

Classification des difféomorphismes de Smale des surfaces : types géométriques réalisables

François Béguin

Résumé

La notion de *type géométrique d'une partition de Markov* est au centre de la classification des *difféomorphismes de Smale* (i.e. des difféomorphismes C^1 -structurellement stables) des surfaces. On résout ici le problème de réalisabilité : on donne un critère effectif pour décider si une combinatoire abstraite est, ou n'est pas, le type géométrique d'une partition de Markov de pièce basique de difféomorphisme de Smale de surface compacte.

Introduction

Soit M une variété compacte et $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de classe C^1 . On dit que f est C^1 -structurellement stable si tout difféomorphisme suffisamment proche de f en topologie C^1 est topologiquement conjugué à f . L'étude systématique de tels difféomorphismes a débuté dans les années 60 sous l'impulsion de S. Smale ; c'est pourquoi on appelle souvent *difféomorphismes de Smale* les difféomorphismes C^1 -structurellement stables des variétés compactes. Cet article est le dernier volet d'une classification des difféomorphismes de Smale des surfaces compactes.

Descriptions combinatoires d'un difféomorphisme de Smale de surface

Dans [4], C. Bonatti et R. Langevin ont donné des descriptions combinatoires de la dynamique topologique¹ de tout difféomorphisme de Smale de surface ; nous allons résumer ce travail.

Le point de départ est la caractérisation des difféomorphismes de Smale, due à J. W. Robbin, C. Robinson et R. Mañé (voir [9] et [8] pour la preuve de la caractérisation, et [10] pour les notions d'ensemble non-errant, d'ensemble hyperbolique, de variétés stable et instable) :

Un difféomorphisme f d'une variété compacte est un difféomorphisme de Smale si et seulement si l'ensemble non-errant $\Omega(f)$ est hyperbolique, les points périodiques sont denses dans $\Omega(f)$ et, pour tous points $x, y \in \Omega(f)$, la variété stable de x est transverse à la variété instable de y .

Un résultat classique montre alors que l'ensemble non-errant d'un difféomorphisme de Smale f est l'union disjointe d'un nombre fini de compacts transitifs maximaux : les *pièces basiques* de f ([10]). Ainsi, il est naturel, dans un premier temps, de chercher à décrire la dynamique d'un difféomorphisme de Smale de surface au voisinage de chacune de ses pièces basiques.

En fait, les seules pièces basiques qui nous préoccupent réellement sont les pièces basiques *selles*, c'est-à-dire les pièces basiques en tout point desquelles la direction stable et la direction instable sont de dimension 1 (les autres pièces basiques sont de simples orbites périodiques puits ou sources, aux voisinages desquelles la dynamique est triviale). Par ailleurs, on supposera toujours que les pièces basiques considérées sont totalement discontinues (pour la classification, on peut toujours se ramener à ce cas-là, voir [4, partie 2.3]).

Pour décrire la dynamique d'un difféomorphisme de Smale de surface au voisinage d'une pièce basique selle, on utilise des *partitions de Markov*. Cet outil va jouer un rôle central dans nos résultats ; c'est pourquoi nous en donnons dès maintenant une définition formelle :

1. i.e. la dynamique considérée à conjugaison topologique près

Un *rectangle* est l'image d'un plongement de $[0, 1]^2$ dans une surface. Étant donné un rectangle R , deux côtés opposés de R sont dits *stables* ou *horizontaux*, et on note $\partial^s R$ l'union de ces deux côtés ; les deux autres côtés sont dits *instables* ou *verticaux* et on note $\partial^u R$ leur union. Un *sous-rectangle horizontal* de R est un rectangle H , inclus dans R , tel que les côtés verticaux de H sont inclus dans l'un et l'autre des côtés verticaux de R . Un sous-rectangle horizontal de R est *strict* s'il est disjoint des côtés horizontaux de R . On définit de même la notion de *sous-rectangle vertical (strict)*.

Considérons alors une pièce basique selle Λ d'un difféomorphisme de Smale d'une surface S , et un rectangle R plongé dans S . On dit que le rectangle R est *bien placé* par rapport à la pièce basique Λ si : (i) le bord de R est disjoint de Λ , (ii) toute composante connexe de $W^s(\Lambda) \cap R$ est un arc qui traverse R horizontalement de part en part, (iii) toute composante connexe de $W^u(\Lambda) \cap R$ est un arc qui traverse R verticalement de part en part (figure 1).

Définition Soit f un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte S et Λ une pièce basique selle de f . Une *partition de Markov* de Λ est une collection finie $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$ de rectangles deux à deux disjoints, plongés dans S , bien placés par rapport à Λ , dont l'union recouvre Λ , et qui vérifient la propriété suivante :

(\star) pour tous $i, j \leq n$, chaque composante de $f(R_i) \cap R_j$ est à la fois un sous-rectangle vertical strict du rectangle R_j et l'image par f d'un sous-rectangle horizontal strict du rectangle R_i .

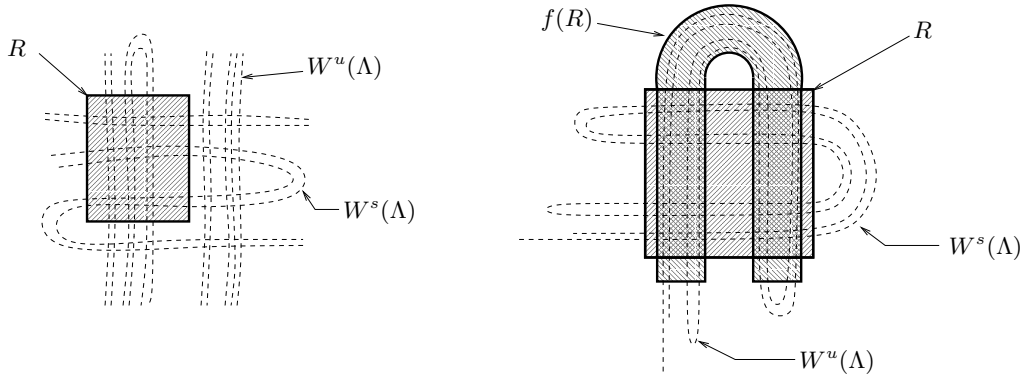


FIG. 1 – À gauche, un rectangle R bien placé par rapport à une pièce basique Λ . À droite, une partition de Markov à un seul rectangle R .

Une construction classique de R. Bowen implique que toute pièce basique selle d'un difféomorphisme de Smale de surface admet une partition de Markov (voir [5] pour l'idée originale, ou [4, chapitre 4] pour une preuve constructive).

Considérons un difféomorphisme de Smale f préservant l'orientation d'une surface compacte orientée S , et une partition de Markov $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$ d'une pièce basique selle de f . On extrait alors du couple (\mathcal{R}, f) une information combinatoire finie qui décrit la "façon" dont les rectangles R_1, \dots, R_n sont intersectés par leurs images $f(R_1), \dots, f(R_n)$:

- pour tout $i \leq n$, la liste ordonnée des rectangles R_{j_1}, \dots, R_{j_r} que traverse le rectangle $f(R_i)$,
- pour tout $j \leq n$, les positions relatives, dans le rectangle R_j , des différentes composantes connexes de l'intersection des rectangles $f(R_1), \dots, f(R_n)$ avec le rectangle R_j ,
- pour tous $i, j \leq n$, et pour chaque composante connexe de $f(R_i) \cap R_j$, un signe qui indique si le rectangle $f(R_i)$ traverse le rectangle R_j de bas en haut ou de haut en bas.

Cette information combinatoire s'appelle le *type géométrique* de la partition de Markov \mathcal{R} (on donnera une définition précise dans la partie 1).

Pour toute pièce basique selle Λ d'un difféomorphisme de Smale f de surface, on peut définir un voisinage invariant canonique de Λ : le *domaine* $\Delta(f, \Lambda)$ de Λ . Le résultat suivant justifie

alors l'introduction de la notion de type géométrique d'une partition de Markov :

Théorème (Bonatti, Langevin, [4]) *Considérons deux difféomorphismes de Smale f et f' préservant les orientations de surfaces compactes orientées, et deux pièces basiques selles Λ et Λ' de f et f' . Si les pièces basiques Λ et Λ' admettent des partitions de Markov de même type géométrique, alors il existe un homéomorphisme de $\Delta(f, \Lambda)$ sur $\Delta(f', \Lambda')$ qui conjugue f et f' .*

Le théorème ci-dessus montre que la dynamique topologique d'un difféomorphisme de Smale de surface est caractérisée, en restriction au domaine d'une pièce basique selle Λ , par un objet combinatoire fini : le type géométrique de n'importe quelle partition de Markov de Λ . En fait, en travaillant un peu plus, on en déduit assez facilement des descriptions combinatoires de la dynamique topologique *globale* de tout difféomorphisme de Smale de surface (voir [4, partie 3.4]).

Le problème de réalisabilité des types géométriques

Le théorème de Bonatti et Langevin ouvre la voie à une classification des difféomorphismes de Smale des surfaces. Plus précisément, pour obtenir une classification essentiellement complète de ces difféomorphismes, il faut répondre à deux questions :

Question 1 (vague) À quelle condition une combinatoire abstraite est-elle le type géométrique d'une partition de Markov de pièce basique de difféomorphisme de Smale de surface ?

Question 2 (vague) À quelle condition deux types géométriques distincts correspondent-ils à deux partitions de Markov d'une même pièce basique de difféomorphisme de Smale de surface ?

L'article [1] répond à la question 2 : j'y décris un algorithme qui décide si deux types géométriques donnés correspondent, ou non, à deux partitions de Markov différentes d'une même pièce basique de difféomorphisme de Smale. Le but du présent article est de répondre à la question 1 ; on va tout d'abord formuler cette question plus précisément ; pour ce faire, on doit définir les notions de *partition de Markov abstraite* et de *type géométrique réalisable* :

Définition *Une partition de Markov abstraite est un couple (\mathcal{R}, f) où $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$ est une collection finie de rectangles deux à deux disjoints plongés dans une surface orientée S , et f est un difféomorphisme de S préservant l'orientation, qui vérifient la propriété suivante :*

(\star) *pour tous $i, j \leq n$, chaque composante de $f(R_i) \cap R_j$ est à la fois un sous-rectangle vertical strict du rectangle R_j et l'image par f d'un sous-rectangle horizontal strict du rectangle R_i .*

Dans la définition ci-dessus, on n'impose aucune propriété particulière au difféomorphisme f ; ainsi, la position des rectangles $f(R_1), \dots, f(R_n)$ par rapport aux rectangles R_1, \dots, R_n est absolument quelconque, pour peu qu'elle respecte la condition (\star) (voir la remarque 1.3 pour un énoncé précis). La définition du type géométrique d'une partition de Markov s'étend sans aucune modification aux partitions de Markov abstraites.

Définition *Le type géométrique T d'une partition de Markov abstraite est réalisable s'il existe un difféomorphisme de Smale préservant l'orientation d'une surface compacte, dont une pièce basique selle admet une partition de Markov de type géométrique T .*

Question 1 (précisée) À quelle condition le type géométrique d'une partition de Markov abstraite est-il réalisable ?

Bonatti et E. Jeandenans ont défini le *genre* du type géométrique d'une partition de Markov abstraite, et ont caractérisé les types géométriques de genre fini ([4, chapitre 7]). Ils conjecturent alors qu'un type géométrique est réalisable si et seulement s'il est de genre fini. Dans [7], Jeandenans prouve un résultat qui plaide fortement en faveur de cette conjecture. Dans ce texte, nous apportons une réponse complète à la question 1, en utilisant une approche totalement différente de celle de Bonatti et Jeandenans.

Énoncé du résultat principal

Soit (\mathcal{R}, f) une partition de Markov abstraite, avec $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$.

Commençons par une remarque préliminaire : la partition de Markov abstraite (\mathcal{R}, f) est dite *transitive* si, quelques soient les entiers $i, j \leq n$, il existe une suite $i = i_0, i_1, \dots, i_r = j$ telle que $f(R_{i_k}) \cap R_{i_{k+1}}$ est non-vide pour tout $k < r$; un argument simple et classique montre que le type géométrique de (\mathcal{R}, f) ne peut être réalisable que si (\mathcal{R}, f) est transitive ; c'est pourquoi nous supposons dorénavant que la partition de Markov abstraite (\mathcal{R}, f) est transitive.

Nous allons énoncer un critère effectif qui permet de déterminer si le type géométrique de la partition de Markov abstraite (\mathcal{R}, f) est réalisable ou pas ; l'énoncé de ce critère passe par la construction d'une surface à points marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$. On note R l'union des rectangles R_1, \dots, R_n , et on note $\partial^s R$ l'union des côtés stables de ces rectangles. Par définition d'une partition de Markov abstraite, les rectangles R_1, \dots, R_n sont plongés dans une surface orientée ; par suite, le bord de chacun de ces rectangles est orienté. Un coin c du rectangle R_i est dit *stable-instable* si, quand on parcourt le bord du rectangle R_i dans le sens direct, on va d'un côté stable vers un côté instable en passant par c ; sinon il est dit *instable-stable*.

Construction de la surface à points marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$

★ On note $R^u = \text{adh}(R \setminus f^{-1}(R))$; c'est une union finie de sous-rectangles horizontaux des rectangles R_1, \dots, R_n . Le bord stable de R^u est la réunion de $\partial^s R$ et de $R \cap f^{-1}(\partial^s R)$ (figure 2).

★ Partant de l'ensemble R^u , on identifie chaque point $x \in R \cap f^{-1}(\partial^s R)$ à son image $f(x) \in f(R) \cap \partial^s R \subset \partial^s R$; on obtient ainsi une surface (topologique) à bord que l'on note $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ (figure 2). On note Π^u la projection naturelle de R^u sur $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$.

