2}$ ; on a alors  $\rho(F') = p_1 p_2 \cdot \rho(F) = K$ .  $\square$

*Schéma de preuve du théorème 2.8 dans le cas général.* Soit  $K_0$  un polygone convexe dont les sommets ont des coordonnées rationnelles. Alors il existe  $p$  tel que  $K_1 = pK_0$  est un polygone dont les sommets sont à coordonnées entières. Et il existe alors un vecteur  $v \in \mathbb{Z}^2$  tel que l'un des sommets du polygone  $K_2 = K_1 + v$  est le point  $(0, 0)$ . Supposons qu'on connaisse un homéomorphisme  $F_2$  tel que  $\rho(F_2) = K_2$ . Considérons alors l'homéomorphisme  $F_1 = T_{-v} \circ F_2 = F_2 \circ T_{-v}$  où  $T_{-v}$  est la translation de vecteur  $-v$ . On a alors  $\rho(F_1) = K_2 - v = K_1$ . Considérons maintenant l'homéomorphisme  $F_0 = L^{-1} \circ F \circ L$  où  $L$  est l'homothétie de rapport  $p$ . On vérifie facilement que  $\rho(F_0) = L^{-1}(K_1) = K_0$ .

Par conséquent, pour prouver le théorème, il nous suffit donc de considérer le cas où les sommets du polygone  $K$  sont à coordonnées entières, l'un de ces sommets étant le

vecteur  $(0, 0)$ . On se place désormais dans ce cas. Il existe donc des vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  à coordonnées entières tels que  $K = \text{Conv}\{(0, 0), v_1, v_2, \dots, v_n\}$ .

Pour obtenir un homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$ , il suffit alors de généraliser la construction décrite ci-dessus dans le cas particulier où  $K = \text{Conv}\{(0, 0), (p_1, 0), (0, p_2)\}$ . Plus précisément :

- Dans le cas particulier, on avait une région  $\tilde{V}$  qui constitué d’une bande verticale de largeur  $\varepsilon$ , une bande horizontale de largeur  $\varepsilon$ , et tous les translatés par  $\mathbb{Z}^2$  de ces bandes ; dans le cas général, il faut considérer une région  $\tilde{V}$  qui constitué de  $n$  bandes de largeur  $\varepsilon$  ayant les pentes des vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  et de tous les translatés par  $\mathbb{Z}^2$  de ces bandes. Quitte à traduire un peu les bandes, on peut supposer qu’il n’y a que des “intersections doubles” (i.e. aucun point de  $\mathbb{R}^2$  n’appartient à trois bandes).
- Comme dans le cas particulier, on considère une collection  $\mathcal{M}$  de rectangles sont disposés le long de bandes (et le nombre de rectangles dans la bande ayant la même pente que le vecteur  $v_i$  est inversement proportionnel à la norme de  $v_i$ ).
- On construit alors un homéomorphisme  $F$  pour lequel  $\mathcal{M}$  est une partition de Markov et satisfait des propriétés similaires à celles requises dans le cas particulier ci-dessus. En particulier, soit  $\tilde{B}$  l’une des bandes de largeur  $\varepsilon$  composant  $\tilde{V}$ , et soit  $\tilde{R}$  est un rectangle de  $\mathcal{M}$  situé dans  $\tilde{B}$ . Alors l’image par  $F$  de  $\tilde{R}$  rencontre le rectangle  $\tilde{R}$  lui-même ainsi que le “successeur de  $\tilde{R}$ ” dans la bande  $\tilde{B}$ . L’image de  $\tilde{R}$  ne rencontre aucun autre rectangle sauf dans le cas où  $\tilde{B}$  croise une autre bande  $\tilde{B}'$  entre  $\tilde{R}$  et son “successeur”, auquel cas l’image de  $\tilde{R}$  rencontre “le premier rectangle de  $\tilde{B}'$  situé au-delà de ce croisement”.

Les mêmes arguments que dans le cas particuliers permettent alors de montrer qu’il existe un entier  $p$  tel que  $\rho(F^p) = K$ . □

**Remarque 2.11.** Les exemples d’homéomorphismes ayant comme ensemble de rotation un polygone à sommets rationnels arbitraire sont tous des difféomorphismes “hyperboliques” (plus précisément, “de type axiome A”, c’est-à-dire que leur ensemble non-errant est hyperbolique et égal à l’adhérence de leurs orbites périodiques ; voir, par exemple, [35]). Sauf erreur de ma part, on peut montrer réciproquement que l’ensemble de rotation de tout difféomorphisme axiome A est un polygone à sommets rationnels.

### 2.3.2 Autres exemples d’ensembles de rotations d’intérieurs non-vides

La remarque 2.11 et le rôle important que jouent les difféomorphismes hyperboliques en Systèmes Dynamiques ne doivent pas laisser croire que les ensembles de rotations les plus compliqués qu’on peut trouver sont des polygones finis.

C’est Kwapisz qui le premier a construit, il y a une dizaine d’années, le exemple d’homéomorphisme du tore dont l’ensemble de rotation n’est pas un point, un segment, ou un polygone à sommets rationnels.

**Théorème 2.12** (Kwapisz, [25]). *Il existe un homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  tel que le convexe  $\rho(F)$  possède une infinité points extrémaux.*

L’ensemble de rotation  $\rho(F)$  de l’homéomorphisme  $F$  construit par Kwapisz pour montrer le théorème 2.12 est représenté sur la figure 10. En particulier,  $\rho(F)$  possède une infinité dénombrable de points extrémaux, tous à coordonnées rationnelles. La construction



peut être vue comme une généralisation de celle utilisée pour démontrer le théorème 2.8 où on utilise cette fois-ci une partition de Markov qui n'est pas localement finie (il y a une infinité des rectangles dans tout domaine fondamental de l'action de  $\mathbb{Z}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ ) (notons cependant que Kwapisz ne présente pas la construction en termes de partitions de Markov). Nous ne détaillerons pas cette construction ici.

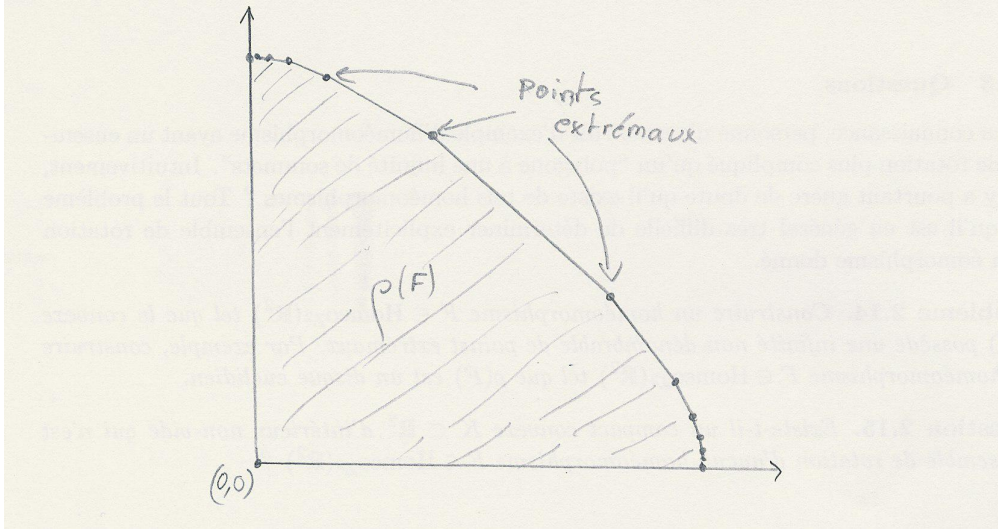


Figure 10: L'ensemble  $\text{Rot}(F)$  dans l'exemple de Kwapisz.

Les constructions imaginées par Kwapisz pour montrer les théorème 2.8 et 2.12 conduisent systématiquement à des ensembles de rotations d'intérieurs dont tous les points extrémaux sont à coordonnées rationnelles (voir remarque 2.11). Ça n'est cependant pas une propriété générale des ensembles de rotations d'intérieurs non-vides, comme le montre la proposition suivante:

**Proposition 2.13** (Béguin, Crovisier, Le Roux). *Pour tous couple d'irrationnels  $(\alpha, \beta)$ , il existe un homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\rho(F)$  est d'intérieur non-vide et tel que  $(\alpha, \beta)$  est un point extrémal de  $\rho(F)$ .*