★ On appelle *points marqués stables-instables* de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ les images par Π^u des coins stables-instables des rectangles R_1, \dots, R_n (figure 3). On appelle *points marqués instables-stables* de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ les images par Π^u des coins instables-stables des rectangles R_1, \dots, R_n .

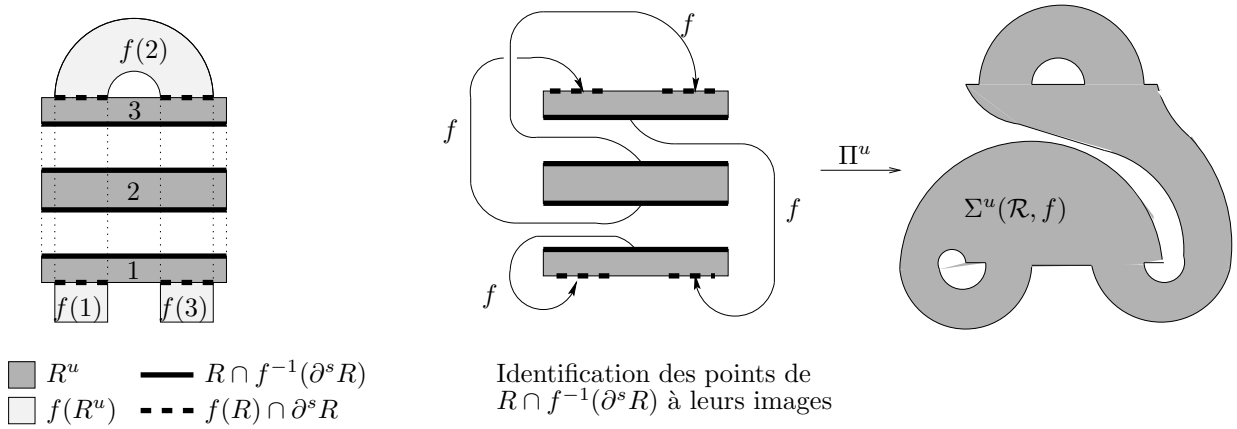


FIG. 2 – Construction de la surface à bord $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ (dans le cas où (\mathcal{R}, f) est une partition de Markov abstraite de même type géométrique que la partition de la figure 1).

Définitions Une composante de bord de la surface à points marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est équilibrée si elle porte autant de points marqués stables-instables que de points marqués instables-stables.

Une composante connexe Σ de $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est simple si elle est dans l'un des deux cas suivants :

Cas I. Σ est de genre 1, et toutes les composantes de bord de Σ sont équilibrées ;

Cas II. Σ est de genre nul, et toutes les composantes de bord de Σ sauf deux sont équilibrées.

Enfin, la surface à points marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est simple si ses composantes connexes sont simples.

Par exemple, la surface à points marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ construite aux figures 2 et 3 est simple : elle est connexe, de genre nul, et une de ses trois composantes de bord est équilibrée. Le but de

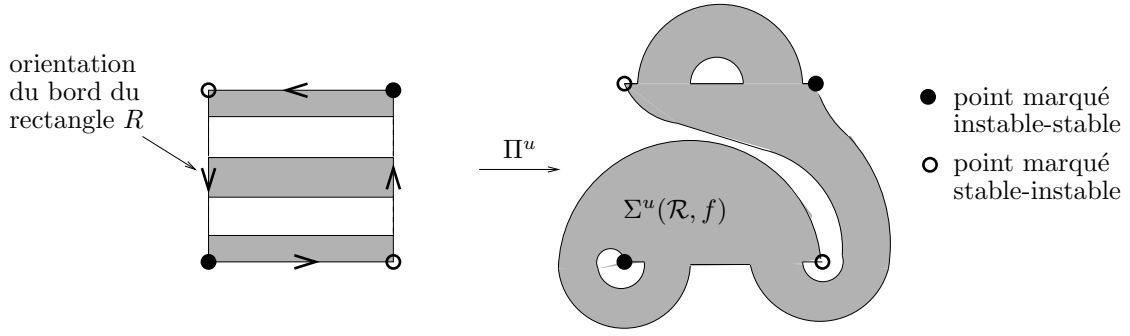


FIG. 3 – Construction des points marqués de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$.

l'article est d'établir le théorème suivant :

Théorème 1 *Le type géométrique de la partition de Markov abstraite transitive (\mathcal{R}, f) est réalisable si et seulement si la surface à points marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est simple.*

Le théorème 1 fournit un moyen simple et rapide de déterminer si le type géométrique d'une partition de Markov abstraite est réalisable ou non. Par exemple, dans la partie 8, nous utiliserons le théorème 1 pour exhiber des partitions de Markov abstraites dont les types géométriques ne sont pas réalisables.

La conjecture de Bonatti-Jeandenans évoquée précédemment (“un type géométrique est réalisable si et seulement si il est de genre fini”) peut être obtenue comme corollaire du théorème 1 (voir [2, chapitre 4, appendice A]). Ce corollaire n'est cependant pas très utile en pratique : pour déterminer si un type géométrique est réalisable, il est beaucoup moins coûteux d'utiliser le théorème 1, que d'utiliser la caractérisation des types géométriques de genre fini.

Organisation de l'article

Dans la partie 2, on définira la notion de *surface à arcs marqués* et la notion d'*encerclément dans des tores*, puis on munira alors la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ d'une structure de surface à arcs marqués. Les sections 3 à 7 seront alors consacrées à la preuve du théorème suivant :

Théorème 1bis *Étant donnée une partition de Markov abstraite transitive (\mathcal{R}, f) , les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Le type géométrique de la partition de Markov abstraite (\mathcal{R}, f) est réalisable.*
2. *La surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ peut être encerclée dans des tores.*
3. *La surface à points marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est simple.*

Remarquons que le théorème 1 correspond à l'équivalence $1 \iff 3$ du théorème 1bis ; en particulier, le théorème 1bis implique le théorème 1. La propriété 2 du théorème 1bis n'a pas d'autre intérêt que de servir d'intermédiaire entre les propriétés 1 et 3.

La notion de type géométrique réalisable concerne les difféomorphismes des surfaces. Cependant, la preuve du théorème 1bis nécessite de raisonner sur des objets plus généraux : les champs de vecteurs des variétés de dimension 3 (on rappelle que l'opération de *suspension* permet de considérer les champs de vecteurs des variétés de dimension 3 comme des généralisations des difféomorphismes des surfaces). Dans les sections 3 et 4, on traduira la notion de type géométrique réalisable en termes de champs de vecteurs des variétés de dimension 3.

On abordera alors la preuve du théorème 1bis proprement dite : les parties 5, 6 et 7 sont consacrées aux preuves des implications $1 \implies 2$ et $2 \implies 1$, et de l'équivalence $2 \iff 3$.

Enfin, on exhibera, dans la partie 8, des exemples de partitions de Markov abstraites dont les types géométriques ne sont pas réalisables.

Remerciements Cet article est issu d'une thèse sur les champs de Smale en dimension 3. Je tiens à remercier Christian Bonatti de m'avoir proposé cette thèse, et de l'avoir dirigée avec beaucoup d'enthousiasme.

1 Type géométrique d'une partition de Markov

Pour donner un sens tout-à-fait précis à la notion de *type géométrique réalisable*, il nous reste à définir formellement le *type géométrique* d'une partition de Markov ; c'est le but de cette partie.

On considère une partition de Markov abstraite (\mathcal{R}, f) , on note R_1, \dots, R_n les rectangles de cette partition de Markov, et on note $R = R_1 \cup \dots \cup R_n$. Par ailleurs, pour tout $i \leq n$:

- on choisit une orientation ω_i^s d'un côté horizontal du rectangle R_i .
- l'orientation ω_i^s induit une orientation ω_i^u d'un côté vertical du rectangle R_i (via l'orientation de la surface dans laquelle sont plongés les rectangles R_1, \dots, R_n),
- les orientations ω_i^s et ω_i^u nous permettent de parler des côtés inférieur, supérieur, gauche et droit du rectangle R_i , ainsi que de tout sous-rectangle horizontal ou vertical de R_i .

Définition 1.1

- Pour tout $i \leq n$, on note h_i le nombre de composantes connexes de $f(R_i) \cap R$. Par définition d'une partition de Markov, ces composantes connexes sont les images par f de sous-rectangles horizontaux du rectangle R_i , que l'on note $H_i^1, \dots, H_i^{h_i}$ dans l'ordre induit par l'orientation ω_i^u .
- Pour tout $k \leq n$, on note v_k le nombre de composantes connexes de $R_k \cap f(R)$. Ces composantes connexes sont des sous-rectangles verticaux du rectangle R_k , que l'on note $V_k^1, \dots, V_k^{v_k}$ dans l'ordre induit par l'orientation ω_k^s .
- Pour tout $i \leq n$ et tout $j \leq h_i$, il existe un (unique) couple d'entiers (k, l) tel que $f(H_i^j) = V_k^l$; on pose alors $\Phi(i, j) = (k, l)$. Par ailleurs, on pose $\varepsilon(i, j) = +$ si f envoie le côté inférieur du sous-rectangle H_i^j sur le côté inférieur du sous-rectangle V_k^l ; sinon, on pose $\varepsilon(i, j) = -$. On définit ainsi une bijection $\Phi : \{(i, j) \mid i \leq n, j \leq h_i\} \rightarrow \{(k, l) \mid k \leq n, l \leq v_k\}$, et une fonction $\varepsilon : \{(i, j) \mid i \leq n, j \leq h_i\} \rightarrow \{+, -\}$.

Le type géométrique T de la partition de Markov abstraite (\mathcal{R}, f) est la donnée des entiers $n, h_1, \dots, h_n, v_1, \dots, v_n$, de la bijection Φ et de l'application ε .

Exemple 1.2 Le type géométrique de la partition de Markov dessinée à la figure 1 est donné par : $n = 1, h_1 = v_1 = 2, \Phi(1, 1) = (1, 1), \varepsilon(1, 1) = +, \Phi(1, 2) = (1, 2)$ et $\varepsilon(1, 2) = -$.

Remarque 1.3 Étant donnés des entiers $n, h_1, \dots, h_n, v_1, \dots, v_n$ tels que $\sum_i h_i = \sum_i v_i$, étant donnée une bijection $\Phi : \{(i, j) \mid i \leq n, j \leq h_i\} \rightarrow \{(k, l) \mid k \leq n, l \leq v_k\}$ et une fonction $\varepsilon : \{(i, j) \mid i \leq n, j \leq h_i\} \rightarrow \{+, -\}$, il est facile de construire une partition de Markov abstraite de type géométrique $T = \{n, h_1, \dots, h_n, v_1, \dots, v_n, \Phi, \varepsilon\}$.

2 Surfaces à arcs marqués et encerclements dans des tores

Le but de cette partie est de donner un sens à la propriété 2 de l'énoncé du théorème 1bis. On définira tout d'abord les notions de *surface à arcs marqués* et d'*encerclement*. Puis, pour toute partition de Markov abstraite (\mathcal{R}, f) , on définira les arcs marqués de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$.

2.1 Surfaces à arcs marqués et encerclements

Un arc γ , tracé sur une surface à bord Σ , sera dit *maximal*, si les deux extrémités de γ sont situées sur le bord de Σ .

Définition 2.1 Soit Σ une surface à bord orientée. Faire de Σ une surface à arcs marqués, c'est se donner un nombre fini d'arcs simples, maximaux, orientés, deux à deux disjoints, tracés sur Σ (les arcs marqués de Σ).

Supposons données une surface à arcs marqués Σ , et une courbe fermée γ telle que $\gamma \cap \Sigma$ est une union d'arcs marqués de Σ . On dira que les orientations des arcs marqués de Σ sont *cohérentes le long de γ* si, quels que soient les arcs marqués δ_1, δ_2 de Σ inclus dans la courbe γ , les orientations des arcs marqués δ_1 et δ_2 induisent la même orientation de la courbe γ .

Définitions 2.2 Soit Σ une surface à arcs marqués.

Un encerclement de Σ dans une surface sans bord F est la donnée d'un plongement $h : \Sigma \hookrightarrow F$ et de courbes fermées simples $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, deux à deux disjointes, tracées sur F , tels que :

- pour tout $i \leq n$, l'intersection de la courbe γ_i avec la surface $h(\Sigma)$ est une union d'arcs marqués² de $h(\Sigma)$, et les orientations des arcs marqués de $h(\Sigma)$ sont cohérentes le long de γ_i ,
- tout arc marqué de la surface $h(\Sigma)$ est inclus dans l'une des courbes $\gamma_1, \dots, \gamma_n$,

On dira que Σ peut être encerclée dans des tores s'il existe un encerclement de Σ dans une surface F dont toutes les composantes connexes sont des tores.

Par exemple, on vérifie facilement que la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ représentée à la figure 4 peut être encerclée dans un tore (mais pas dans une sphère).

Deux surfaces à arcs marqués Σ et Σ' seront dites *équivalentes*, s'il existe un homéomorphisme $g : \Sigma \rightarrow \Sigma'$, qui envoie l'orientation de Σ sur l'orientation de Σ' , et qui envoie les arcs marqués orientés de Σ sur les arcs marqués orientés de Σ' .

Considérons alors deux surfaces à arcs marqués équivalentes Σ et Σ' ; deux plongements $h : \Sigma \hookrightarrow F$ et $h' : \Sigma' \hookrightarrow F'$ seront dits *équivalents* s'il existe un homéomorphisme $g : F \rightarrow F'$, qui envoie $h(\Sigma)$ sur $h'(\Sigma')$, qui envoie l'orientation de $h(\Sigma)$ sur l'orientation de $h'(\Sigma')$, et qui envoie les arcs marqués orientés de $h(\Sigma)$ sur les arcs marqués orientés de $h'(\Sigma')$.