*Preuve.* On considère deux contre-exemples de Denjoy  $g, h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  de nombres de rotations respectifs  $\alpha$  et  $\beta$ . On fait le produit direct de ces deux homéomorphismes ; on obtient ainsi un homéomorphisme  $f_0 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ . Cet homéomorphisme  $f_0$  possède un relevé  $F_0 \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\rho(F) = \{(\alpha, \beta)\}$ . Le point important est que le complémentaire dans  $\mathbb{T}^2$  de l'ensemble non-errant de  $f_0$  est connexe (un point  $(x, y) \in \mathbb{T}^2$  est errant pour  $f_0$  dès  $x$  est errant pour  $g$  ou  $y$  est errant pour  $h$ ). On peut trouver un disque  $D_1 \subset \mathbb{T}^2$  disjoint de l'ensemble non-errant de  $f_0$ , tel que  $D$  contient deux points  $z_1$  et  $f_0^{k_1}(z_1)$  d'une même orbite de  $f_0$  (quitte à changer  $k$ , on peut supposer que les points  $f_0(z_1), f_0^2(z_1), \dots, f_0^{k_1-1}(z_1)$  ne sont pas dans  $D$ ). En composant  $f_0$  par un homéomorphisme à support dans  $D_1$  qui envoie  $f_0^{k_1}(z_1)$  sur  $z_1$ , on obtient un difféomorphisme  $f_1$  pour lequel  $z_1$  est un point périodique de période  $k_1$ . Ce point périodique donne lieu à un vecteur à coordonnées rationnelles  $v_1$  dans l'ensemble de rotation de  $f_1$ . Et puisque  $f_1$  coïncide avec  $f$  sur l'ensemble non-errant de  $f$ , le vecteur  $(\alpha, \beta)$  appartient à l'ensemble de rotation de  $f_1$ . On recommence alors la même opération avec un disque  $D_2$  disjoint de  $D_1$ , et on crée ainsi une nouveau point périodique  $z_2$  pour un homéomorphisme  $f_2$  (sans toucher à l'ensemble non-errant de  $f$ , ni à l'orbite de  $z_1$ ). L'homéomorphisme  $f_2$  possède alors un relevé  $F_2$  tel

que l'ensemble  $\rho(F_2)$  contient le vecteur  $(\alpha, \beta)$  et deux vecteurs à coordonnées rationnels  $v_1 = \rho(F_2, z_1) = \rho(F_1, z_1)$  et  $v_2 = \rho(F_2, z_2)$ . Il n'est pas très difficile de voir qu'on peut choisir les points  $z_1$  et  $z_2$  tels que  $(\alpha, \beta)$ ,  $v_1$  et  $v_2$  ne soient pas alignés dans  $\mathbb{R}^2$ . L'ensemble  $\rho(F_2)$  est donc d'intérieur non-vide. Enfin, on remarque qu'on peut passer de  $f$  à  $f_1$  et de  $f_1$  à  $f_2$  en composant par des applications qui poussent tous les points vers la droite et/ou vers le haut. Ceci implique que l'ensemble  $\rho(F_2)$  sont inclus dans le quart de plan en haut à droite de  $(\alpha, \beta)$ . Par conséquent, le point  $(\alpha, \beta)$  est un point extrémal des convexes  $\rho(F_2)$ .  $\square$

### 2.3.3 Questions

À ma connaissance, personne n'a construit d'exemple d'homéomorphisme ayant un ensemble de rotation plus compliqué qu'un "polygone à une infinité de sommets". Intuitivement, il n'y a pourtant guère de doute qu'il existe de tels homéomorphismes ? Tout le problème est qu'il est en général très difficile de déterminer explicitement l'ensemble de rotation d'un éomorphisme donné.

**Problème 2.14.** *Construire un homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  tel que le convexe  $\rho(F)$  possède une infinité non-dénombrable de points extrémaux. Par exemple, construire un homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\rho(F)$  est un disque euclidien.*

**Question 2.15.** *Existe-t-il un compact convexe  $K \subset \mathbb{R}^2$  d'intérieur non-vide qui n'est l'ensemble de rotation d'aucun homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  ?*

### 3 Homéomorphismes ayant un “gros” ensemble de rotation

Dans cette partie, on s'intéresse au problème suivant. Considérons un homéomorphisme  $f$  de  $\mathbb{T}^2$ , et supposons que  $f$  a un “gros” ensemble de rotation. Typiquement, supposons que l'ensemble de rotation de  $f$  est d'intérieur non-vide. *Que peut-on en déduire sur la dynamique de  $f$  ?*

#### 3.1 Ensemble de rotation, disques et courbes fermées périodiques

Cette première sous-partie rassemble des résultats faciles mais utiles du type suivant: si  $f$  est homéomorphisme de  $\mathbb{T}^2$  isotopé à l'identité, et si  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  est un relevé de  $f$ , alors la présence de courbe fermée périodiques pour  $f$  empêche  $F$  d'avoir un “gros ensemble de rotation”.

**Proposition 3.1.** *Soit  $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$  et  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  un relevé de  $F$ . Supposons qu'il existe un disque topologique fermé  $D \subset \mathbb{T}^2$  périodique pour  $f$ . Alors, il existe un vecteur  $v$  à coordonnées rationnelles tel que, pour tout  $z \in D$ , on a  $\rho(F, z) = \{v\}$ .*

*Preuve.* Puisque  $D$  est simplement connexe, l'ensemble  $\pi^{-1}(D)$  peut s'écrire comme une union disjointe de la forme

$$\bigcup_{(p,p') \in \mathbb{Z}^2} \tilde{D} + (p, p')$$

où  $\tilde{D}$  est un disque topologique et  $\pi : \tilde{D} \rightarrow D$  est injective. En particulier,  $\text{Diam}(\tilde{D}) = \text{Diam}(D)$ . Soit  $q$  tel que  $f^q(D) = D$ . Il existe alors  $(p, p') \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $F^q(\tilde{D}) = \tilde{D} + (p, p')$ . Soit maintenant  $z \in D$  et  $\tilde{z}$  l'unique relevé de  $z$  qui appartient à  $\tilde{D}$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  si on note  $a_n$  et  $b_n$  le quotient et le reste de la division de  $n$  par  $q$ , le point  $F^n(\tilde{z})$  est dans le disque  $F^{b_n}(F^{a_n q}(\tilde{D})) = F^{b_n}(\tilde{D}) + a_n(p, p')$ . Si on note  $M = \sup\{\|\tilde{x} - \tilde{y}\| \mid \tilde{x} \in \tilde{D}, \tilde{y} \in F^b(\tilde{D}), b = 1, \dots, q-1\}$ , alors on voit que, pour tout  $n$ , on a

$$\left\| \frac{1}{n} (F^n(\tilde{z}) - \tilde{z}) - \left( \frac{p}{q}, \frac{p'}{q} \right) \right\| \leq \frac{M}{n}.$$

Par conséquent, on a bien  $\rho(F, z) = \left\{ \left( \frac{p}{q}, \frac{p'}{q} \right) \right\}$  comme annoncé.  $\square$

Voici un cas particulier intéressant de la proposition 3.1:

**Proposition 3.2.** *Soit  $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$  et  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  un relevé de  $F$ . Supposons qu'il existe deux courbes fermées simples  $C, C'$  dans  $\mathbb{T}^2$ , non-homotopes à 0, transverses l'une à l'autre, non-homotopes l'une à l'autre, et toutes deux périodiques pour  $f$ . Alors  $\rho(F)$  est un singleton (à coordonnées rationnelles).*

*Preuve.* Puisque  $C$  et  $C'$  sont transverses, le complémentaire de  $C \cup C'$  dans  $\mathbb{T}^2$  n'a qu'un nombre fini de composantes connexes ; soient  $D_1, \dots, D_n$  les adhérences de ces composantes connexes. Puisque  $C$  et  $C'$  sont non-homotopes à 0, et non-homotopes l'une à l'autre,  $D_1, \dots, D_n$  sont des disques topologiques fermés. Puisque les courbes  $C$  et  $C'$  sont périodiques pour  $f$ , chacun des  $D_i$  est périodique pour  $f$ . La proposition 3.1 implique donc que, pour tout  $i$ , alors il existe un vecteur  $v_i$  à coordonnées rationnelles tel que  $\text{Rot}(F, z) = \{v\}$  pour tout  $z \in D_i$ . En considérant les points sur le bord des disques  $D_i$ , on voit que les vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  sont tous égaux ; on note  $v$  leur valeur commune. Et comme les disques  $D_1, \dots, D_n$  recouvrent  $\mathbb{T}^2$ , on en déduit que  $\rho_{\text{points}}(F) = \{v\}$ , puis que  $\rho(F) = \text{Conv}(\rho_{\text{points}}(F)) = \{v\}$ .  $\square$

Nous voudrions maintenant généraliser la proposition 3.2 en considérant le cas où il n'existe qu'une seule courbe fermée simple non-homotope à 0 et périodique pour  $f$ . Nous allons voir que ceci suffit à montrer que l'ensemble  $\rho(F)$  est un segment.

**Définition 3.3.** Soit  $D$  une droite topologique proprement plongée dans  $\mathbb{R}^2$ , et orientée. La droite  $D$  divise le plan  $\mathbb{R}^2$  en deux demi-plan. L'orientation de  $D$  permet du demi-plan situé à gauche (resp. à droite) de  $D$ . On dit que  $D$  est une *droite de Brouwer* pour  $F$  si  $F^{-1}(D)$  est contenue dans le demi-plan ouvert situé à gauche de  $D$  et si  $F(D)$  est contenue dans le demi-plan ouvert situé à droite de  $D$ . On dit que  $D$  est une *quasi-droite de Brouwer* pour  $F$  si  $F^{-1}(D)$  est contenue dans le demi-plan fermé situé à gauche de  $D$  et si  $F(D)$  est contenue dans le demi-plan fermé situé à droite de  $D$ .

**Proposition 3.4.** Soit  $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$  et  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  un relevé de  $F$ . Soit  $C$  une courbe fermée simple  $C$  dans  $\mathbb{T}^2$  homotope au cercle  $\{0\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , orientée vers le haut. Soit  $D$  un relevé de  $C$  (i.e. une droite topologique telle que  $\pi(D) = C$ ), munie de l'orientation relevée de celle de  $C$ . Si  $D$  est une quasi-droite de Brouwer pour  $F$  (resp. pour  $F^{-1}$ ), alors l'ensemble  $\rho(F)$  est inclus dans le demi-plan  $x \geq 0$  (resp.  $x \leq 0$ ).

*Preuve.* Soit  $z_0$  un point de  $C$  et  $\tilde{z}_0 = (x_0, y_0)$  un relevé de  $C$  appartenant à  $D$ . Puisque  $C$  est homotope à  $\{0\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , les points de la forme  $\tilde{z}_0 + (0, k)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  sont tous sur la droite  $D$ . Soit  $d$  le diamètre de l'arc de  $D$  joignant  $\tilde{z}_0 + (0, k)$  à  $\tilde{z}_0 + (0, k + 1)$  (ce diamètre est évidemment indépendant de  $k$ ). On voit alors que tout point  $\tilde{z} = (x, y)$  tel que  $x < x_0 - d$  est situé strictement à gauche de  $D$ , et tout point  $\tilde{z} = (x, y)$  tel que  $x > x_0 + d$  est situé strictement à droite de  $D$ . On en déduit facilement que, si  $\text{Rot}(F)$  contient des vecteurs situés dans le demi-plan  $x < 0$ , alors il existe un point  $\tilde{z}$  situé à droite de  $D$  tel que  $F^n(\tilde{z})$  est situé à gauche de  $D$ . Ceci implique que le demi-plan fermé situé à droite de  $D$  n'est pas stable par  $F$ , autrement dit, que  $D$  n'est pas une quasi-droite de Brouwer pour  $F$ . On montre de même que si  $\text{Rot}(F)$  contient des vecteurs situés dans le demi-plan  $x > 0$ , alors  $D$  n'est pas une quasi-droite de Brouwer pour  $F^{-1}$ .  $\square$

Plus généralement:

**Proposition 3.5.** Soit  $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$  et  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  un relevé de  $F$ . Soit  $C$  une courbe fermée simple  $C$  dans  $\mathbb{T}^2$  qui fait  $r$  tours horizontalement et  $s$  tours verticalement. On oriente  $C$  vers le haut (ou vers la droite si  $s = 0$ ). Soit  $D$  un relevé de  $C$ . Si  $D$  est une quasi-droite de Brouwer pour  $F$  (resp. pour  $F^{-1}$ ), alors l'ensemble  $\rho(F)$  est inclus dans le demi-plan  $sx - ry \geq 0$  (resp.  $sx - ry \leq 0$ ).

*Preuve.* On se ramène à la proposition précédente en conjuguant  $f$  et  $F$  par un élément de  $SL(2, \mathbb{Z})$  qui envoie  $C$  sur une courbe homotope au cercle  $\{0\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .  $\square$

Voici un corollaire particulièrement intéressant:

**Proposition 3.6.** Soit  $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$  et  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  un relevé de  $F$ . Supposons qu'il existe une courbe fermée simple  $C$  essentielle de type  $(r, s)$  dans  $\mathbb{T}^2$  qui soit périodique de période  $q$  pour  $f$ . Il existe bien sûr alors un vecteur  $(p, p') \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $F^q(D) = D + (p, p')$  pour tout relevé  $D$  de  $C$ . Alors l'ensemble  $\rho(F)$  est inclus dans la droite d'équation  $s(x - p/q) - r(y - p'/q) = 0$ .

En particulier, si  $\rho(F)$  est d'intérieur non-vidé, alors il n'existe aucune courbe fermée simple essentielle dans  $\mathbb{T}^2$  qui soit périodique pour  $f$ .



*Preuve.* Soit  $G = F^q \circ T_{(p,p')}^{-1}$  où  $T_{(p,p')}$  est la translation de vecteur  $(p, p')$ . Alors  $G$  fixe la droite topologique  $D$ . En particulier,  $D$  est une quasi-droite de Brouwer pour  $G$  et  $G^{-1}$ . D'après la proposition 3.5, l'ensemble  $\text{Rot}(G)$  est donc contenu dans la droite  $sx - ry = 0$ . Et comme  $\text{Rot}(G) = q\text{Rot}(F) - (p, p')$ , on en déduit le lemme annoncé.  $\square$

La recherche de réciproques partielles aux résultats ci-dessus est un problème fort intéressant. Par exemple, il est intéressant de se demander, lorsque l'ensemble  $\rho(F)$  est d'intérieur vide, s'il existe une courbe fermée simple essentielle "presque périodique" pour  $f$ . Ce problème est abordé dans le cours de S. Crovisier ([7]).

### 3.2 Ensemble de rotation et vecteurs de rotations

Soit  $f$  un homéomorphisme du tore isotope à l'identité, et  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  un relevé de  $f$ . On dit qu'un vecteur  $v \in \mathbb{R}^2$  est un *vecteur de rotation* de  $F$  s'il existe un point  $p \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\rho(F, p) = \{v\}$ , c'est-à-dire s'il existe un point  $p \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\frac{F^n(\tilde{z}) - \tilde{z}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v.$$

L'ensemble de rotation  $\rho(F)$  est *a priori* strictement plus gros que l'ensemble des vecteurs de rotations de  $f$ : pour qu'un point soit dans  $\rho(F)$ , il suffit qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et une suite de points  $(\tilde{z}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}^2$  tels que

$$\frac{F^{n_k}(\tilde{z}_k) - \tilde{z}_k}{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} v.$$

Dans cette partie, on s'intéresse à la question suivante:

*À quel condition un vecteur  $v \in \rho(F)$  est-il un vecteur de rotation de  $F$  ? Autrement dit, étant donné  $v \in \rho(F)$ , à quelle condition existe-t-il un point  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\rho(F, \tilde{z}) = \{v\}$  ?*

Rappelons tout d'abord qu'en utilisant la définition de l'ensemble de rotation en termes de mesures invariantes et le théorème ergodique de Birkhoff, Misirurevicz et Zieman ont apporté un premier élément de réponse à cette question :

**Proposition 3.7** (Misiurevicz, Zieman, [33]). *Quel que soit l'homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$ , si  $v$  est un point extrémal de  $\rho(F)$ , alors on peut trouver un point  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\rho(F, \tilde{z}) = \{v\}$ .*

*Preuve.* Ce résultat découle de l'égalité  $\rho(F) = \text{Conv}(\rho_{\text{erg}}(F))$  et de la remarque 1.23.  $\square$

En utilisant des outils beaucoup plus sophistiqués (résultat d'existence d'orbites périodiques de Franks, théorie de Nielsen-Thurston, existence de partitions de Markov pour les homéomorphismes pseudo-Anosov, *global shadowing lemma* de Handel) J. Llibre et R. Mac Kay ont alors réussi à traiter le cas des vecteurs situés à l'intérieur de l'ensemble de rotation :

**Théorème 3.8** (Llibre, MacKay, [32]). *Si  $F$  est un élément de  $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  tel que l'ensemble  $\rho(F)$  est d'intérieur non-vide, alors, pour tout continuum<sup>4</sup>  $C$  contenu dans l'intérieur de  $\rho(F)$ , il existe un point  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\rho(F, \tilde{z}) = C$ . En particulier, pour tout vecteur  $v$  dans l'intérieur de  $\rho(F)$ , il existe un vecteur  $x$  tel que  $\rho(F, \tilde{z}) = \{v\}$ .*

<sup>4</sup>un continuum est un compact connexe

Nous ne montrerons pas ce théorème.

L'exemple 1.33 et l'exemple 3.9 ci-dessous montrent qu'on ne peut guère espérer d'autres résultats positifs que la proposition 3.7 et le théorème 3.8. En effet, l'exemple 1.33 montre un homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\rho(F)$  est un segment non-trivial, et tel que, si  $v$  n'est pas une des deux extrémités de ce segment, alors il n'existe aucun point  $p \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\rho(F, p) = \{v\}$ . L'exemple 3.9 montre un homéomorphisme  $F$  tel que  $\rho(F)$  est d'intérieur non-vide et tel que, si  $v$  est sur le bord de  $\rho(F)$  mais n'est pas un point extrémal de  $\rho(F)$ , alors il n'existe aucun point  $p \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\rho(F, p) = \{v\}$ . Notons qu'ajouter des hypothèses de régularité de l'homéomorphisme ou de préservation d'une "bonne" mesure ne permet pas *a priori* d'obtenir d'autres résultats du type de la proposition 3.7 ou du théorème 3.8. en effet, l'homéomorphisme  $F$  considéré dans l'exemple 3.9 peut être un difféomorphisme analytique (si on choisit les applications  $\Phi, \Psi$  analytiques) qui préserve le relevé de la mesure de Haar de  $\mathbb{T}^2$ .

**Exemple 3.9.** Considérons maintenant l'homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  défini par

$$F(x, y) = \left( x + \frac{1 + \cos(2\pi y)}{2}, y + \frac{1 + \sin(2\pi x)}{2} \right).$$

Notons que cet homéomorphisme est du type de ceux considérés dans l'exemple 1.34. Nous avons donc déjà montré dans l'exemple 1.34 que l'ensemble de rotation de  $F$  est le carré  $[0, 1]^2$ . Par ailleurs, nous affirmons que, s'il existe un point  $\tilde{z}$  tel que  $\rho(F, \tilde{z}) = \{v\}$  alors soit  $v$  est à l'intérieur du carré  $[0, 1]^2$ , soit  $v$  est un des quatre coins de  $[0, 1]^2$ .