Remarques 2.3 Si Σ et Σ' sont deux surfaces à arcs marqués équivalentes, alors Σ peut être encerclée dans des tores si et seulement si il en est de même pour Σ' .

Si $h : \Sigma \hookrightarrow F$ et $h' : \Sigma' \hookrightarrow F'$ sont deux plongements équivalents, et si $g : F \rightarrow F'$ est un homéomorphisme qui réalise l'équivalence, alors $h, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ est un encerclement de Σ dans F si et seulement si $h', g(\gamma_1), \dots, g(\gamma_n)$ est un encerclement de Σ' dans F' .

2.2 La surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$

Soit (\mathcal{R}, f) une partition de Markov abstraite. Nous allons reprendre la construction de la surface à bord $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$, puis faire de $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ une *surface à arcs marqués*. On note R_1, \dots, R_n les rectangles de la partition de Markov abstraite (\mathcal{R}, f) , et on note R l'union de ces rectangles. On rappelle que, par définition d'une partition de Markov abstraite, les rectangles R_1, \dots, R_n sont munis d'une orientation que préserve le difféomorphisme f .

L'ensemble R^u . On note $R^u = \text{adh}(R \setminus f^{-1}(R))$. De la définition d'une partition de Markov abstraite, on déduit que les composantes connexes de R^u sont des sous-rectangles horizontaux des rectangles R_1, \dots, R_n . On vérifie facilement que le bord stable de R^u est l'union disjointe des ensembles $\partial^s R$ et $R \cap f^{-1}(\partial^s R)$, puis que R^u est l'union disjointe des ensembles $R \setminus f^{-1}(R)$ et $R \cap f^{-1}(\partial^s R)$. On en déduit que, si un point x et son image $f(x)$ sont tous deux dans R^u , alors le point x est nécessairement sur $R \cap f^{-1}(\partial^s R)$ (et, par suite, le point $f(x)$ est sur $\partial^s R$).

La surface à bord $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ et son orientation. On note $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ l'ensemble obtenu à partir de R^u en identifiant chaque point $x \in R \cap f^{-1}(\partial^s R)$ à son image $f(x)$ (figure 2).

L'ensemble $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est obtenu à partir de R^u en identifiant les composantes connexes de $R \cap f^{-1}(\partial^s R)$ à leur images par f . L'ensemble R^u est une union finie de disques topologiques deux à deux disjoints. Les composantes connexes de $\partial^s R$ et leurs images sont des arcs deux à deux

2. L'expression "les arcs marqués de $h(\Sigma)$ " signifie "les images par h des arcs marqués de Σ " et l'expression "les orientations des arcs marqués de $h(\Sigma)$ " signifie "les images par h des orientations des arcs marqués de Σ ".

disjoints du bord de R^u . On en déduit facilement que $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est une surface (topologique) compacte à bord. Cette surface est orientable car le difféomorphisme f préserve l'orientation.

On note Π^u la projection naturelle de R^u sur $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$, et on oriente la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ grâce à l'image par Π^u de l'orientation des rectangles R_1, \dots, R_n .

Les arcs marqués de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ et leurs orientations. On appelle *arcs marqués* de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ les images par Π^u des composantes connexes de $\partial^s R$; ce sont des arcs simples, maximaux, deux à deux disjoints, tracés sur la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$. On oriente ces arcs grâce à l'image par Π^u de l'orientation du bord des rectangles R_1, \dots, R_n (figure 4). La donnée de ces arcs orientés fait de $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ une surface à arcs marqués au sens de la définition 2.1.

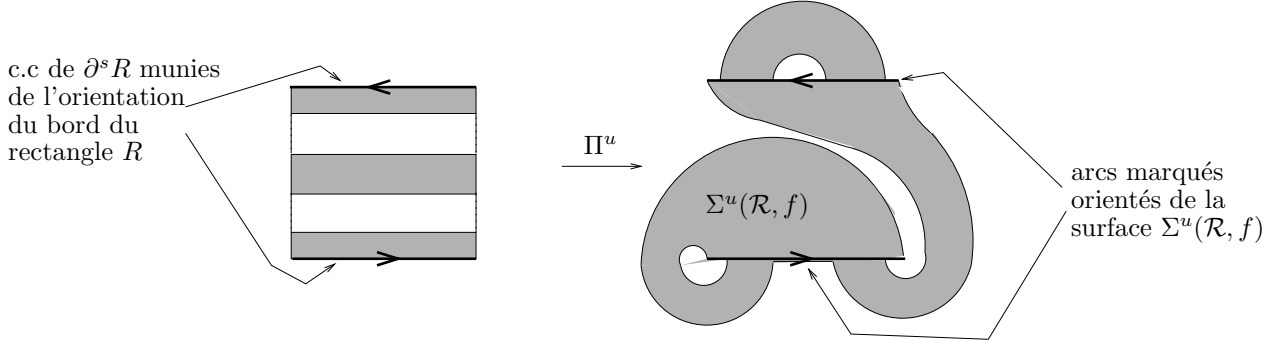


FIG. 4 – Les arcs marqués de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ et leurs orientations.

Le lemme suivant découle directement de la définition du type géométrique d'une partition de Markov et de la définition de la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$:

Lemme 2.4 *Si (\mathcal{R}', f') est une partition de Markov abstraite ayant le même type géométrique que (\mathcal{R}, f) , alors les surfaces à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ et $\Sigma^u(\mathcal{R}', f')$ sont équivalentes.*

Remarque 2.5 (Arcs et points marqués de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$) On rappelle qu'un coin c du rectangle R_i est *stable-instable* si, quand on parcourt le bord de R_i dans le sens direct, on va d'un côté stable vers un côté instable en passant par c . Les *points marqués stables-instables* de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ sont les images par Π^u des coins stables-instables des rectangles R_1, \dots, R_n , et les *points marqués stables-instables* sont définis de même. On remarque alors que :

- chaque arc marqué de $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ joint un point marqué instable-stable à un point marqué stable-instable, et est orienté du point instable-stable vers le point stable-instable ;
- réciproquement, tout point marqué de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est une extrémité d'un arc marqué.

3 Champs de Smale en dimension 3 et réalisabilité des types géométriques

Les champs de Smale des variétés de dimension 3 peuvent être vus comme des généralisations naturelles des difféomorphismes de Smale des surfaces (via l'opération de suspension). Nous allons traduire la réalisabilité d'un type géométrique en termes de champs de Smale des variétés de dimension 3 ; nous disposerons ainsi d'outils supplémentaires pour prouver le théorème 1bis.

3.1 Champs de Smale en dimension 3 et partitions de Markov

Deux champs de vecteurs X, Y définis sur des variétés \mathcal{M}, \mathcal{N} sont dits *topologiquement équivalents* s'il existe un homéomorphisme $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ qui envoie orbite orientée de X sur orbite orientée de Y . On dit qu'un champ de vecteurs X sur une variété compacte \mathcal{M} est un

champ de Smale si tout champ de vecteurs proche de X en topologie C^1 est topologiquement équivalent à X . On a alors une caractérisation similaire à celle des difféomorphismes de Smale : *Un champ de vecteurs X non-singulier sur une variété compacte est un champ de Smale si et seulement si l'ensemble non-errant $\Omega(X)$ est hyperbolique, les orbites périodiques sont denses dans $\Omega(X)$, et les variétés stables et instables des orbites de $\Omega(X)$ se coupent transversalement.*

Comme pour les difféomorphismes, l'ensemble non-errant d'un champ de Smale se décompose en un nombre fini de *pièces basiques* (compacts transitifs maximaux). On supposera toujours que les pièces basiques selles sont transversalement totalement discontinues.

Considérons une pièce basique selle K d'un champ de Smale X sur une 3-variété compacte \mathcal{M} . Une *section locale* de K est une surface compacte à bord S plongée dans \mathcal{M} , transverse à X , coupant toute orbite de K , et dont le bord est disjoint de K . Il existe toujours de telles sections locales (voir [6]). Si S est une section locale de K , on remarque que l'ensemble $\Lambda = K \cap S$ est une pièce basique selle (*i.e* un compact transif maximal hyperbolique selle) pour le difféomorphisme (local) de premier retour sur S .

Définition 3.1 *On considère une pièce basique selle K d'un champ de Smale X , et une section locale S de K . On note f l'application de premier retour sur la section locale S .*

Une partition de Markov de K tracée sur S est une collection finie de rectangles $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$ plongés dans la section locale S , tel que le difféomorphisme local f est défini en tout point de $R_1 \cup \dots \cup R_n$, et tel que \mathcal{R} est une partition de Markov de la pièce basique $\Lambda = K \cap S$ pour le difféomorphisme local f (au sens défini dans l'introduction).

Remarque 3.2 L'expression "une partition de Markov \mathcal{R} de K tracée sur la section locale S " signifie, non seulement que les rectangles de la partition \mathcal{R} sont plongés dans la section S , mais aussi que ces rectangles recouvrent $K \cap S$.

Si X est un champ de vecteurs sur une 3-variété *orientée* \mathcal{M} , et si S est une surface plongée dans \mathcal{M} , transverse au champ X , alors l'*orientation dynamique* de la surface S est définie par la propriété suivante : en un point x de S , les deux vecteurs d'une base directe de $T_x S$ pour l'orientation dynamique de S , suivis du vecteur $X(x)$ forment une base directe de $T_x \mathcal{M}$. L'orientation de S est préservée par l'application de premier retour des orbites de X sur S .

Dans la suite, si S est une section locale d'une pièce basique de champ de Smale sur une 3-variété orientée, alors S sera toujours tacitement munie de son orientation dynamique ; ceci permet de définir le type géométrique de toute partition de Markov tracée sur S .

La définition suivante permet de contrôler les orbites positives des points d'une partition de Markov, au-delà de leur premier retour sur une section locale :

Définition 3.3 *Soit \mathcal{R} une partition de Markov tracée sur une section locale S . On note R l'union des rectangles de \mathcal{R} et f l'application de premier retour sur S . La partition de Markov \mathcal{R} est dite *essentielle* si l'orbite positive de tout point de $f(R) \setminus R$ est disjointe de R .*

Enfin, nous utiliserons le résultat suivant :

Théorème 3.4 (Béguin, Bonatti, Vieitez, [3]) *Si T est le type géométrique d'une partition de Markov abstraite transitive, alors il existe un champ de Smale X sur une 3-variété compacte orientée, tel qu'une pièce basique de X admet une partition de Markov essentielle de type géométrique T .*

3.2 Champs de vecteurs et suspensions de difféomorphismes

Définition 3.5 *Soit X un champ de vecteurs sur une 3-variété compacte \mathcal{M} . Une section globale de X est une surface compacte sans bord, plongée dans \mathcal{M} , transverse à X , qui coupe toutes les orbites de X .*

À un difféomorphisme de Smale f d'une surface compacte, l'opération classique de suspension associe un champ de Smale sur une 3-variété compacte ; ce champ admet une section globale dont l'application de premier retour n'est autre que f . Réciproquement, si X est un champ de Smale sur une variété compacte \mathcal{M} qui admet une section globale S , alors l'application de retour sur S est un difféomorphisme de Smale, et le champ X est topologiquement équivalent à la suspension du difféomorphisme f . Le lemme suivant en découle immédiatement :

Lemme 3.6 *Le type géométrique T d'une partition de Markov abstraite transitive est réalisable si et seulement s'il existe un champ de Smale X sur une 3-variété compacte orientée, une pièce basique selle K de X et une section globale S de X , tels que la pièce basique K admet une partition de Markov \mathcal{R} , tracée sur la section globale S , de type géométrique T .*

3.3 Voisinages filtrants d'un ensemble selle saturé

Soit X un champ de Smale d'une 3-variété compacte \mathcal{M} et K une pièce basique selle de X .

Définition 3.7 *Un voisinage filtrant de la pièce basique K est sous-variété à bord $M \subset \mathcal{M}$, dont le bord est transverse au champ X , dont le maximal invariant est égal à K (i.e. $K = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X^t(M)$), et dont l'intersection avec chaque orbite de X est connexe.*

Remarque 3.8 Toute pièce basique d'un champ de Smale est connexe. Par conséquent, si M est un voisinage filtrant de la pièce basique K , alors, quitte à supprimer les composantes connexes de M qui ne rencontrent pas K , on peut supposer que M est connexe.

L'existence de voisinages filtrants (parfois appelés “voisinage isolants” dans la littérature) d'une pièce basique d'un champ de Smale est un fait classique (voir, par exemple, [6]). On considère dorénavant un voisinage filtrant M de la pièce basique K .

Notation 3.9 *Par définition d'un voisinage filtrant, le bord de M est transverse au champ X . On notera $\partial^s M$ le bord d'entrée de M , i.e. l'union des composantes du bord de M le long desquelles le champ X pointe vers l'intérieur de M . On notera $\partial^u M$ le bord de sortie de M , i.e. l'union des composantes du bord de M le long desquelles X pointe vers l'extérieur de M .*

Remarque 3.10 Pour tout point $x \in \mathcal{M}$, l'orbite de x coupe $\partial^u M$ (resp. $\partial^s M$) en au plus un point (sinon, l'intersection de l'orbite de x avec M ne pourrait pas être connexe). Par suite, tout point x dont l'orbite coupe $\partial^u M$ (resp. $\partial^s M$) est errant.

Notations 3.11 *Soit x un point de \mathcal{M} .*

— *Si l'orbite de x coupe $\partial^u M$, alors on note $P_M^u(x)$ l'unique point d'intersection de l'orbite de x avec la surface $\partial^u M$, et on note $\psi_M^u(x)$ le réel qui satisfait $P_M^u(x) = X^{\psi_M^u(x)}(x)$ (autrement dit, ψ_M^u est le temps que l'orbite de x pour aller du point x au point $P_M^u(x)$).*

— *Si l'orbite de x coupe $\partial^s M$, alors on notera $P_M^s(x)$ l'unique point d'intersection de l'orbite de x avec la surface $\partial^s M$, et on note $\psi_M^s(x)$ le réel qui satisfait $P_M^s(x) = X^{\psi_M^s(x)}(x)$.*

L'un des avantages des champs de vecteurs (par rapport aux difféomorphismes) est la possibilité “d'ajuster” la position d'une sous-variété en la déplaçant le long des orbites du champ de vecteurs. Plus précisément, considérons deux surfaces (éventuellement à bords) Σ et $\tilde{\Sigma}$ plongées dans la variété \mathcal{M} . S'il existe une fonction continue $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\tilde{\Sigma} = \{X^{\varphi(x)}(x) \mid x \in \Sigma\},$$

alors on dira que la surface $\tilde{\Sigma}$ est obtenue en déplaçant la surface Σ le long des orbites de X (pendant un temps φ). On notera parfois $\tilde{\Sigma} = X^\varphi(\Sigma)$. Il sera particulièrement utile de pouvoir déplacer le bord de sortie (ou d'entrée) d'un voisinage filtrant le long des orbites de X :

Définition 3.12 On rappelle que M désigne un voisinage filtrant de K . On considère une fonction lisse $\varphi : \partial^u M \rightarrow \mathbb{R}$, et on note $X^\varphi(\partial^u M)$ la surface obtenue en déplaçant $\partial^u M$ le long des orbites de X pendant un temps φ . On suppose que, pour tout $x \in \partial^u M$, le segment d'orbite qui va du point x au point $X^{\varphi(x)}(x)$ ne coupe pas $\partial^s M$. Alors, les surfaces $\partial^s M$ et $X^\varphi(\partial^u M)$ bordent une (unique) sous-variété à bord \widetilde{M} de M , telle que le champ X pointe vers l'intérieur de \widetilde{M} le long de $\partial^s M$ et pointe vers l'extérieur de \widetilde{M} le long de $X^\varphi(\partial^u M)$. On vérifie immédiatement que cette sous-variété \widetilde{M} est un voisinage filtrant de K .

On dira que le voisinage filtrant \widetilde{M} est obtenu à partir de M en déplaçant $\partial^u M$ le long des orbites de X (pendant un temps φ).

Remarque 3.13 Si \widetilde{M} est obtenu en déplaçant $\partial^u M$ le long des orbites de X pendant un temps φ , alors on a $\psi_{\widetilde{M}}^u(x) = \psi_M^u(x) + \varphi(P_M^u(x))$ pour tout point x dont l'orbite coupe $\partial^u M$.

Voici maintenant un lemme technique qui nous sera utile à plusieurs reprises :

Lemme 3.14 On considère une sous-variété (éventuellement à bord) F de la surface $\partial^s M$, et on suppose que F est disjointe de la lamination stable $W^s(K)$. Alors, l'intersection de l'orbite de F avec M est difféomorphe au cylindre $F \times [0, 1]$, via un difféomorphisme qui envoie les orbites des points de F sur les génératrices $\{x\} \times [0, 1]$ du cylindre $F \times [0, 1]$.

La même conclusion est valable si F est une sous-variété de $\partial^u M$ disjointe de $W^u(K)$.

Preuve La sous-variété F est disjointe de $W^u(K)$, et K est le maximal invariant de M ; par conséquent, l'orbite positive de tout point de F sort de M au bout d'un temps fini. Quitte à multiplier X par une fonction lisse strictement positive, on peut supposer que le temps de sortie des points de F est uniformément égal à 1. L'application $\Phi : (x, t) \mapsto X^t(x)$ envoie alors $F \times [0, 1]$ sur l'intersection de l'orbite de F avec M . Il est clair que Φ est un difféomorphisme local en tout point, et envoie les génératrices du cylindre $F \times [0, 1]$ sur les orbites des points de F . Enfin, Φ est injective sur $F \times [0, 1]$, car aucune orbite ne coupe F en plus d'un point (remarque 3.10). \triangle

Corollaire 3.15 Si M est connexe, alors aucune composante connexe de $\partial^s M$ n'est disjointe de $W^s(K)$, et aucune composante connexe de $\partial^u M$ n'est disjointe de $W^u(K)$.

Preuve Par l'absurde : on suppose l'existence d'une composante connexe F de $\partial^u M$ qui est disjointe de $W^u(K)$, et on note \mathcal{O} l'intersection de l'orbite de F avec M . Alors, \mathcal{O} est fermé dans M (car F est fermé, et d'après le lemme 3.14), et \mathcal{O} est ouvert dans M (car F est ouvert dans $\partial^u M$) ; par conséquent, \mathcal{O} est égal à M . Or tous les points de \mathcal{O} sont errants (remarque 3.10), donc $\mathcal{O} = M$ est disjoint de K , ce qui est absurde. \triangle

3.4 Voisinages filtrants abstraits

Dans la preuve du théorème 1bis, nous aurons besoin d'une notion de *voisinage filtrant abstrait*, valable en l'absence d'une variété ambiante sans bord :

Définition 3.16 Un *voisinage filtrant abstrait* est un triplet (M, X, K) , où M est une variété compacte à bord, X est un champ de vecteurs sur M , et K est une pièce basique selle du champ X (i.e. un compact transitif maximal hyperbolique selle), avec les propriétés suivantes :

- le champ X est transverse au bord de M ,
- la pièce basique selle K est le maximal invariant de M sous l'action de X .

Bien entendu, si X est un champ de Smale sur une 3-variété compacte sans bord, si K est une pièce basique de X , et si M est un voisinage filtrant de K , alors le triplet $(M, X|_M, K)$ est un voisinage filtrant abstrait. Si (M, X, K) est un voisinage filtrant abstrait, on définit les bords d'entrée et de sortie $\partial^u M$ et $\partial^s M$, les projections P_M^u et P_M^s , et les fonctions ψ_M^u et ψ_M^s exactement de la même manière que dans la sous-partie 3.3. Enfin, le lemme 3.14 et le corollaire 3.15 restent valables pour un voisinage filtrant abstrait.

4 Les surfaces à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ et $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$

4.1 Définition de la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$

On considère un voisinage filtrant abstrait (M, X, K) , une section locale S de K , et une partition de Markov essentielle \mathcal{R} de K tracée sur la section locale S . On note f l'application de premier retour sur S . On note R_1, \dots, R_n les rectangles de la partition \mathcal{R} . On note $R = R_1 \cup \dots \cup R_n$, et $R^u = \text{adh}(R \setminus f^{-1}(R))$. Le but de cette sous-partie est de définir une surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$, équivalente à la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$, et naturellement plongée dans $\partial^u M$.

Lemme 4.1 *Pour tout point x de R^u , l'orbite positive de x a au plus un retour dans R .*

Preuve L'ensemble R^u est l'union des ensembles $R \setminus f^{-1}(R)$ et $R \cap f^{-1}(\partial^s R)$. Si x est dans $R \setminus f^{-1}(R)$, alors l'orbite positive de x n'a aucun retour dans R , car la partition \mathcal{R} est essentielle. Si x est dans $R \cap f^{-1}(\partial^s R)$, alors $f(x)$ est dans $\partial^s R \subset R \setminus f^{-1}(R)$; l'orbite positive de $f(x)$ n'a donc aucun retour dans R ; autrement dit, l'orbite positive de x a un seul retour dans R . \triangle

Corollaire 4.2 *Pour tout point x de R^u , l'orbite (positive) de x intersecte $\partial^u M$.*

Preuve Par l'absurde: on suppose l'existence d'un point $x \in R^u$ dont l'orbite positive n'intersecte pas $\partial^u M$. Alors, l'ensemble ω -limite de x contient une orbite de K . Par suite, l'orbite positive de x a une infinité de retours dans R , ce qui contredit le lemme 4.1. \triangle

Le corollaire 4.2 implique que la projection P_M^u est définie en tout point de R^u .

Proposition 4.3 *L'application $Id : R^u \rightarrow R^u$ induit un homéomorphisme de la surface compacte à bord $\Sigma^u(\mathcal{R}, f) = \Pi^u(R^u)$ sur l'ensemble $P_M^u(R^u)$*

Preuve Considérons deux points distincts $x, y \in R^u$. Si $\Pi^u(x) = \Pi^u(y)$, alors on a $x = f(y)$ ou $y = f(x)$, ce qui implique $P_M^u(x) = P_M^u(y)$. Réciproquement, si $P_M^u(x) = P_M^u(y)$, alors x et y sont sur une même orbite de X ; d'après le lemme 4.1, on a nécessairement $x = f(y)$ ou $y = f(x)$, ce qui implique $\Pi^u(x) = \Pi^u(y)$. On en déduit que l'application $Id : R^u \rightarrow R^u$ induit une bijection de $P_M^u(R^u)$ sur $\Pi^u(R^u)$. Cette bijection est un homéomorphisme, car les projections P_M^u et Π^u sont des homéomorphismes locaux en tout point de R^u . \triangle

Définition de la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$. On note $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M) = P_M^u(R^u)$; autrement dit, $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ est l'intersection de l'orbite de l'ensemble R^u avec la surface $\partial^u M$. La proposition 4.3 fournit un homéomorphisme de $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ sur $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$, qui permet de munir $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ d'une structure de surface à arcs marqués telle que:

- les surfaces à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ et $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ sont équivalentes,
- les arcs marqués de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ sont les images par P_M^u des composantes connexes de $\partial^s R$,
- l'orientation de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ est l'image par P_M^u de l'orientation dynamique des rectangles R_1, \dots, R_n , et l'orientation des arcs marqués de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ est l'image par P_M^u de l'orientation du bord des rectangles R_1, \dots, R_n .

Notation 4.4 *On notera h_M^u l'inclusion de la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ dans $\partial^u M$.*

Définition 4.5 *Considérons des courbes fermées simples $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$, deux à deux disjointes, tracées sur $\partial^u M$. On dira que ces courbes encerclent la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ dans $\partial^u M$ si $h_M^u, \gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$ est un encerclement de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ dans $\partial^u M$.*

Le corollaire 4.7 ci-dessous indique quelques propriétés utiles de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$:

Lemme 4.6 *Soit x un point de R . Si l'orbite positive de x sort de M (i.e. rencontre la surface $\partial^u M$), alors l'orbite positive de x rencontre l'ensemble R^u .*

Preuve Soit $n = \sup\{i \in \mathbb{N} \mid f^i(x) \text{ est défini et } f^i(x) \in R\}$. Si $n = +\infty$, alors l'orbite positive de x ne sort pas de M . Si n est fini, alors le point $f^n(x)$ appartient à $(R \setminus f^{-1}(R)) \subset R^u$. \triangle

Corollaire 4.7

(i) La surface à bord $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ est l'intersection de l'orbite de l'ensemble R avec $\partial^u M$; autrement dit, on a l'égalité $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M) = P_M^u(R)$.

(ii) La surface à bord $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ est un voisinage de $W^u(K) \cap \partial^u M$ dans $\partial^u M$.

(iii) Si M est connexe, alors aucune composante connexe de $\partial^u M$ n'est disjointe de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$

Preuve Le point (i) découle immédiatement de l'égalité $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M) = P_M^u(R^u)$ et du lemme 4.6. Par définition d'une partition de Markov, l'orbite de R est un voisinage invariant de K , donc de $W^u(K)$, dans M ; en utilisant le point (i), on en déduit le point (ii). Enfin, le point (iii) découle du point (ii) et du corollaire 3.15. \triangle

4.2 Ponts, tours et cycles de tours de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$

On conserve les notations de la sous-partie 4.1. Par définition, la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ est l'image de l'ensemble R^u par la projection P_M^u ; le but de cette sous-partie est d'étudier la disposition relative, dans $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$, des images des différentes composantes connexes de R^u . On rappelle que les composantes connexes de R^u sont des sous-rectangles horizontaux des rectangles R_1, \dots, R_n , et que le bord stable de R^u est la réunion de $\partial^s R$ et de $f^{-1}(\partial^s R) \cap R$.

Définitions 4.8 Soit H une composante connexe de R^u ; on note δ_1, δ_2 les côtés stables de H . Quitte à échanger δ_1 et δ_2 , deux cas sont possibles :

— si δ_1 est une composante connexe de $\partial^s R$ et δ_2 est une composante connexe de $f^{-1}(\partial^s R) \cap R$, alors on dira que $P_M^u(H)$ est une tour, on dira que l'arc $P_M^u(\delta_1)$ est le toit de cette tour, et on dira que l'arc $P_M^u(\delta_2)$ est le pied de cette tour.

— si δ_1 et δ_2 sont deux composantes connexes de $f^{-1}(\partial^s R) \cap R$, alors on dira que $P_M^u(H)$ est un pont, et on dira que les arcs $P_M^u(\delta_1)$ et $P_M^u(\delta_2)$ sont les pieds de ce pont.

Remarques 4.9

— Par définition, les toits des tours de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ sont les arcs marqués de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$. En particulier, les toits des tours de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ sont orientés.

— Les pieds des ponts et des tours de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ sont inclus dans les toits des tours (ceci traduit l'inclusion $P_M^u(f^{-1}(\partial^s R) \cap R) \subset P_M^u(\partial^s R)$).

— Tout pont P de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ est homéomorphe à une composante connexe de R^u (en effet : si un point de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ a deux préimages par P_M^u , alors l'une de ces préimages est un point de $\partial^s R$, et l'autre est un point de $f^{-1}(\partial^s R) \cap R$).