Considérons en effet un point  $p$  tel que  $\rho(F, \tilde{z}) = \{v\}$  où  $v$  n'est pas un des quatre coins du carré  $[0, 1]^2$ . Autrement dit,  $v = (v_x, v_y)$  avec  $v_x \in ]0, 1[$  ou  $v_y \in ]0, 1[$ . Supposons par exemple que  $v_x \in ]0, 1[$ . Alors, il existe une proportion non-nulle d'entiers  $n$  tels que la première coordonnée du vecteur  $F(F^n(\tilde{z})) - F^n(\tilde{z})$  est loin de 0 et de 1 (nous laissons au lecteur le soin de préciser des quantificateurs). Ceci entraîne l'existence d'une proportion non-nulle d'entiers  $n$  tels que la première coordonnée du point  $F^n(\tilde{z})$  est loin d'un entier ou loin d'un demi-entier. En examinant la formule qui définit  $F$ , on voit que ceci implique l'existence d'une proportion non-nulle d'entiers  $n$  tels que la seconde coordonnée du vecteur  $F(F^n(\tilde{z})) - F^n(\tilde{z})$  est loin de 0 et 1. Par suite,  $v_y \in ]0, 1[$ . Le vecteur  $v$  est donc dans l'intérieur du carré  $\rho(F) = [0, 1]^2$ .

### 3.3 Ensemble de rotation et orbites périodiques

Soit  $f$  un homéomorphisme du tore isotope à l'identité, et  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  est un relevé de  $f$ . Si  $z$  est un point périodique de période  $q$  pour  $f$ , et si  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$  est un relevé de  $z$ , alors les points  $F^q(\tilde{z})$  et  $\tilde{z}$  diffèrent d'un vecteur à coordonnées entières  $(p, p')$ . Il s'en suit que  $\rho(F, z) = \{v\}$  où  $v = (p/q, p'/q)$ ; en particulier,  $\rho(F, z)$  est un vecteur à coordonnées rationnelles. Réciproquement, il est naturel de s'intéresser à la question suivante:

*Soit  $v$  un élément de  $\rho(F)$  à coordonnées rationnelles. Existe-t-il un point  $z \in \mathbb{T}^2$  périodique pour  $f$ , et tel que, pour tout relevé  $z \in \mathbb{R}^2$  de  $z$ , on a  $\rho(F, z) = \{v\}$  ? Peut-on choisir  $z$  primitif, c'est-à-dire de période  $q$  si  $v = (p/q, p'/q)$  avec  $p, p', q$  entiers sans diviseur commun non-trivial ?*

Remarquons que si  $z$  est périodique pour  $f$  et si  $\rho(F, z) = \{v\}$  où  $v = (p/q, p'/q)$ , alors la période de  $z$  est de la forme  $k.q$ , et  $F^{k.q}(\tilde{z}) = \tilde{z} + k.(p, p')$  pour tout relevé  $\tilde{z}$  de  $z$ . Réciproquement, si  $\tilde{z}$  est un point de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $F^{k.q}(\tilde{z}) = \tilde{z} + k.(p, p')$ , alors  $z = \pi(\tilde{z})$

est périodique de période  $k.q$  pour  $f$ , et  $\rho(F, z) = \{v\}$  où  $v = (p/q, p'/q)$ . La question ci-dessus peut donc se reformuler comme suit:

*Soit  $v = (p/q, p'/q)$  un élément de  $\rho(F)$  à coordonnées rationnelles (avec  $p, p', q$  entiers et sans diviseur commun non-trivial). Existe-t-il un point  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$  et un entier  $k$  tel que  $F^{kq}(\tilde{z}) = \tilde{z} + k.(p, p')$  ? Peut-on prendre  $k = 1$  ?*

Les différents éléments de réponses à cette question connus à ce jour sont presque tous dus à J. Franks. Le cas le plus simple (et peut-être aussi le plus intéressant) est celui des vecteurs situés à l'intérieur de l'ensemble de rotation:

**Théorème 3.10** (Franks, [12]). *Soit  $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$  et  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{T}^2)$ . Pour tout vecteur  $v = (p/q, p'/q)$  dans l'intérieur de l'ensemble  $\rho(F)$  avec  $p, p', q$  entiers sans diviseur commun non-trivial, il existe un point  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$  tel que  $F^q(\tilde{z}) = z + (p, p')$ .*

Autrement dit, tout vecteur à coordonnées rationnelles dans l'intérieur de  $\rho(F)$  est réalisé comme vecteur de rotation d'une orbite périodique primitive.

La preuve du théorème 3.10 repose sur un lemme célèbre, dû à Franks, qui permet de trouver des points fixes pour les homéomorphismes du plan. Ce lemme est un des outils de base de l'étude des homéomorphismes du plan, et plus généralement des surfaces. Avant d'énoncer ce lemme, il nous faut introduire quelques définitions:

**Définition 3.11.** Soit  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un homéomorphisme préservant l'orientation. Un disque topologique fermé  $D$  est dit *libre* s'il est disjoint de son image. Une *chaîne de disques libres* pour  $H$  est une suite finie de disques libres  $\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_n$  tels qu'il existe des entiers  $p_1, \dots, p_n$  tels que, pour  $i = 1, \dots, p_{n-1}$ , on a  $H^{p_i}(\tilde{D}_i) \cap \tilde{D}_{i+1} \neq \emptyset$ . Cette chaîne est dite *fermée* si  $\tilde{D}_n = \tilde{D}_1$ .

Le lemme de Franks s'énonce alors comme suit:

**Lemme 3.12** (Franks). *Soit  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un homéomorphisme préservant l'orientation. S'il existe une chaîne fermée de disques libres pour  $H$ , alors  $H$  fixe un point de  $\mathbb{R}^2$ .*

On peut voir ce lemme comme une généralisation du qui affirme que si un homéomorphisme du plan  $H$  possède une courbe fermée d'indice 1, alors  $H$  possède un point fixe (la preuve du lemme consiste d'ailleurs à construire une courbe de Jordan d'indice 1 à partir d'une chaîne de disques libres fermée. Pour une preuve de ce lemme, nous renvoyons par exemple au cours de M. Bonino ([2]).

En fait, on utilisera le lemme de Franks avec des chaînes de disques libres particulières, où les disques seront des disques euclidiens. On aura pour cela besoin de la notion d' $\varepsilon$ -chaîne :

**Définition 3.13.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique, et  $h : X \rightarrow X$  un homéomorphisme. Étant donné un réel  $\varepsilon > 0$ , et deux points  $z, z' \in X$ , une  $\varepsilon$ -chaîne pour  $h$  joignant  $z$  à  $z'$  est une suite de points  $z = z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = z'$  tels que, pour  $i = 1, \dots, n-1$ ,

$$d(h(z_i), z_{i+1}) \leq \varepsilon.$$

Cette  $\varepsilon$ -chaîne est dite *fermée* si  $z' = z$ .

En corollaire immédiat du lemme de Franks, on obtient:

**Corollaire 3.14.** *Soit  $H \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$ . Si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une  $\varepsilon$ -chaîne fermée pour  $H$ , alors  $H$  a un point fixe de  $\mathbb{R}^2$ .*

*Preuve du corollaire.* On montre la contraposée. Supposons que  $H$  ne fixe aucun point de  $\mathbb{R}^2$ . Puisque  $H$  commute à l'action de  $\mathbb{Z}^2$ , et n'a pas de point fixe, la quantité

$$\varepsilon_0 = \inf\{\|H(\tilde{z}) - \tilde{z}\|, \tilde{z} \in \mathbb{R}^2\}$$

est strictement positive. Alors toute boule de rayon  $\varepsilon_0/2$  est un disque libre pour  $H$ . Supposons alors qu'il existe une  $\varepsilon_0/2$ -chaîne fermée  $z_1, z_2, \dots, z_n = z_1$  pour  $H$ . Si on note  $D_i$  est la boule de centre  $z_i$  et de rayon  $\varepsilon_0/2$ , alors  $D_1, D_2, \dots, D_n = D_1$  est une chaîne fermée de disque libre pour  $H$ . Ceci contredit le lemme de Franks.  $\square$

La preuve du théorème se découpe en naturellement en deux étapes : on montre d'abord le théorème dans le cas où  $f$  préserve une mesure de probabilité qui charge tout ouvert, puis on explique comment se ramener à ce cas en général. Nous ne détaillerons ici que la première étape qui conduit déjà à un résultat intéressant. La raison pour laquelle la preuve est plus simple dans le cas où  $f$  préserve une "bonne" mesure de probabilité est le lemme suivant :