— Une tour T de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ est homéomorphe à une composante connexe de R^u , sauf si le pied de T est inclus dans le toit de T (la justification est la même que celle du point précédent).

Définition 4.10 Un cycle de tours est une union finie de tours $C = T_1 \cup \dots \cup T_n$, telles que le pied de T_{i+1} est inclus dans le toit de T_i pour tout $i \leq n-1$, et le pied de T_1 est inclus dans le toit de T_n (figure 5). Une âme d'un cycle de tours $C = T_1 \cup \dots \cup T_n$ est une courbe fermée simple, tracée sur C , qui intersecte le toit de la tour T_i en un point et un seul, pour tout $i \leq n$.

Le lemme technique suivant aura de nombreuses conséquences (voir proposition 4.13) :

Lemme 4.11 On considère une tour T de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$. On note δ le toit de la tour T , et x un point de δ . On considère, au point x , un vecteur u_1 tangent à δ , dirigé suivant l'orientation de δ , et un vecteur u_2 transverse à δ pointant vers l'intérieur de la tour T . Alors (u_1, u_2) est une base directe pour l'orientation de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ (figure 5).

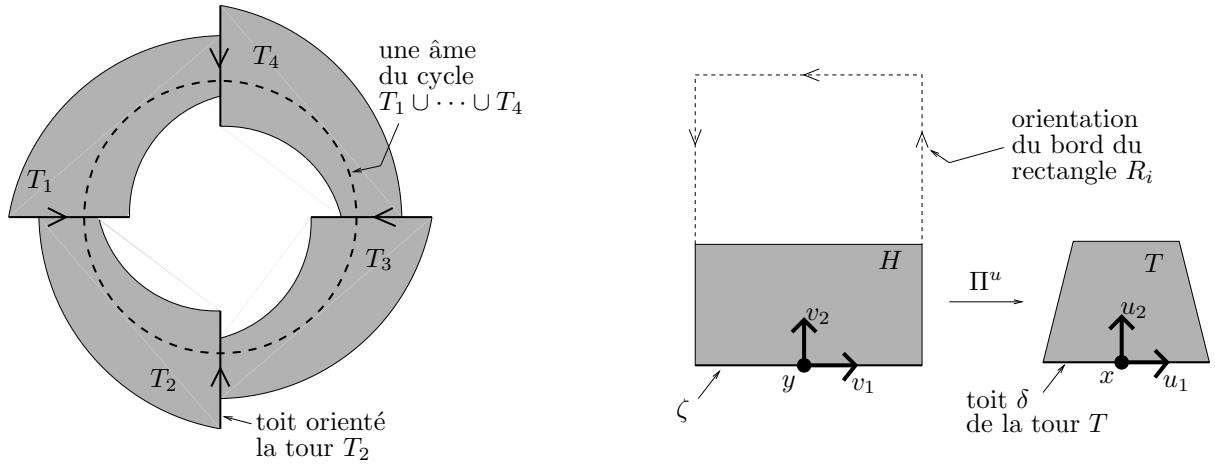


FIG. 5 – À gauche, un cycle de quatre tours. À droite, illustration de la preuve du lemme 4.11.

Preuve La tour T est l'image par P_M^u d'une composante connexe H de l'ensemble R^u . Plus précisément, H est sous-rectangle horizontal d'un rectangle R_i , un des côtés stables ζ de H est un côté stable du rectangle R_i , et on a $\delta = P_M^u(\zeta)$. On note y le point de l'arc ζ tel que $x = P_M^u(y)$. Le tiré en arrière de u_1 par P_M^u est un vecteur v_1 tangent à ζ en y , dirigé suivant l'orientation du bord de R_i (par définition de l'orientation des toits des tours, *i.e.* des arcs marqués, de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$). Le tiré en arrière de u_2 est un vecteur v_2 transverse à ζ , pointant vers l'intérieur de R_i . Par définition de l'orientation du bord d'une surface orientée, (v_1, v_2) est une base directe pour l'orientation du rectangle R_i . Le lemme en découle. \triangle

Corollaire 4.12 Soit $C = T_1 \cup \dots \cup T_n$ un cycle de tours et γ une âme de C . Alors, les toits orientés des tours T_1, \dots, T_n coupent tous γ selon la même orientation.

Proposition 4.13 On suppose données des courbes fermées simples deux à deux disjointes $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$ qui encerclent la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ dans $\partial^u M$. On suppose de plus, que le voisinage filtrant M est connexe, et que chacune des courbes $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$ rencontre $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$. On munit les courbes $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$ de l'orientation induite par les orientations des arcs marqués de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$. Alors :

- (a) Une âme d'un cycle de tours de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ n'est jamais homologue à 0 dans $\partial^u M$.
- (b) Toute composante connexe de $\partial^u M$ porte un cycle de tours de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$
- (c) Soit i un entier tel que la courbe γ_i^u borde un disque $\Delta_i^u \subset \partial^u M$, et T_0 une tour dont le toit est inclus dans la courbe γ_i^u . Alors, la tour T_0 est disjointe de l'intérieur du disque Δ_i^u .

On suppose de plus, que toutes les composantes connexes de $\partial^u M$ sont des tores. Alors :

- (d) Si la courbe γ_i^u coupe l'âme d'un cycle de tours de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$, alors elle n'est pas homologue à 0 dans $\partial^u M$.
- (e) Si la courbe γ_i^u n'est pas homologue à 0 dans $\partial^u M$, alors elle coupe les âmes de tous les cycles de tours de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$, qui sont sur la même composante connexe de $\partial^u M$ qu'elle.
- (f) Si les courbes γ_i^u et γ_j^u sont tracées sur la même composante connexe de $\partial^u M$, et si aucune de ces deux courbes n'est homologue à 0 dans $\partial^u M$, alors les courbes orientées γ_i^u et γ_j^u sont homologues dans $\partial^u M$.

Preuve

(a) Soit γ une âme d'un cycle de tours de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$. L'union des courbes $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$ contient les toits de toutes les tours de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$, donc il existe un indice $i \leq p$ tel que la courbe γ_i^u coupe l'âme γ . De plus, les orientations des toits des tours de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ sont cohérentes le long de la courbe γ_i^u ; en utilisant le corollaire 4.12, on en déduit que γ_i^u coupe toujours γ selon la même orientation; par suite, le nombre algébrique d'intersections de γ_i^u avec γ est non-nul.

(b) Toute composante connexe F de $\partial^u M$ rencontre $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ (corollaire 4.7) donc contient soit un pont P_0 , soit une tour T_0 de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$. Chaque pied du pont P_0 ou de la tour T_0 est inclus dans le toit d'une tour T_1 . Le pied de la tour T_1 est lui-même inclus dans le toit d'une tour T_2 , etc. Par récurrence, on construit une suite de tours incluses dans F . Par finitude du nombre de tours, cette suite est pré-périodique, ce qui entraîne (b).

(c) L'intersection de la courbe γ_i^u avec la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ est une union de toits de tours de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$. En particulier, la courbe γ_i^u n'intersecte l'intérieur d'aucune tour. On en déduit la dichotomie suivante: pour toute tour T , soit la tour T est incluse dans le disque fermé Δ_i^u , soit la tour T est disjointe de l'intérieur du disque Δ_i^u (dichotomie (\star)).

On raisonne maintenant par l'absurde: on suppose que la tour T_0 est incluse dans le disque fermé Δ_i^u . Comme les orientations des toits des tours sont cohérentes le long de la courbe γ_i^u , le lemme 4.11 implique alors que: pour toute tour T dont le toit est inclus dans la courbe γ_i^u , la tour T est incluse dans le disque fermé Δ_i^u (propriété $(\star\star)$).

De la dichotomie (\star) et la propriété $(\star\star)$, on déduit: si le toit d'une tour T est inclus dans le disque fermé Δ_i^u , alors la tour T est incluse dans le disque Δ_i^u (propriété $(\star\star\star)$).

On construit alors une suite de tours de la manière suivante. Par hypothèse, la tour T_0 est incluse dans le disque fermé Δ_i^u . Le pied de la tour T_0 est inclus dans le toit d'une tour T_1 , et la propriété $(\star\star\star)$ implique que la tour T_1 est incluse dans le disque Δ_i^u . Le pied de la tour T_1 est inclus dans le toit d'une tour T_2 , etc. Comme les tours sont en nombre fini, la suite de tours que l'on construit est pré-périodique; autrement dit, on obtient un cycle de tours inclus dans le disque Δ_i^u . Ceci constitue une contradiction avec le point (a). L'hypothèse est donc absurde; autrement dit, la tour T_0 est disjointe de l'intérieur du disque Δ_i^u .

(d) Si la courbe γ_i^u coupe l'âme γ d'un cycle de tours de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$, alors l'argument de la preuve du point (a) prouve que le nombre algébrique d'intersections de γ avec γ_i^u est non-nul.

(e) On note F la composante connexe de $\partial^u M$ sur laquelle est tracée la courbe γ_i^u . On suppose que la courbe γ_i^u ne coupe pas l'âme γ d'un cycle de tours C inclus dans F . L'argument de la preuve du point (a) prouve l'existence d'un indice $j \neq i$ tel que le nombre algébrique d'intersections de la courbe γ_j^u avec l'âme γ est non-nul. On a alors la situation suivante: (i) les courbes γ , γ_i^u et γ_j^u sont toutes trois tracées sur le tore F ; (ii) le nombre algébrique d'intersections de la courbe γ avec la courbe γ_j^u est non-nul; (iii) la courbe γ_i^u est disjointe des courbes γ et γ_j^u . Cette situation implique que la courbe γ_j^u est homologue à 0 dans le tore F .

(f) On considère deux entiers distincts i, j tels que les courbes γ_i^u et γ_j^u sont tracées sur une même composante connexe F de $\partial^u M$ et ne sont pas homologues à 0 dans F . Les courbes orientées γ_i^u et γ_j^u sont soit dans la même classe d'homologie, soit dans des classes d'homologie opposées (car ce sont deux courbes disjointes, tracées sur le tore F , et toutes deux non-homologues à 0 dans F). On note alors γ une âme d'un cycle de tours inclus dans F (il en existe un d'après (b)). D'après (e), les courbes γ_i^u et γ_j^u coupent toutes deux l'âme γ . D'après le corollaire 4.12, elles coupent γ selon la même orientation. On en déduit que les courbes orientées γ_i^u et γ_j^u ne peuvent pas être dans des classes d'homologie opposées, ce qui achève la preuve de (f). \triangle

4.3 La surface à arcs marqués $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$

On conserve les notations de la partie 4.1. On va définir une surface à arcs marqués $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$ plongée dans le bord d'entrée $\partial^s M$ de M :

Définition de la surface à arcs marqués $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$. On note $R^s = \text{adh}(R \setminus f(R))$. La surface $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$ est l'image par la projection P_M^s de l'ensemble R^s . On munit cette surface de l'image par P_M^s de l'orientation des rectangles R_1, \dots, R_n . Les arcs marqués de la surface $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$ sont les images par P_M^s des composantes connexes de $\partial^u R$. Ils sont munis de l'image par P_M^s de l'orientation du bord des rectangles R_1, \dots, R_n .

Remarque 4.14 Considérons le champ de vecteurs $\widehat{X} = -X$. On vérifie très facilement que \widehat{X} est un champ de Smale et que K est une pièce basique selle de \widehat{X} . On vérifie tout aussi facilement que M est encore un voisinage filtrant de K , et que \mathcal{R} est encore une partition de Markov essentielle de K , lorsque K est considérée comme une pièce basique de \widehat{X} . On a alors les égalités $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M) = \Sigma^u(\mathcal{R}, \widehat{X}, M)$ et $\Sigma^s(\mathcal{R}, \widehat{X}, M) = \Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$.

On notera h_M^s l'inclusion de la surface à arcs marqués $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$ dans $\partial^s M$. On a bien sûr un analogue du corollaire 4.7. On peut définir les notions de tours, ponts, cycles de tours, etc. de la surface $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$; on a alors un énoncé analogue à la proposition 4.13.

4.4 Ajustement du temps mis par les orbites pour aller de R^u à $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$

On considère un champ de Smale X sur une variété \mathcal{M} , une pièce basique selle K de X , une partition de Markov essentielle \mathcal{R} de K et un voisinage filtrant M de K . On rappelle que $\psi_M^u(x)$ désigne le temps mis par l'orbite d'un point x pour aller de x à $P_M^u(x)$. La proposition technique suivante permet, en déplaçant $\partial^u M$ le long des orbites de X , d'ajuster la valeur de la fonction ψ_M^u en restriction à l'ensemble R^u :

Proposition 4.15 *On suppose que l'application de retour f coïncide avec le temps 1 du flot de X . On considère alors une fonction lisse $\tilde{\psi} : R^u \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que*

$$\tilde{\psi}(f(x)) = \tilde{\psi}(x) - 1 \quad \text{et} \quad d\tilde{\psi}_x = d\tilde{\psi}_{f(x)} \circ df_x \quad \text{pour tout } x \in R \cap f^{-1}(\partial^s R) \quad (\star)$$

Alors, il existe un voisinage filtrant \widetilde{M} de K , obtenu à partir de M en déplaçant $\partial^u M$ le long des orbites de X , tel que $\psi_{\widetilde{M}}^u(x) = \tilde{\psi}(x)$ pour tout $x \in R^u$.