**Lemme 3.15.** *Supposons que  $f$  préserve une mesure de probabilité qui charge tout ouvert de  $\mathbb{T}^2$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $K_\varepsilon > 0$  tel que, pour tous  $z, z' \in \mathbb{R}^2$ , et tout relevé  $\tilde{z}$  de  $z$ , il existe une  $\varepsilon$ -chaîne pour  $F$  joignant  $\tilde{z}$  à un relevé  $\tilde{z}'$  de  $z'$ , tel que*

$$\|\tilde{z}' - \tilde{z}\| < K_\varepsilon.$$

*Proof.* Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Puisque  $f$  préserve une mesure de probabilité qui charge tout ouvert de  $\mathbb{T}^2$ , deux points quelconques de  $\mathbb{T}^2$  peuvent être joints par une  $\varepsilon$ -chaîne pour  $f$ . Par compacité de  $\mathbb{T}^2$ , on en déduit qu'il existe  $N_\varepsilon$  tel que deux points quelconques de  $\mathbb{T}^2$  peuvent être joints par une  $\varepsilon$ -chaîne de longueur inférieure à  $N_\varepsilon$ . Toute  $\varepsilon$ -chaîne  $C$  pour  $f$  joignant un point  $z$  à un point  $z'$  se relève une  $\varepsilon$ -chaîne  $\tilde{C}$  pour  $F$  joignant un relevé  $\tilde{z}$  de  $z$  à un relevé  $\tilde{z}'$  de  $z'$ . Comme  $F$  commute à l'action de  $\mathbb{Z}^2$ , tout translaté par un vecteur à coordonnées entières d'une  $\varepsilon$ -chaîne pour  $F$  est encore une  $\varepsilon$ -chaîne. Ceci permet de choisir arbitrairement le relevé  $\tilde{z}$  de  $z$  d'où on fait partir la chaîne  $\tilde{C}$ . Par conséquent, on a montré que pour tous  $z, z' \in \mathbb{R}^2$ , et tout relevé  $\tilde{z}$  de  $z$ , il existe une  $\varepsilon$ -chaîne de longueur inférieure à  $N_\varepsilon$  pour  $F$  joignant  $\tilde{z}$  à un relevé  $\tilde{z}'$ . Par ailleurs, s'il une  $\varepsilon$ -chaîne de longueur inférieure à  $N_\varepsilon$  joignant  $\tilde{z}$  à  $\tilde{z}'$ , alors on a clairement

$$\|\tilde{z}' - \tilde{z}\| \leq K_\varepsilon \text{ où } K_\varepsilon = N_\varepsilon \cdot (M + \varepsilon) \text{ et } M = \sup\{\|F(\tilde{y}) - \tilde{y}\|, \tilde{y} \in \mathbb{R}^2\}.$$

Le lemme en découle.  $\square$

On peut maintenant commencer la preuve du théorème 3.10 :

*Preuve du théorème 3.10 dans le cas où  $f$  préserve une mesure qui charge tout ouvert.* On note  $\Phi = T^{-1} \circ F^q$  où  $T$  est la translation de vecteur  $(p, p')$ . On remarque que montrer l'existence d'un point  $\tilde{z}$  tel que  $F^q(\tilde{z}) = \tilde{z} + (p, p')$  revient alors à montrer l'existence d'un point fixe pour l'homéomorphisme  $\Phi$ . Et d'après le corollaire, ceci revient à trouver une  $\varepsilon$ -chaîne fermée pour  $\Phi$  pour tout  $\varepsilon > 0$ . On fixe donc  $\varepsilon > 0$ .

Puisque le vecteur  $(p/q, p'/q)$  est dans l'intérieur de l'ensemble  $\rho(F)$ , et puisque  $\rho(\Phi) = q\rho(F) - (p, p')$  (propositions 1.15 et 1.16), le vecteur  $(0, 0)$  est dans l'intérieur de  $\rho(\Phi)$ . On

peut donc trouver trois vecteurs  $v_1, v_2, v_3 \in \text{Int}(\rho(\Phi))$  tel que  $0 \in \text{Int}(\text{Conv}(v_1, v_2, v_3))$ . Puis on peut trouver  $\eta > 0$  tel que, pour tous vecteurs  $v'_1, v'_2, v'_3$  tels que  $\|v'_i - v_i\| \leq \eta$ , on a toujours  $0 \in \text{Conv}(v'_1, v'_2, v'_3)$ . On fixe maintenant  $N$  tel que

$$\frac{K_\varepsilon}{N} \leq \frac{\eta}{3}.$$

On fixe un point  $z \in \mathbb{T}^2$  et un relevé  $\tilde{z}_0 \in \mathbb{R}^2$  de  $z$ . Pour  $i = 1, 2, 3$ , puisque  $v_i \in \rho(\Phi)$ , on peut trouver un entier  $n_i \geq N$  et un point  $y_i \in \mathbb{T}^2$  tel que, pour tout relevé  $\tilde{y}_i$  de  $y_i$ , on a

$$\left\| \frac{1}{n_i} (\Phi^{n_i}(\tilde{y}_i) - \tilde{y}_i) - v_i \right\| \leq \frac{\eta}{3}.$$

D'après le lemme 3.15, on peut trouver une  $\varepsilon$ -chaîne joignant  $\tilde{z}_0$  à un relevé  $\tilde{y}_i$  de  $y_i$  telle que

$$\|\tilde{z} - \tilde{y}_i\| \leq K_\varepsilon,$$

et on peut trouver une  $\varepsilon$ -chaîne pour  $F$  joignant  $F^{n_i}(\tilde{y}_i)$  à un relevé  $\tilde{z}_i$  de  $z$  telle que

$$\|\Phi^{n_i}(\tilde{y}_i) - \tilde{z}_i\| \leq K_\varepsilon.$$

En concaténant, une  $\varepsilon$ -chaîne joignant  $\tilde{z}_i$  à  $\tilde{y}_i$ , le segment d'orbite joignant  $\tilde{y}_i$  à  $\Phi^{n_i}(\tilde{y}_i)$ , et une  $\varepsilon$ -chaîne joignant  $\tilde{z}_i$  à  $\Phi^{n_i}(\tilde{y}_i)$  à  $\tilde{z}_i$ , on obtient une  $\varepsilon$ -chaîne joignant  $\tilde{z}_0$  à  $\tilde{z}_i$ . Par ailleurs, les trois inégalités ci-dessus implique que, si on note  $w_i = \tilde{z}_i - \tilde{z}_0$ , alors

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{n_i} w_i - v_i \right\| &\leq \left\| \frac{1}{n_i} (\Phi^{n_i}(\tilde{y}_i) - \tilde{y}_i) - v_i \right\| + \frac{1}{n_i} \|\tilde{z} - \tilde{y}_i\| + \frac{1}{n_i} \|\Phi^{n_i}(\tilde{y}_i) - \tilde{z}_i\| \\ &\leq \frac{\eta}{3} + \frac{K_\varepsilon}{n_i} + \frac{K_\varepsilon}{n_i} \\ &\leq \eta \end{aligned}$$

Par définition de la constante  $\eta$ , l'inégalité ci-dessus implique que

$$(0, 0) \in \text{Conv} \left( \frac{1}{n_1} w_1, \frac{1}{n_2} w_2, \frac{1}{n_3} w_3 \right).$$

Par conséquent, on a aussi  $(0, 0) \in \text{Conv}(w_1, w_2, w_3)$ . Comme les vecteurs  $w_1, w_2, w_3$  sont à coordonnées entières, ceci implique qu'il existe des entiers positifs  $l_1, l_2, l_3$  tel que

$$l_1 w_1 + l_2 w_2 + l_3 w_3 = 0.$$

On construit alors une  $\varepsilon$ -chaîne fermée comme suit:

- On a construit une  $\varepsilon$ -chaîne joignant  $\tilde{z}_0$  à  $\tilde{z}_1 = \tilde{z}_0 + w_1$ . Puisque  $F$  commute à l'action de  $\mathbb{Z}^2$ , tout translaté par un vecteur à coordonnées entières d'une  $\varepsilon$ -chaîne est encore une  $\varepsilon$ -chaîne. Il existe donc une  $\varepsilon$ -chaîne joignant  $\tilde{z}_0 + w_1$  à  $\tilde{z}_0 + 2w_1$ , une  $\varepsilon$ -chaîne joignant  $\tilde{z}_0 + 2w_1$  à  $\tilde{z}_0 + 3w_1$ , etc. Par concaténation, on construit ainsi une  $\varepsilon$ -chaîne joignant  $\tilde{z}_0$  à  $\tilde{z}_0 + l_1 w_1$ .
- On sait qu'il existe une  $\varepsilon$ -chaîne joignant  $\tilde{z}_0$  à  $\tilde{z}_2 = \tilde{z}_0 + w_2$ . Par le même procédé que ci-dessus, on en déduit une  $\varepsilon$ -chaîne joignant  $\tilde{z}_0 + l_1 w_1$  à  $\tilde{z}_0 + l_1 w_1 + l_2 w_2$ .
- De même, on construit une  $\varepsilon$ -chaîne joignant  $\tilde{z}_0 + l_1 w_1 + l_2 w_2$  à  $\tilde{z}_0 + l_1 w_1 + l_2 w_2 + l_3 w_3$ .

- Par concaténation, on obtient une  $\varepsilon$ -chaîne joignant  $\tilde{z}_0$  à  $\tilde{z}_0 + l_1w_1 + l_2w_2 + l_3w_3$ . On se souvient alors que  $l_1w_1 + l_2w_2 + l_3w_3 = 0$ ; Par conséquent, on a montré l'existence d'une  $\varepsilon$ -chaîne fermée joignant  $\tilde{z}_0$  à lui-même.