Preuve On définit une fonction $\varphi : \Sigma^u(\mathcal{R}, X, M) \rightarrow \mathbb{R}$ de la façon suivante: pour tout point $y \in \Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$, on choisit un point $x \in R^u$ tel que $y = P_M^u(x)$ et on pose

$$\varphi(y) = \tilde{\psi}(x) - \psi_M^u(x).$$

La valeur du réel $\varphi(y)$ ainsi défini ne dépend pas du choix du point x . En effet: si x_1 et x_2 sont deux points distincts de R^u tels que $P_M^u(x_1) = P_M^u(x_2) = y$, alors, quitte à échanger x_1 et x_2 , on a $x_1 \in R \cap f^{-1}(\partial^s R)$ et $x_2 = f(x_1) = X^1(x_1)$ (voir lemme 4.1); on a alors $\psi_M^u(x_2) = \psi_M^u(x_1) - 1$ et $\tilde{\psi}(x_2) = \tilde{\psi}(x_1) - 1$ (hypothèse (\star)), ce qui implique $\tilde{\psi}(x_1) - \psi_M^u(x_1) = \tilde{\psi}(x_2) - \psi_M^u(x_2)$.

En utilisant l'hypothèse (\star) , on vérifie aisément que la fonction φ est continument différentiable. Par ailleurs, la positivité de la fonction $\tilde{\psi}$ implique que, pour tout point $y \in \Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$, le segment d'orbite qui joint y à $\varphi(y)$ est disjoint de la surface $\partial^s M$. Par conséquent, on peut prolonger la fonction φ en une fonction lisse $\bar{\varphi} : \partial^u M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout point $y \in \partial^u M$, le segment d'orbite qui joint y à $\bar{\varphi}(y)$ est disjoint de la surface $\partial^s M$.

On note maintenant \widetilde{M} le voisinage filtrant obtenu à partir de M en déplaçant $\partial^u M$ le long des orbites de X pendant le temps $\bar{\varphi}$ (définition 3.12). Pour tout $x \in R^u$, on a alors

$$\psi_{\widetilde{M}}^u(x) = \psi_M^u(x) + \varphi(P_M^u(x)) = \tilde{\psi}(x)$$

(la première égalité résulte de la remarque 3.13, la seconde résulte de la définition de φ). \triangle

Bien entendu, il existe un énoncé analogue à celui de la proposition 4.15, mais concernant l'ensemble R^s et la fonction ψ_M^s , au lieu de l'ensemble R^u et la fonction ψ_M^u .

5 Si le type géométrique de (\mathcal{R}_0, f_0) est réalisable, alors $\Sigma^u(\mathcal{R}_0, f_0)$ peut être encerclée dans des tores

Le but de cette partie est de prouver l'implication $1 \implies 2$ du théorème 1bis. Autrement dit, on considère une partition de Markov abstraite (\mathcal{R}_0, f_0) dont le type géométrique T est réalisable, et on doit prouver que la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}_0, f_0)$ peut être encerclée dans des tores.

Puisque le type géométrique T est réalisable, il existe une surface compacte orientée S , un difféomorphisme de Smale f préservant l'orientation de S , et une pièce basique selle Λ de f , tel que Λ admet une partition de Markov \mathcal{R} de type géométrique T . On considère la suspension du difféomorphisme f : c'est un champ de Smale X sur une 3-variété compacte orientée \mathcal{M} . La surface S peut être vue comme une section globale du champ X , et le difféomorphisme f comme l'application de premier retour des orbites de X sur la section S . On note K la pièce basique selle du champ X telle que $K \cap S = \Lambda$; alors, \mathcal{R} peut être vue comme une partition de Markov de K , tracée sur la section S . Enfin, on considère un voisinage filtrant M de la pièce basique K .

Remarque 5.1 La partition de Markov \mathcal{R} est tracée sur une section globale du champ X ; par suite, c'est une partition de Markov essentielle (voir [4, proposition 5.5.1]).

Proposition 5.2 *Toutes les composantes connexes de la surface $\partial^u M$ sont des tores.*

Preuve On considère une composante connexe F de $\partial^u M$, et on note E l'ensemble des points de la section globale S dont l'orbite coupe F . On va montrer que la projection $P_M^u : E \rightarrow F$ est un revêtement cyclique d'ordre infini.

On considère un point $y \in F$ et un point $x_0 \in E$ tel que $P_M^u(x_0) = y$. Les surfaces S et F sont transverses au champ X ; on en déduit l'existence d'un voisinage U_0 du point x_0 dans la section S , tel que la projection P_M^u est définie et continue en tout point de U_0 . On note $V = P_M^u(U_0)$. La propriété suivante est alors clairement vérifiée :

(i) V est un voisinage de y , et on a l'égalité $\{x \in E \mid P_M^u(x) \in V\} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(U_0)$.

Le point x_0 est errant (remarque 3.10); quitte à remplacer U_0 par un voisinage plus petit, on peut donc supposer que la propriété suivante est vérifiée :

(ii) si i et j sont deux entiers distincts, alors $f^i(U_0)$ est disjoint de $f^j(U_0)$.

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la projection P_M^u est définie et continue en tout point de $f^i(U_0)$ (par construction de U_0). D'autre part, la propriété (ii) implique que la projection P_M^u est injective en restriction à $f^i(U_0)$. Par conséquent, quitte à supposer U_i compact, on a la propriété suivante :

(iii) pour tout $i \in \mathbb{Z}$, l'application $P_M^u : f^i(U_0) \rightarrow V$ est un homéomorphisme.

Les propriétés (i), (ii) et (iii) impliquent que la projection $P_M^u : E \rightarrow F$ est un revêtement cyclique d'ordre infini. Par conséquent, F est une surface compacte connexe orientable sans bord, qui admet un revêtement cyclique d'ordre infini dont l'espace total est inclus dans une surface compacte; ceci implique que F est un tore. \triangle

Proposition 5.3 *Il existe des courbes fermées simples deux à deux disjointes $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$ tracées sur $\partial^u M$, qui encerclent la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ dans $\partial^u M$.*

Preuve Nous allons construire un nouveau voisinage filtrant \widetilde{M} de K , et des courbes $\widetilde{\gamma}_1^u, \dots, \widetilde{\gamma}_n^u$ qui encerclent la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, \widetilde{M})$ dans $\partial^u \widetilde{M}$. Le voisinage filtrant \widetilde{M} sera obtenu en déplaçant $\partial^u M$ le long des orbites de X . La proposition en découlera.

Quitte à multiplier le champ X par une fonction continue strictement positive, on supposera que l'application de premier retour f coïncide avec le temps 1 du flot de X .

Étape 1. Construction du voisinage filtrant \widetilde{M} .

On considère une fonction lisse $\widetilde{\psi} : R^u \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui satisfait les propriétés suivantes :

(i) $\widetilde{\psi}(x) = 1$ pour tout $x \in \partial^s R$, et $\widetilde{\psi}(x) = 2$ pour tout $x \in f^{-1}(\partial^s R) \cap R$,

(ii) $1 < \widetilde{\psi}(x) < 2$ pour tout $x \in R^u \setminus (\partial^s R \cup f^{-1}(\partial^s R))$

(iii) l'application $d\widetilde{\psi}_x$ est non-nulle en tout point de $x \in \partial^s R$,

(iv) $d\widetilde{\psi}_x = d\widetilde{\psi}_{f(x)} \circ df_x$ pour tout point $x \in R \cap f^{-1}(\partial^s R)$.

(l'existence d'une telle fonction $\tilde{\psi}$ est claire). La fonction $\tilde{\psi}$ ainsi définie satisfait les hypothèses de la proposition 4.15 ; par conséquent, il existe un voisinage filtrant \widetilde{M} , obtenu à partir de M en déplaçant $\partial^u M$ le long des orbites de X , et tel que $\psi_{\widetilde{M}}^u(x) = \tilde{\psi}(x)$ pour tout $x \in R^u$.

Étape 2. Propriétés du voisinage filtrant \widetilde{M} et des arcs marqués de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, \widetilde{M})$.

Par définition, les arcs marqués de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, \widetilde{M})$ sont les images des composantes connexes de $\partial^s R$ par la projection $P_{\widetilde{M}}^u$. Or, la propriété (i) implique que la projection $P_{\widetilde{M}}^u$ coïncide avec le temps 1 du flot de X en tout point de $\partial^s R$. Par ailleurs, le temps 1 du flot de X coïncide avec le difféomorphisme de premier retour f . On en déduit la propriété suivante :

(v) les arcs marqués de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, \widetilde{M})$ sont les images par f des composantes de $\partial^s R$.

D'après les propriétés (i) et (ii), la fonction $\psi_{\widetilde{M}}^u$ est supérieure à 1 en tout point de R^u . D'après le lemme 4.6, ceci implique que la fonction $\psi_{\widetilde{M}}^u$ est en fait supérieure à 1 en tout point de R . Comme le difféomorphisme de premier retour f coïncide avec le temps 1 du flot de X , on en déduit la propriété suivante :

(vi) les rectangles $f(R_1), \dots, f(R_n)$ sont inclus dans le voisinage filtrant \widetilde{M} .

Étape 3. Intersection de la section globale S avec la surface à arc marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, \widetilde{M})$.

Pour tout $x \in R^u$, les équivalences suivantes sont vérifiées :

$$P_{\widetilde{M}}^u(x) \in S \iff \psi_{\widetilde{M}}^u(x) \in \mathbb{Z} \iff x \in \partial^s R \cup (f^{-1}(\partial^s R) \cap R)$$

(la première équivalence provient du fait que le difféomorphisme de retour f sur la section S coïncide avec le temps 1 du flot de X ; la seconde équivalence découle des propriétés (i) et (ii)).

Les équivalences ci-dessus, et l'égalité $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, \widetilde{M}) = P_{\widetilde{M}}^u(R^u)$ impliquent :

$$S \cap \Sigma^u(\mathcal{R}, X, \widetilde{M}) = P_{\widetilde{M}}^u(\partial^s R \cup (f^{-1}(\partial^s R) \cap R)) = P_{\widetilde{M}}^u(\partial^s R).$$

Autrement dit, l'intersection de la section S avec la surface à bord $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, \widetilde{M})$ est égale à l'union $P_{\widetilde{M}}^u(\partial^s R)$ des arcs marqués de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, \widetilde{M})$.

Étape 4. Construction des courbes $\tilde{\gamma}_1^u, \dots, \tilde{\gamma}_p^u$; intersection de ces courbes avec $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, \widetilde{M})$.

La propriété (iv) implique que la surface à bord $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, \widetilde{M})$ est transverse à la section S . Par conséquent, on peut rendre la surface $\partial^u \widetilde{M}$ transverse à la section S , en utilisant une perturbation le plongement de la surface $\partial^u \widetilde{M}$ qui laisse fixe la sous-surface à bord $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, \widetilde{M})$; on préserve ainsi les propriétés (v) et (vi), ainsi que l'intersection de S avec $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, \widetilde{M})$.

Les surfaces compactes sans bord S et $\partial^u \widetilde{M}$ étant maintenant transverses, leur intersection est constituée d'un nombre fini de courbes fermées simples deux à deux disjointes, que l'on note $\tilde{\gamma}_1^u, \dots, \tilde{\gamma}_p^u$. L'intersection de l'union de ces courbes $\tilde{\gamma}_1^u, \dots, \tilde{\gamma}_p^u$ avec la sous-surface à bord $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, \widetilde{M})$ est égale à l'intersection de la section S avec $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, \widetilde{M})$, c'est-à-dire égale à l'union des arcs marqués de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, \widetilde{M})$ (d'après l'étape 3).

Étape 5. Cohérence des orientations des arcs marqués de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, \widetilde{M})$.

On fixe un entier $i \leq p$ et on considère un arc marqué δ de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, \widetilde{M})$ tel que $\delta \subset \tilde{\gamma}_i^u$. On note S_0 l'intersection de la surface S et du voisinage filtrant \widetilde{M} ; en particulier, S_0 est une sous-surface à bord de la surface S , et la courbe $\tilde{\gamma}_i^u$ est une composante du bord de S_0 .

D'après la propriété (v), il existe un entier $j \leq n$ tel que l'arc marqué δ est inclus dans bord du rectangle $f(R_j)$. Le rectangle $f(R_j)$ est orienté grâce à l'orientation dynamique de la section S . Par définition, l'orientation de δ en tant qu'arc marqué de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, \widetilde{M})$ coïncide avec l'orientation de δ en tant que sous-arc du bord du rectangle $f(R_j)$.

D'après la propriété (vi), le rectangle $f(R_j)$ est inclus dans la sous-surface $S_0 = S \cap \widetilde{M}$. Par suite, les orientations du bord du rectangle $f(R_j)$ et du bord de la sous-surface S_0 coïncident le long de l'arc δ . Autrement dit, l'orientation de la courbe $\tilde{\gamma}_i^u$ induite par l'orientation de l'arc marqué δ coïncide avec l'orientation de la courbe $\tilde{\gamma}_i^u$ en tant que composante du bord de la

sous-surface S_0 . Ceci implique en particulier, que les orientations des arcs marqués de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, \widetilde{M})$ sont cohérentes le long de la courbe $\widetilde{\gamma}_i^u$.

Étape 6. Fin de la preuve.

Les étapes 4 et 5 montrent que les courbes $\widetilde{\gamma}_1^u, \dots, \widetilde{\gamma}_p^u$ encerclent la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, \widetilde{M})$ dans $\partial^u \widetilde{M}$. Par ailleurs, le voisinage filtrant M s'obtient à partir du voisinage filtrant \widetilde{M} en déplaçant $\partial^u \widetilde{M}$ le long des orbites de X . En déplaçant de même les courbes $\widetilde{\gamma}_1^u, \dots, \widetilde{\gamma}_p^u$ le long des orbites de X , on obtient des courbes fermées simples deux à deux disjointes $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$ tracées sur $\partial^u M$ qui encerclent la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ dans $\partial^u M$. \triangle

Les propositions 5.2 et 5.3 prouvent que la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ peut être encerclée dans des tores. Par suite, il en est de même pour la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$, puis pour la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ (voir le lemme 2.4 et la remarque 2.3). On a ainsi prouvé l'implication $1 \implies 3$ du théorème 1bis.

6 Si on peut encercler la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}_0, f_0)$ dans des tores, alors le type géométrique de (\mathcal{R}_0, f_0) est réalisable

Le but de cette partie est de prouver l'implication $2 \implies 1$ du théorème 1bis. Autrement dit, on considère une partition de Markov abstraite transitive (\mathcal{R}_0, f_0) , telle que la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}_0, f_0)$ peut être encerclée dans des tores ; le but de la partie est de prouver que le type géométrique T de la partition de Markov abstraite (\mathcal{R}_0, f_0) est réalisable.

On utilisera la caractérisation des types géométriques réalisables énoncée au lemme 3.6. Plus précisément, on procèdera comme suit. On construira tout d'abord un voisinage filtrant abstrait (M, X, K) tel que la pièce basique K admet une partition de Markov \mathcal{R} de type géométrique T . On plongera alors la variété à bord M dans une variété compacte sans bord \mathcal{M} , et on prolongera le champ X en un champ de Smale défini sur \mathcal{M} . Enfin, on montrera l'existence d'une section globale S du champ de Smale X tel que la partition de Markov \mathcal{R} est tracée sur S , ce qui prouvera que le type géométrique T est réalisable (d'après le lemme 3.6)

6.1 Construction d'un voisinage filtrant abstrait (M, X, K) et de courbes $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$ qui encerclent la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ dans $\partial^u M$

Par hypothèse, il existe une surface F_0 dont toutes les composantes connexes sont des tores, et un encerclement $h_0, \gamma_{0,1}^u, \dots, \gamma_{0,p}^u$ de la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}_0, f_0)$ dans F_0 . La première étape de notre construction est la preuve de la proposition suivante :

Proposition 6.1 *Il existe un voisinage filtrant abstrait (M, X, K) tel que :*

- la pièce basique K admet une partition de Markov essentielle \mathcal{R} de type géométrique T ,
- les plongements $h_M^u : \Sigma^u(\mathcal{R}, X, M) \hookrightarrow \partial^u M$ et $h_0 : \Sigma^u(\mathcal{R}_0, f_0) \hookrightarrow F_0$ sont équivalents³.

Pour prouver cette proposition, on utilisera des opérations d'*attachements* et de *suppressions d'anses*, définies comme suit :

On suppose donnés une surface à arcs marqués Σ , une surface compacte orientable F_1 , un plongement de $h_1 : \Sigma \hookrightarrow F_1$, et deux courbes fermées simples disjointes $\beta_1, \beta'_1 \subset F_1 \setminus h_1(\Sigma)$ qui bordent des disques disjoints $\Delta_1, \Delta'_1 \subset F_1 \setminus h_1(\Sigma)$. On construit alors une surface compacte orientable F_2 de la façon suivante : on ôte à la surface F_1 les intérieurs des disques Δ_1 et Δ'_1 , puis on identifie les courbes β_1 et β'_1 . On a un plongement naturel i de l'ouvert $U_1 = F_1 \setminus (\Delta_1 \cup \Delta'_1)$ dans la surface F_2 , et le plongement $h_2 = i \circ h_1 : \Sigma \hookrightarrow F_2$ est bien défini à équivalence près. Enfin, on note β_2 la courbe de F_2 obtenu par identification des courbes β_1 et β'_1 (figure 6).

³ On rappelle que h_M^u désigne l'inclusion de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ dans $\partial^u M$ (notation 4.4), et que l'équivalence entre plongements s'entend au sens défini dans la sous-partie 2.1.

Avec ces notations, on dira que le plongement h_2 s'obtient à partir du plongement h_1 en attachant une anse sur les courbes β_1, β'_1 . Réciproquement, on dira que le plongement h_1 s'obtient à partir du plongement h_2 en supprimant l'anse associée à la courbe β_2 .

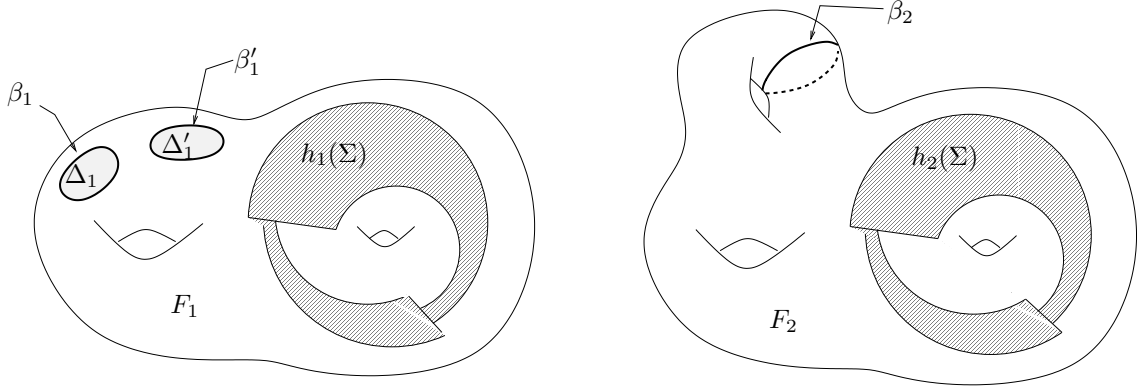


FIG. 6 – Le plongement $h_2 : \Sigma \hookrightarrow F_2$ est obtenu en attachant une anse au plongement $h_1 : \Sigma \hookrightarrow F_1$ sur les courbes β_1, β'_1 .

La preuve du lemme suivant n'utilise que des arguments basiques et classiques de topologie des surfaces ; on la laisse au lecteur :

Lemme 6.2 *Étant donné une surface à arcs marqués Σ , deux surfaces compactes sans bord F_1 et F_2 , et deux plongements $h_1 : \Sigma \hookrightarrow F_1$ et $h_2 : \Sigma \hookrightarrow F_2$, il existe une suite finie d'attachements et de suppressions d'anses qui transforme le plongement h_1 en un plongement équivalent à h_2 .*

Voici maintenant le lemme technique qui fait fonctionner la preuve de la proposition 6.1 :

Lemme 6.3 *On suppose donné un voisinage filtrant abstrait (M_1, X_1, K_1) tel que la pièce basique K_1 admet une partition de Markov essentielle \mathcal{R}_1 de type géométrique T . On considère alors un plongement $h_2 : \Sigma^u(\mathcal{R}_1, X_1, M_1) \hookrightarrow F_2$ obtenu en attachant ou en supprimant une anse à l'inclusion $h_{M_1}^u : \Sigma^u(\mathcal{R}_1, X_1, M_1) \hookrightarrow \partial^u M_1$.*

Alors, il existe un voisinage filtrant abstrait (M_2, X_2, K_2) , tel que la pièce basique K_2 admet une partition de Markov essentielle \mathcal{R}_2 de type géométrique T , et tel que l'inclusion $h_{M_2}^u : \Sigma^u(\mathcal{R}_2, X_2, M_2) \hookrightarrow F_2$ est équivalente au plongement h_2 .

Preuve On traite le cas où le plongement h_2 est obtenu en attachant une anse à l'inclusion $h_{M_1}^u$ (le cas où h_2 est obtenu en supprimant une anse se traite de même). On note $\beta_1, \beta'_1 \subset \partial^u M_1 \setminus \Sigma^u(\mathcal{R}_1, X_1, M_1)$ les courbes sur lesquelles on attache l'anse, et on note Δ_1, Δ'_1 les disques fermés de $\partial^u M_1 \setminus \Sigma^u(\mathcal{R}_1, X_1, M_1)$ bordés par les courbes β_1, β'_1 .

C'est le lemme 3.14 qui fait tout fonctionner. Ce lemme fournit un difféomorphisme g , de l'orbite de la courbe β_1 sur l'orbite de la courbe β'_1 , qui envoie orbite de X_1 sur orbite de X_1 . On construit alors une variété à bord M_2 de la façon suivante : on ôte à M_1 les orbites des intérieurs des disques Δ_1 et Δ'_1 , puis on identifie l'orbite de la courbe β_1 et l'orbite de la courbe β'_1 grâce au difféomorphisme g . Le champ X_1 induit un champ de vecteurs X_2 sur M_2 .

On note U_1 l'ouvert invariant de M_1 , obtenu en ôtant à M_1 les orbites des disques fermés Δ_1 et Δ'_1 . D'une part, U_1 contient la pièce basique K_1 et les rectangles de la partition \mathcal{R}_1 , car les disques Δ_1 et Δ'_1 sont disjoints de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}_1, X_1, M_1)$. D'autre part, on a un plongement naturel $i : U_1 \hookrightarrow M_2$ qui envoie orbite de X_1 sur orbite de X_2 . On note alors $K_2 = i(K_1)$, et $\mathcal{R}_2 = i(\mathcal{R}_1)$. On vérifie facilement que (M_2, X_2, K_2) est un voisinage filtrant abstrait et que \mathcal{R}_2 est une partition de Markov essentielle de type géométrique T de la pièce basique K_2 . Par construction, l'inclusion $h_{M_2}^u$ est obtenue en attachant une anse à l'inclusion $h_{M_1}^u$ sur les courbes β_1, β'_1 ; par conséquent, l'inclusion $h_{M_2}^u$ est équivalente au plongement h_2 . \triangle

Preuve de la proposition 6.1 Le théorème 3.4 fournit un voisinage filtrant abstrait (M_1, X_1, K_1) tel que la pièce basique K_1 admet une partition de Markov essentielle \mathcal{R}_1 de type géométrique T . D'après le lemme 6.2, on passe de l'inclusion $h_{M_1}^u : \Sigma^u(\mathcal{R}_1, X_1, M_1) \hookrightarrow \partial^u M_1$ au plongement $h_0 : \Sigma^u(\mathcal{R}_0, f_0) \hookrightarrow F_0$ par une suite finie d'attachements et de suppressions d'anses. Via le lemme 6.3, on en déduit l'existence d'un voisinage filtrant abstrait (M, X, K) , tel que la pièce basique K admet une partition de Markov essentielle \mathcal{R} de type géométrique T , et tel que l'inclusion $h_M^u : \Sigma^u(\mathcal{R}, X, M) \hookrightarrow \partial^u M$ est équivalente au plongement $h_0 : \Sigma^u(\mathcal{R}_0, f_0) \hookrightarrow F_0$. \triangle

Définition du voisinage filtrant (M, X, K) , de la partition \mathcal{R} et des courbes $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$. Dans la suite, on considère un voisinage filtrant abstrait (M, X, K) , et une partition de Markov essentielle \mathcal{R} de type géométrique T de la pièce basique K , fournis par la proposition 6.1.

On rappelle qu'il existe un encerclement $h_0, \gamma_{0,1}, \dots, \gamma_{0,p}$ de la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}_0, f_0)$ dans F_0 , et on rappelle que l'inclusion h_M^u est équivalente au plongement h_0 . Ceci implique l'existence de courbes fermées simples $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$ tracées sur $\partial^u M$ qui encerclent la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ dans $\partial^u M$ (remarque 2.3). Quitte à supprimer les composantes connexes de M qui sont disjointes de K , on supposera que M est connexe (remarque 3.8) et, quitte à supprimer certaines des courbes $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$, on supposera que toutes ces courbes intersectent la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$.

6.2 Construction de courbes $\gamma_1^s, \dots, \gamma_q^s$ qui encerclent $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$ dans $\partial^s M$

Nous allons maintenant construire des courbes fermées simples deux à deux disjointes $\gamma_1^s, \dots, \gamma_q^s$, tracées sur $\partial^s M$, qui encerclent la surface à arcs marqués $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$ dans $\partial^s M$.

Lemme 6.4 *La projection P_M^s réalise un difféomorphisme de la surface à bord $\partial^u M \setminus \text{int}(\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M))$ sur la surface à bord $\partial^s M \setminus \text{int}(\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M))$.*

Preuve On note $S^u = \partial^u M \setminus \text{int}(\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M))$ et $S^s = \partial^s M \setminus \text{int}(\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M))$. D'après le point (ii) du corollaire 4.7, la surface à bord S^u est disjointe de $W^u(K)$. Le lemme 3.14 implique alors que l'application P_M^u réalise un difféomorphisme de S^u sur $P_M^u(S^u)$. Enfin, l'égalité $P_M^u(S^u) = S^s$ découle de la remarque 4.14. \triangle

Définition des courbes $\gamma_1^s, \dots, \gamma_q^s$.

— Tout d'abord, on note $\alpha_1^u, \dots, \alpha_r^u$ les composantes connexes de l'union des courbes $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$ privée de l'intérieur des arcs marqués de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$. On remarque que les arcs $\alpha_1^u, \dots, \alpha_r^u$ sont aussi les composantes connexes de $(\gamma_1^u \cup \dots \cup \gamma_p^u) \setminus \text{int}(\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M))$.

— Pour tout $i \leq r$, on note alors $\alpha_i^s = P_M^s(\alpha_i^u)$ (c'est bien défini d'après le lemme 6.4).

— Enfin, on note $\gamma_1^s, \dots, \gamma_q^s$ les composantes connexes de la réunion des arcs $\alpha_1^s, \dots, \alpha_r^s$ et des arcs marqués de la surface $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$.

Proposition 6.5 *Pour tout $i \leq q$, γ_i^s est une courbe fermée simple. De plus, les courbes $\gamma_1^s, \dots, \gamma_q^s$ encerclent la surface à arcs marqués $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$ dans $\partial^s M$.*

Preuve

Étape 1. Points marqués des surfaces $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ et $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$.