Le corollaire 3.14 implique alors que  $\Phi$  possède un point fixe  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$ . Par définition de  $\Phi$ , ceci implique que  $F^q(\tilde{z}) = \tilde{z} + (p, p')$ .  $\square$

Il est intéressant de noter que la preuve ci-dessus montre l'existence d'orbites périodiques de vecteur de rotation fixé non seulement pour l'homéomorphisme  $F$  considéré, mais aussi pour tout homéomorphisme  $G$  proche de  $F$ :

**Addendum 3.16.** *Soit  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  et  $v = (p/q, p'/q)$  un vecteur dans l'intérieur de l'ensemble  $\rho(F)$  avec  $p, p' \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Alors, pour tout  $G \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  suffisamment proche de  $F$ , il existe un point  $z \in \mathbb{R}^2$  tel que  $F^q(z) = z + (p, p')$ .*

**Remarque 3.17.** Le point  $z$  dépend bien sûr de  $G$ . D'autre part, il faut bien faire attention à ne pas inverser les quantificateurs: en général, il n'est pas vrai que pour tout  $G$  suffisamment proche de  $F$ , et pour tout vecteur  $v = (p/q, p'/q)$  dans l'intérieur de l'ensemble  $\rho(F)$  avec  $p, p' \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , il existe un point  $z \in \mathbb{R}^2$  tel que  $F^q(z) = z + (p, p')$ .

*Preuve de l'addendum 3.16.* Soit  $v = (p/q, p'/q)$  un vecteur dans l'intérieur de  $\rho(F)$  avec  $p, p' \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , et soit  $\Phi = T^{-1} \circ F^q$  où  $T$  est la translation de vecteur  $(p, p')$ . Dans la preuve du théorème 3.10, on a construit, pour tout  $\varepsilon > 0$ , une  $\varepsilon$ -chaîne fermée pour  $\Phi$ . En particulier, pour  $\varepsilon$  assez petit, on obtient une chaîne de disques libres pour  $\Phi$ . On remarque alors que, pour tout  $G$  suffisamment proche de  $F$ , cette chaîne est encore une chaîne fermée de disques libres pour  $\Phi_G := T_{(-p, -p')} \circ G^q$ . Par conséquent,  $\Phi_G$  fixe un point  $z$  de  $\mathbb{R}^2$ . Autrement dit, il existe un point  $z \in \mathbb{R}^2$  tel que  $G^q(z) = z + (p, p')$ .  $\square$

En mélangeant quelques arguments de théorie ergodique aux arguments de la preuve du théorème 3.10, Franks a obtenu le théorème suivant :

**Théorème 3.18** (Franks, [11]). *Soit  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$ . On suppose que l'ensemble  $\rho(F)$  possède un point extrémal à coordonnées rationnelles  $v = (p/q, p'/q')$ . Alors il existe  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$  tel que  $F^q(\tilde{z}) = \tilde{z} + (p, p')$ .*

Enfin, on peut montrer par le même genre d'arguments :

**Théorème 3.19.** *Soit  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$ , et  $v$  un point à coordonnées rationnelles dans le bord de  $\rho(F)$  qui n'est pas un point extrémal. Si l'unique droite d'appui du convexe  $\rho(F)$  au point  $v$  est de pente irrationnelle, alors il existe  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$  tel que  $F^q(\tilde{z}) = \tilde{z} + (p, p')$ .*

**Remarque 3.20.** Chacun des théorèmes 3.10, 3.18 et 3.19 peut aussi être vu comme un du théorème de Brouwer feuilleté équivariant de P. La Calvez (voir [31]).

En résumé les théorèmes 3.10, 3.18 et 3.19 montrent qu'un vecteur  $v \in \rho(F)$  à coordonnées rationnelles est toujours réalisé comme vecteur de rotation d'une orbite périodique, sauf éventuellement dans le cas où  $v$  est sur le bord de  $\rho(F)$ , n'est pas un point extrémal, et où l'unique droite d'appui de  $\rho(F)$  en  $v$  est à pente rationnelle. L'exemple 3.9 montre qu'on ne peut guère espérer mieux: il existe un homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\rho(F) = [0, 1]^2$  et tel que les seuls vecteurs situés sur le bord  $\rho(F)$  qui sont réalisés comme vecteurs de rotations d'orbites périodiques sont les quatre points extrémaux de  $\rho(F)$ .

### 3.4 Ensemble de rotation et entropie

Dire qu'un homéomorphisme possède un gros ensemble de rotation, c'est dire qu'il possède des orbites qui dans  $\mathbb{R}^2$ , s'en vont dans des directions très différentes (ou, si elle vont dans la même direction, s'écartent de l'origine à des vitesses très différentes). Par conséquent, si  $F$  possède un gros ensemble de rotation, on devrait pouvoir trouver beaucoup de points proches dont les orbites vont s'écarter les unes des autres. Le théorème suivant donne un sens précis à cette heuristique:

**Théorème 3.21** (Llibre, MacKay, [32]). *Soit  $f$  un homéomorphisme du tore  $\mathbb{T}^2$  isotope à l'identité. On suppose que l'ensemble de rotation de  $f$  est d'intérieur non-vidé<sup>5</sup>. Alors l'entropie topologique de  $f$  est strictement positive.*

On rappelle que l'entropie topologique d'un homéomorphisme  $h$  d'un espace métrique  $(X, d)$  est un réel positif ou nul qui mesure la complexité de la dynamique de  $h$  (autrement dit, la vitesse à laquelle  $h$  mélange les points de  $X$ ). Plus précisément, pour  $\varepsilon > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\alpha(n, \varepsilon)$  le cardinal maximal d'un ensemble fini  $E \subset X$  tel que, si  $x, y \in E$  et  $x \neq y$ , alors les orbites par  $h$  de  $x$  et  $y$  vont se séparer en temps au plus  $n$ . Dire que  $h$  a une entropie topologique strictement positive, c'est dire que pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, le nombre  $\alpha(n, \varepsilon)$  croît exponentiellement vite en fonction de  $n$ . On renvoie par exemple à [21] pour une définition plus précise de l'entropie topologique et les propriétés élémentaires de cette quantité.

La preuve de ce théorème est assez simple, pour peu qu'on prenne pour acquise la théorie de Nielsen-Thurston.

Rappelons que le résultat principal de la théorie de Nielsen-Thurston est qu'un homéomorphisme  $h$  d'une surface compacte à bord  $S$  est toujours isotope à un difféomorphisme  $h_0$  qui est de l'un des trois types suivants:

- $h_0$  est *périodique*, c'est-à-dire qu'il existe un entier  $n$  tel que  $h_0^n = \text{Id}$  ;
- $h_0$  est *réductible*, c'est-à-dire qu'il existe une famille finie de courbes fermées simples essentielles deux-à-deux disjointes<sup>6</sup> dans la surface  $S$  qui sont permutées par  $h_0$  ;
- soit  $h_0$  est un homéomorphisme *pseudo-Anosov*, c'est-à-dire qu'il existe deux feuilletages transverses  $(\mathcal{F}^s, \mu^s)$  et  $(\mathcal{F}^u, \mu^u)$  et une constante positive  $\lambda < 1$  tels que  $h_0$  préserve les feuilletages  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$ , contracte la mesure  $\mu^s$  (précisément  $h_0(\mu^s) = \lambda \cdot \mu^s$ ) et dilate la mesure transverse  $\mu^u$  (précisément  $h_0(\mu^u) = \lambda^{-1} \cdot \mu^u$ ). On autorise les feuilletages  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  à posséder un nombre fini de singularités, mais uniquement du type singularité à  $k$ -branches ( $k \geq 3$ ), i.e. localement homéomorphe aux modèles représentés sur la figure 11.

L'homéomorphisme  $h_0$  est le *représentant de Nielsen-Thurston* de la classe d'isotopie de  $h$  (voir l'article original de Thurston [36], les livres [6] et [9], ou le cours de S. Cantat [5]).

Le premier point important est que les difféomorphismes pseudo-Anosov possèdent une dynamique très riche mais relativement bien comprise. Ceci provient du fait qu'en chaque point  $z$ , un homéomorphisme pseudo-Anosov  $h_0$  possède deux directions invariantes (celles des feuilles de  $s$  feuilletages  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  passant par  $z$ ), l'une contractée (autrement

<sup>5</sup>plus précisément, si  $F$  est un relevé de  $f$ , alors l'ensemble de rotation de  $F$  est d'intérieur non-vidé ; mais cette propriété ne dépend bien sûr pas du choix du relevé.

<sup>6</sup>Une courbe fermée dans la surface  $S$  est dite *essentielle* si elle n'est homotope ni à un point, ni à une des composantes de bord de  $S$ .

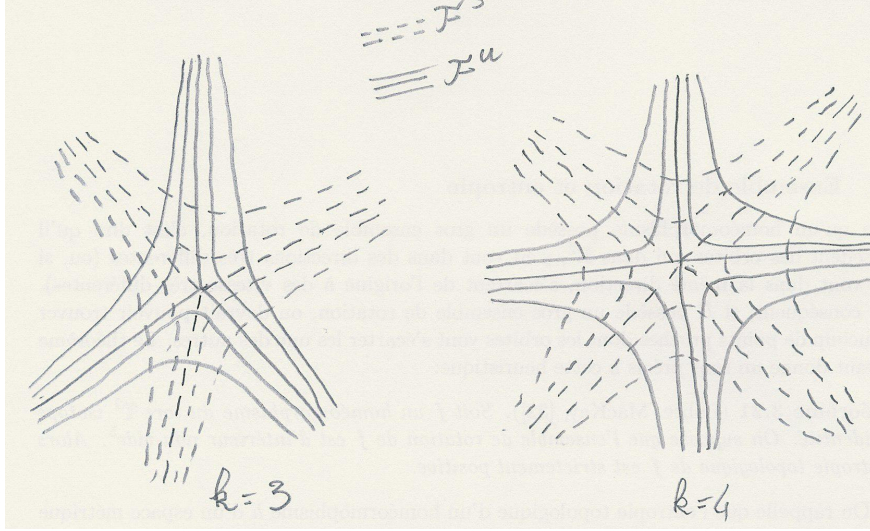


Figure 11: Singularités des feuilletages  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$ .

dit, dilatée par  $h_0^{-1}$ ), l'autre dilatée<sup>7</sup>. Les techniques usuelles de dynamique hyperbolique permettent alors de bien comprendre la dynamique de  $h$ . Par exemple, on montre que tout homéomorphisme pseudo-Anosov a une entropie topologique non-nulle (l'idée heuristique est très simple: deux orbites proches se séparent toujours exponentiellement vite soit dans le passé soit dans le futur, puisque  $h_0$  et  $h_0^{-1}$  dilatent des directions supplémentaires). L'autre point important est qu'un difféomorphisme pseudo-Anosov est en quelque sorte "l'homéomorphisme le plus simple de sa classe d'isotopie" ; le résultat suivant de M. Handel donne un sens précis à cette affirmation:

**Proposition 3.22** (Handel, [18]). *Soit  $h : S \rightarrow S$  un homéomorphisme, et  $h_0$  le représentant de Nielsen-Thurston de la classe d'isotopie de  $h$ . On suppose que  $h_0$  est de type pseudo-Anosov. Alors il existe un ensemble fermé  $E \subset S$  et une application continue surjective  $\phi : E \rightarrow S$  homotope à l'inclusion telle que  $h_0 \circ \phi = \phi \circ h$ .*

Ce lemme implique en particulier que pour tout homéomorphisme  $h$  est isotope à un homéomorphisme pseudo-Anosov  $h_0$ , l'entropie topologique de  $h$  est supérieure à l'entropie topologique de  $h_0$  ; en particulier, l'entropie topologique de  $h_0$  est non-nulle.

*Preuve*. On choisit un relevé  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}^2)$  de  $f$ . Puisque  $\rho(F)$  est d'intérieur non-vide par hypothèse, on peut choisir trois vecteurs non-colinéaires  $v_1, v_2, v_3$  à coordonnées rationnelles dans l'intérieur de  $\rho(F)$ . D'après le théorème 3.10, pour chaque  $i = 1, 2, 3$ , on peut trouver un point  $z_i \in \mathbb{R}^2$  périodique primitif pour  $f$ , tel que  $\rho(F, z_i) = v_i$  (le fait de pouvoir choisir  $z_i$  primitif est important). On note  $O_1, O_2, O_3$  les orbites des points  $z_1, z_2, z_3$ , et  $O = O_1 \cup O_2 \cup O_3$  ; bien entendu,  $O$  est un ensemble fini et  $f$ -invariant.

On s'intéresse à la classe d'isotopie de  $f$  relativement à  $O$ . Comme  $\mathbb{T}^2 \setminus O$  n'est pas compact, on commence par se ramener à une surface compacte à bord. Pour ce faire, on commence par utiliser un lemme technique qui affirme que  $f$  est isotope relativement à  $E$  à un homéomorphisme  $f'$  qui est différentiable aux points de  $E$  ([4]). On considère alors l'homéomorphisme  $f_E : \mathbb{T}_E^2 \rightarrow \mathbb{T}_E^2$  obtenu à partir de  $f'$  en éclatant chaque point

<sup>7</sup>la situation est un peu plus complexe aux singularités des feuilletages, mais ne fait guère qu'ajouter quelques difficultés techniques



de  $E$ . On identifie  $\mathbb{T}_E^2$  au tore  $\mathbb{T}^2$  privé de petits disques ouverts centrés aux différents points de  $E$ . On note  $f_{E,0}$  le représentant canonique de la classe d'isotopie de  $f_E$ , puis  $\overline{f_{E,0}}$  l'homéomorphisme de  $\mathbb{T}^2$  obtenu en étendant radialement  $f_{E,0}$  sur chacun des disques de  $\mathbb{T}^2 \setminus \mathbb{T}_E^2$ . Ainsi  $\overline{f_{E,0}}$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{T}^2$  qui coïncide avec  $f$  sur  $E$ , qui est isotope à  $f$  relativement à  $E$ , et qui se restreint en un homéomorphisme  $f_{E,0}$  de la surface compacte à bord  $\mathbb{T}_E^2 \subset \mathbb{T}^2$ . On note  $\overline{F_{E,0}} \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  le relevé de  $\overline{f_{E,0}}$  qui coïncide avec  $F$  sur  $\pi^{-1}(E)$ . Ainsi les vecteurs de rotations pour  $\overline{F_{E,0}}$  des points de  $E$  sont les mêmes que pour  $F$ .

On veut montrer que  $f_{E,0}$  est de type pseudo-Anosov. Supposons le contraire. Alors, il existe une courbe  $C$  essentielle dans  $\mathbb{T}_E^2$ , et un entier  $n \geq 1$  tels que les courbes  $C, \overline{f_{E,0}}(C), \dots, \overline{f_{E,0}}^{n-1}(C)$  sont deux-à-deux disjointes et tels que  $\overline{f_{E,0}}^n(C) = C$ . Le point important est le suivant:

*Affirmation.* La courbe  $C$  est essentielle non seulement dans  $\mathbb{T}_E^2$ , mais aussi dans  $\mathbb{T}^2$ .

Supposons le contraire. Alors la courbe  $C$  borde un disque  $D$  dans  $\mathbb{T}^2$ . Ce disque est bien sûr périodique de période  $n$  pour  $\overline{f_{E,0}}$ , et les relevés de tous les points situés dans  $D$  ont le même vecteur de rotation pour  $\overline{f_{E,0}}$ ; ce vecteur de rotation est de la forme  $(l/n, l'/n)$  avec  $l$  entier (Cf proposition 3.1). Puisque  $C$  est essentielle dans  $\mathbb{T}_E^2$ , elle n'est pas homotope dans une composante de bord de  $\mathbb{T}_E^2$ , et donc, le disque  $D$  contient plusieurs points de  $E$ . Par ailleurs, tous les points de  $E$  situés dans le disque  $D$  ont le même nombre de rotation (en l'occurrence  $(l/n, l'/n)$ ) pour  $\overline{F_{E,0}}$ , et donc pour  $F$ . Ces points appartiennent donc tous à la même orbite (on rappelle que  $E$  est constitué des points de trois orbites périodiques de vecteurs de rotations deux-à-deux distincts). Considérons alors un point  $z$  dans  $E \cap D$  et le plus petit entier strictement positif  $k$  tel que  $\overline{f_{E,0}}^k(z) \cap D$  (on a  $\overline{f_{E,0}}^k(z) \neq z$  puisque  $D$  contient au moins deux points de  $E$ ). Les disques  $D$  et  $\overline{f_{E,0}}^k(D)$  bordés par ces courbes ne sont pas disjoints (le point  $\overline{f_{E,0}}^k(z)$  est dans ces deux disques), et contiennent le même nombre de point de  $E$  (par  $\overline{f_{E,0}}$ -invariance de  $E$ ). Donc les courbes  $C$  et  $\overline{f_{E,0}}^k(C)$  soit ne sont pas disjointes, soient sont homotopes dans  $\mathbb{T}^2 \setminus E$ . Par définition de la courbe  $C$ , ceci implique que  $k$  est un multiple de  $n$ . Par ailleurs, le choix de l'entier  $k$  implique que  $k$  est un diviseur strict de la période de  $z$ . *A fortiori*, l'entier  $n$  est un diviseur strict de la période de  $z$ . Autrement dit,  $z$  n'est pas un point périodique de période primitive. Ceci contredit le fait que par construction les points  $z_1, z_2, z_3$  sont de périodes primitives. Il faut donc que la courbe  $C$  soit essentielle dans  $\mathbb{T}^2$ . On a ainsi terminé la preuve de l'affirmation.

On a donc trouvé une courbe fermée simple  $C$ , essentielle dans  $\mathbb{T}^2$ , et un entier  $n$ , telle que  $\overline{f_{E,0}}(C) = C$ . D'après la proposition 3.6, il en résulte que l'ensemble de rotation de n'importe quel relevé de  $\overline{f_{E,0}}$  est d'intérieur vide. Ceci est absurde puisque  $\overline{F_{E,0}}$  est un relevé de  $\overline{f_{E,0}}$  qui possède trois vecteurs de rotations non colinéaires (les vecteurs  $v_1, v_2$  et  $v_3$ ). Par conséquent,  $f_{E,0}$  doit être un homéomorphisme pseudo-Anosov. Par suite,  $f_{E,0}$  a une entropie topologique strictement positive, ce qui implique, d'après la proposition 3.22, que  $f_E$  a également une entropie topologique strictement positive, et enfin, que  $f$  a également une entropie topologique strictement positive.  $\square$

On sait donc que tout homéomorphisme  $f$  dont l'ensemble de rotation est d'intérieur non-vidé a une entropie topologique strictement positive. On peut alors se demander s'il est possible d'obtenir une minoration explicite de l'entropie de  $f$  en fonction de la "taille"

de l'ensemble de rotation de  $f$ . C'est ce qu'à fait J. Kwapisz dans sa thèse ([23]), obtenant en particulier le théorème 3.24 ci-dessous.

**Définition 3.23.** Soit  $K$  compact connexe de  $\mathbb{R}^2$ . On note

$$I(K) := \max \left\{ 1, \inf \{ \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \lambda.K \text{ contient trois points non-alignés de } \mathbb{Z}^2 \} \right\}$$

$$A(K) := \sup \{ \sqrt{r_1 r_2} \text{ tel que } \exists p, v, w \in \mathbb{Z}^2, v, w \text{ non-colinéaires, } p, p+r_1 v, p+r_2 w \in K \}.$$

**Théorème 3.24** (Kwapisz, [23, 24]). *Il existe une constante  $C, C' > 0$  avec la propriété suivante. Pour tout homéomorphisme  $f$  du tore  $\mathbb{T}^2$  isotope à l'identité, et tout relevé  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$  de  $f$ ,*

$$h_{top}(f) \geq C \log_+(A(\rho(F))) \quad \text{et} \quad h_{top}(f) \geq \frac{C'}{I(\rho(f))}.$$

En gros, le théorème 3.24 dit qu'il existe des constantes  $C, C' > 0$  telles que :

- si  $\rho(f)$  n'est pas trop petit, alors  $h_{top}(f) \geq C \log_+(\text{Aire}(\rho(F)))$  ;
- si  $\rho(f)$  n'est pas trop gros, alors  $h_{top}(f) \geq C' \sqrt{\text{Aire}(\rho(F))}$ .

Les théorèmes 3.21 et 3.24 concernent la dynamique globale de  $F$ . On peut chercher à préciser ces théorèmes en essayant de “localiser les orbites qui créent de l'entropie”. Par exemple, étant donné un homéomorphisme  $f$  dont l'ensemble de rotation est d'intérieur non-vide, et un vecteur  $v \in \int(\rho(F))$ , on peut se demander quel est la contribution à l'entropie des points de  $\mathbb{T}^2$  dont les vecteurs de rotations sont proches de  $v$  ? Kwapisz a montré que cette contribution est en général d'autant plus importante que le vecteur  $v$  est loin du bord de  $\rho(F)$ . En gros, on a un résultat du type suivant (voir [24] pour un énoncé plus précis) : il existe des constante  $C, C' > 0$  avec la propriété suivante. Pour tout homéomorphisme  $F \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$ , et tout  $v \in \text{Int}(\rho(F))$ , il existe un compact  $f$ -invariant  $K \subset \mathbb{T}^2$  tel que  $\rho(F, x) = \{v\}$  pour tout  $x \in K$  et tel que

- si  $\rho(F)$  n'est pas “trop petit” alors  $h_{top}(f|_K) \geq C'' \log(\text{Aire}(\rho(F)).\tau(v))$ ;
- si  $\rho(F)$  n'est pas “trop gros” alors  $h_{top}(f|_K) \geq C'' \sqrt{\text{Aire}(\rho(F)).\tau(v)}$ .

où  $\tau(v)$  mesure une sorte de “distance” de  $v$  au bord de l'ensemble  $\rho(F)$ .

Il faut garder à l'esprit que ce théorème ne fournit que des bornes inférieures : il peut très bien exister un vecteur  $v$  situé sur le bord de  $\rho(F)$  tel que les orbites de vecteur de rotation  $v$  aient une contribution très importante à l'entropie.

## References

- [1] Barge, Marcy; Walker, Russell B. Periodic point free maps of tori which have rotation sets with empty interior. *Nonlinearity* **6** (1993), 481–489.
- [2] Bonino, Marc; *La théorie de Brouwer*. Notes de cours École d'été de l'Institut Fourier, 2006.
- [3] Boyland, Philip. The rotation set as a dynamical invariant. In *Proceedings of the IMA Workshop on Twist Maps, IMA volumes in Math. Appl.* **44**, Springer, Berlin, 1992.
- [4] Bowen, Rufus Entropy and the fundamental group. *Springer Lecture Notes in Math.* **668** (1978), 21–29.
- [5] Cantat, Serge *Markov, Painlevé et Teichmüller*. Notes de cours École d'été de l'Institut Fourier, 2006.
- [6] Casson, Andrew, Bleiler, Steven. Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston. *London Math. Soc. Student Text* **9** (1988), 1–105.
- [7] Crovisier, Sylvain. *Exotic rotations*. Notes de cours École d'été de l'Institut Fourier, 2006.
- [8] Fayad, Bassam. *Constructions liouwilliennes*. Notes de cours École d'été de l'Institut Fourier, 2006.
- [9] Fathi, A., Laudenbach, F. et Poenaru, V. Travaux de Thurston sur les surfaces. *Astérisque* **66-67** (1979), 1–286.
- [10] Franks, John. Generalizations of the Poincaré-Birkhoff theorem. *Ann. of Math. (2)* **128** (1988), no. 1, 139–151.
- [11] Franks, John. Recurrence and fixed points for surface homeomorphisms. *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **8** (1988), 99–107.
- [12] Franks, John. Realizing rotation vectors for torus homeomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.* **311** (1989), no. 1, 107–115.
- [13] Franks, John. Rotation numbers for area preserving homeomorphisms of the open annulus. *Dynamical systems and related topics* (Nagoya, 1990), 123–127, *Adv. Ser. Dynam. Systems* **9**, World Sci. Publishing, River Edge, NJ (1991).
- [14] Franks, John. Rotation vectors for surface diffeomorphisms. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. 1, 2 (Zrich, 1994), 1179–1186, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [15] Franks, John. Rotation vectors and fixed points of area preserving surface diffeomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), no. 7, 2637–2662.
- [16] Franks, John. Area preserving homeomorphisms of open surfaces of genus zero. *New York J. Math.* **2** (1996), 1–19.

- [17] Franks, John; Misiurewicz, Michal. Rotation sets of toral flows. *Proc. Amer. Math. Soc.* **109** (1990), no. 1, 243–249.
- [18] Handel, Michael. Global shadowing of pseudo-Anosov homeomorphisms. *Ergod. Th. Dynam. Sys* **5** (1985), 373–377.
- [19] Handel, Michael. Periodic point free homeomorphism of  $T^2$ . *Proc. Amer. Math. Soc.* **107** (1989), no. 2, 511–515.
- [20] Handel, Michael. The rotation set of a homeomorphism of the annulus is closed. *Comm. Math. Phys.* **127** (1990), no. 2, 339–349.
- [21] Katok, Anatole ; Hasselblatt, Boris. *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [22] Kwapisz, Jaroslaw. Every convex polygon with rational vertices is a rotation set. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **12** (1992), no. 2, 333–339.
- [23] Kwapisz, Jaroslaw. An estimate of entropy for toroidal chaos. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **13** (1993), no. 1, 123–129.
- [24] Kwapisz, Jaroslaw. *Rotation sets and entropy*. PhD thesis, Stony Brook, 1995.
- [25] Kwapisz, Jaroslaw. A toral diffeomorphism with a nonpolygonal rotation set. *Non-linearity* **8** (1995), no. 4, 461–476.
- [26] Kwapisz, Jaroslaw; Swanson, Richard. Asymptotic entropy, periodic orbits, and pseudo-Anosov maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **18** (1998), no. 2, 425–439.
- [27] Kwapisz, Jaroslaw. A priori degeneracy of one-dimensional rotation sets for periodic point free torus maps. *Trans. Amer. Math. Soc.* **354** (2002), no 7, 2865–2895.
- [28] Kwapisz, Jaroslaw. Combinatorics of torus diffeomorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **23** (2003), no.2, 559–586.
- [29] Le Calvez, Patrice. Propriétés dynamiques des difféomorphismes de l’anneau et du tore. *Astérisque* **204** (1991).
- [30] Le Calvez, Patrice. Rotation numbers in the infinite annulus. *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (2001), no. 11, 3221–3230.
- [31] Le Calvez, Patrice. *From Brouwer theory to surface dynamics*. Notes de cours École d’été/’e de l’Institut Fourier, 2006.
- [32] Llibre, Jaume; MacKay, Robert S. Rotation vectors and entropy for homeomorphisms of the torus isotopic to the identity. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **11** (1991), no. 1, 115–128.
- [33] Misiurewicz, Michal and Ziemian, Krystyna. Rotation sets for maps of tori. *J. London. Math Soc.* (2) **40** (1989), no.3, 490–506.
- [34] Misiurewicz, Michal; Ziemian, Krystyna. Rotation sets and ergodic measures for torus homeomorphisms. *Fund. Math.* **137** (1991), no. 1, 45–52.
- [35] Shub, Michael. *Global Stability of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1987.

- [36] Thurston, William P. *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces.* *Bull. Amer. Math. Soc.* **19** (1988), 417–431.
- [37] Ziemian, Krystyna. Rotation sets for subshifts of finite type. *Fund. Math.* **146** (1995), no. 2, 189–201.