On appelle *points marqués stables-instables* de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ les images, par P_M^u , des coins stables-instables des rectangles R_1, \dots, R_n . On définit de même les *points marqués instables-stables*. On définit les *points marqués stables-stables* et *instables-stables* de la surface $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$ en remplaçant la projection P_M^u par la projection P_M^s . On remarque alors que :

(i) L'image, par P_M^s , d'un point marqué stable-instable de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ est un point marqué stable-instable de la surface $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$ (idem pour un point marqué instable-stable).

(ii) Les points marqués de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ sont les extrémités des arcs marqués de cette surface. Plus précisément, tout arc marqué joint un point marqué instable-stable à un point marqué stable-instable, et est orienté du point instable-stable vers le point stable-instable.

(iii) Identique à (ii) en remplaçant $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ par $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$

Étape 2. Propriétés des arcs $\alpha_1^u, \dots, \alpha_k^u$.

Les courbes $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$ sont fermées simples deux à deux disjointes. On en déduit :

(a) Les arcs $\alpha_1^u, \dots, \alpha_r^u$ sont simples, deux à deux disjointes, d'intérieurs disjoints de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$.

Par ailleurs, l'intersection des courbes $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$ avec la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ est égale à l'union des arcs marqués de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$, et les orientations des arcs marqués de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ sont cohérentes le long des courbes $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$. En utilisant la propriété (ii), on en déduit :

(b) Pour tout $i \leq r$, l'arc α_i^u joint un point marqué stable-instable de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ à un point marqué instable-stable.

(c) Tout point marqué de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ est une extrémité d'un des arcs $\alpha_1^u, \dots, \alpha_r^u$.

Étape 3. Propriétés des arcs $\alpha_1^s, \dots, \alpha_r^s$.

D'après le lemme 6.4, l'application P_M^s induit un homéomorphisme de $\partial^u M \setminus \text{int}(\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M))$ sur $\partial^s M \setminus \text{int}(\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M))$; ceci permet de traduire la propriété (a) sous la forme (a') suivante :

(a') Les arcs $\alpha_1^s, \dots, \alpha_s^s$ sont simples, deux à deux disjointes, d'intérieurs disjoints de $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$.

La propriété (i) de l'étape 1 permet de traduire les propriétés (b) et (c) sous la forme suivantes :

(b') Pour tout $i \leq k$, l'arc α_i^s joint un point marqué stable-instable de la surface $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$ à un point marqué instable-stable de $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$.

(c') Tout point marqué de la surface $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$ est une extrémité d'un des arcs $\alpha_1^s, \dots, \alpha_k^s$.

Étape 4. Propriétés des courbes $\gamma_1^s, \dots, \gamma_q^s$.

Les propriétés (a'), (b') et (c') impliquent que γ_i^s est une courbe fermée simple pour tout $i \leq q$.

La propriété (a') implique de plus, que l'intersection de $\gamma_1^s \cup \dots \cup \gamma_q^s$ avec $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$ est égale à l'union des arcs marqués de la surface $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$. En utilisant la propriété (b') et la propriété (iii) de l'étape 1, on montre que, pour tout $i \leq q$, les orientations des arcs marqués de la surface $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$ sont cohérentes le long de la courbe γ_i^s , ce qui achève la preuve. \triangle

Proposition 6.6 *Toutes les composantes connexes de $\partial^s M$ sont des tores.*

Preuve Dans l'énoncé de la proposition 4.13, on peut bien sûr remplacer $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ par $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$, et remplacer $\partial^u M$ par $\partial^s M$; les points (a) et (b) de ce corollaire impliquent alors qu'aucune composante de $\partial^s M$ n'est une sphère (propriété (#)). Par ailleurs, le champ de vecteurs X est non-singulier et transverse au bord de M , donc les caractéristiques d'Euler des surfaces $\partial^s M$ et $\partial^u M$ sont égales. Or toutes les composantes de $\partial^u M$ sont des tores ; donc la caractéristique d'Euler de $\partial^s M$ est nulle (propriété (##)). Les propriétés (#) et (##) impliquent que toutes les composantes de $\partial^s M$ sont des tores. \triangle

6.3 Plongement de la variété à bord M dans une variété sans bord \mathcal{M}

Le but de cette sous-partie est de plonger la variété à bord M dans une variété sans bord \mathcal{M} , et de prolonger le champ X en un champ de Smale défini sur \mathcal{M} . La variété \mathcal{M} sera obtenue comme union de la variété à bord M et d'un nombre fini de tores pleins.

On appelle *tore plein puits* un couple (N, Y) où N est un tore plein orienté, et Y est un champ de vecteurs sur N , transverse au bord de N , tel que le maximal invariant $\bigcap_{t \in \mathbb{R}^+} Y^t(N)$ est une orbite hyperbolique puits. On définit de façon similaire la notion de *tore plein source*.

Si β est un méridien d'un tore plein puits (N, Y) , alors β borde un disque D transverse au champ Y . On munit ce disque D de son orientation dynamique (voir sous-partie 3.1). On appelle *orientation dynamique* du méridien β , l'orientation de β en tant que bord du disque orienté D ; l'autre orientation de β est dite *anti-dynamique*. Ces définitions ne dépendent pas du choix du disque D , car celui-ci est unique à isotopie parmi les disques transverses à Y près.

Définition de la variété \mathcal{M} et prolongement du champ X à \mathcal{M} . On note F_1, \dots, F_k les composantes connexes de $\partial^u M$, et G_1, \dots, G_l les composantes connexes de $\partial^s M$. On considère des tores pleins puits $(N_1, Y_1), \dots, (N_k, Y_k)$, et des tores pleins sources $(P_1, Z_1), \dots, (P_l, Z_l)$.

Soit $j \leq k$. Le point (f) de la proposition 4.13 permet de construire un difféomorphisme $f_j : F_j \rightarrow \partial N_j$ qui vérifie la propriété suivante : pour tout indice $i \leq p$ tel que la courbe γ_i^u est tracée sur le tore F_j et n'est pas homologue à 0 dans ce tore, la courbe γ_i^u est envoyée par f_j sur un méridien du tore plein N_j , et l'orientation de la courbe γ_i^u (induite par les orientations des arcs marqués de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$) est envoyée sur l'orientation anti-dynamique de ce méridien.

Pour tout $j \leq l$, on construit de même un difféomorphisme $g_j : G_j \rightarrow \partial P_j$.

On note alors \mathcal{M} la variété compacte sans bord obtenue en collant les tores pleins $N_1, \dots, N_k, P_1, \dots, P_l$ sur la variété à bord M , via les difféomorphismes $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_l$. La variété \mathcal{M} est munie d'un champ de vecteurs obtenu par recollement du champ X , et des champs $Y_1, \dots, Y_k, Z_1, \dots, Z_l$; on notera encore X ce champ de vecteurs.

Par construction, l'ensemble non-errant $\Omega(X)$ est la réunion de la pièce basique selle K et d'un nombre fini d'orbites hyperboliques puits et sources; en particulier, l'ensemble $\Omega(X)$ est hyperbolique et les orbites périodiques sont denses dans $\Omega(X)$. Par ailleurs, la transversalité des variétés invariantes des différentes orbites non-errantes de X est immédiate. On en déduit que X est un champ de Smale sur \mathcal{M} . Enfin, la variété à bord M est plongée dans la variété sans bord \mathcal{M} , et M est clairement un voisinage filtrant de K dans \mathcal{M} .

6.4 Ajustement de la longueur des certains segments d'orbites de X

Avant d'entamer la construction d'une section globale du champ X , on doit ajuster la valeur des fonction ψ_M^s et ψ_M^u en certains points; c'est ce que fait la proposition suivante :

Proposition 6.7 *Quitte à pousser $\partial^s M$ et $\partial^u M$ le long des orbites de X , on peut s'assurer des propriétés suivantes :*

- (i) *Pour tout point $x \in R^u$, le temps $\psi_M^u(x)$ que met l'orbite de x pour aller du point x au point $P_M^u(x)$ est supérieur ou égal à 1. Il est égal à 1 si et seulement si x appartient à $\partial^s R$.*
- (ii) *Pour tout point $x \in R^s$, le temps $|\psi_M^s(x)|$ que met l'orbite de x pour aller du point x au point $P_M^s(x)$ est supérieur ou égal à 1. Il est égal à 1 si et seulement si x appartient à $\partial^u R$.*
- (iii) *Pour tout point $x \in (\partial^s M \setminus W^s(K))$, le temps $\psi_M^u(x)$ que met l'orbite de x pour aller du point x au point $P_M^u(x)$ est supérieur ou égal à 2. Il est égal à 2 si x appartient à $\alpha_1^s \cup \dots \cup \alpha_r^s$.*

Schéma de preuve D'après la proposition 4.15, quitte pousser $\partial^s M$ et $\partial^u M$ le long des orbites de X , on peut supposer que les propriétés (i) et (ii) sont vérifiées.

Les propriétés (i) et (ii) impliquent alors automatiquement la propriété (iii) pour tout point $x \in (\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M) \setminus W^s(K))$: en effet, l'orbite positive d'un point $x \in (\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M) \setminus W^s(K))$ coupe d'abord la surface à bord R^s , puis la surface à bord R^u (lemme 4.6), avant d'aller couper la surface $\partial^u M$ au point $P_M^u(x)$. Par suite, on peut obtenir la propriété (iii) en déplaçant $\partial^s M$ le long des orbites de X , mais en laissant fixe la sous-surface $\Sigma^s(\mathcal{R}, X, M)$; une telle opération préserve clairement les propriétés (i) et (ii). \triangle

6.5 Construction de disques D_1^u, \dots, D_p^u bordés par les courbes $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$

On aborde la construction d'une section globale du champ X : on commence par construire des disques fermés D_1^u, \dots, D_p^u bordés par les courbes $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$, et transverses au champ X .

Proposition 6.8 *Les courbes $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$ bordent des disques fermés D_1^u, \dots, D_p^u plongés dans \mathcal{M} , deux à deux disjoints, transverses au champ X , et tels que :*

- *pour tout i , l'intérieur du disque D_i^u est disjoint du voisinage filtrant M ,*
- *l'union des disques D_1^u, \dots, D_p^u rencontre toutes les orbites périodiques puits de X .*

— si la courbe γ_i^u est homologue à 0 dans $\partial^u M$, alors le disque D_i^u est obtenu en déplaçant un disque $\Delta_i^u \subset \partial^u M$ le long des orbites de X .

Preuve Pour alléger la preuve, on supposera que $\partial^u M$ est connexe (sinon, il suffit de raisonner composante connexe par composante connexe). Alors, $\partial^u M$ est un tore qui borde un tore plein puits $(N, X|_N)$. On notera \mathcal{O} l'orbite périodique puits contenue dans N . Par ailleurs, quitte à réordonner les courbes $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$, on supposera que :

- pour $1 \leq i \leq l$, la courbe γ_i^u est homologue à 0 dans le tore $\partial^u M = \partial N$,
- pour $l+1 \leq i \leq p$, la courbe γ_i^u n'est pas homologue à 0 dans le tore $\partial^u M = \partial N$.

Étape 1. Construction de disques $\Delta_1^u, \dots, \Delta_l^u$.

Pour $i \leq l$, la courbe γ_i^u est homologue à 0 dans le tore $\partial^u M = \partial N$; elle borde donc un disque Δ_i^u inclus dans ce tore.

Étape 2. Construction des disques D_{l+1}^u, \dots, D_p^u .

Par construction de la variété \mathcal{M} , les courbes $\gamma_{l+1}^u, \dots, \gamma_p^u$ sont des méridiens deux à deux disjoints du tore plein N . Par conséquent, ces courbes bordent des disques $D_{l+1}^u, \dots, D_p^u \subset N$, deux à deux disjoints, transverses à X , qui coupent tous l'orbite périodique puits \mathcal{O} , et tels que, pour tout i , l'intérieur du disque D_i^u est inclus dans l'intérieur du tore plein N .

Étape 3. Positions relatives des disques $\Delta_1^u, \dots, \Delta_l^u, D_{l+1}^u, \dots, D_p^u$.

- Si $i, j \leq l$, alors les disques Δ_i^u et Δ_j^u sont soit disjoints, soit emboîtés l'un dans l'autre. En effet, ces disques sont inclus dans le tore $\partial^u M = \partial N$, et leurs bords sont disjoints.
- Si $i \leq l$ et $j \geq l+1$, alors les disques D_i^u et Δ_j^u sont disjoints. En effet, l'intérieur de D_i^u est disjoint de Δ_j^u d'après les inclusions $\text{int}(D_i^u) \subset \text{int}(N)$ et $\Delta_j^u \subset \partial N$, et la courbe $\gamma_i^u = \partial D_i^u$ ne peut pas être incluse dans Δ_j^u puisqu'elle n'est pas homologue à 0 dans $\partial^u M = \partial N$.
- Enfin, si $i, j \geq l+1$, alors les disques D_i^u et D_j^u sont disjoints par construction.

Étape 4. Construction des disques D_1^u, \dots, D_l^u .

Par construction, les disques $\Delta_1^u, \dots, \Delta_l^u$ sont inclus dans le tore $\partial^u M$. De plus, d'après l'étape 3, deux quelconques de ces disques sont, soit disjoints, soit emboîtés l'un dans l'autre. En déplaçant les disques $\Delta_1^u, \dots, \Delta_l^u$ le long des orbites de X de la manière suggérée par la figure 7, on obtient des disques D_1^u, \dots, D_l^u tels que :

- pour tout $i \leq l$, le disque D_i^u est bordé par la courbe γ_i^u , et l'intérieur de ce disque est inclus dans l'intérieur du tore plein N ,
- pour tout $i \leq l$, le disque D_i^u est obtenu en déplaçant Δ_i^u le long des orbites de X ,
- pour toute paire d'entiers distincts $i, j \leq l$, les disques D_i^u et D_j^u sont disjoints.

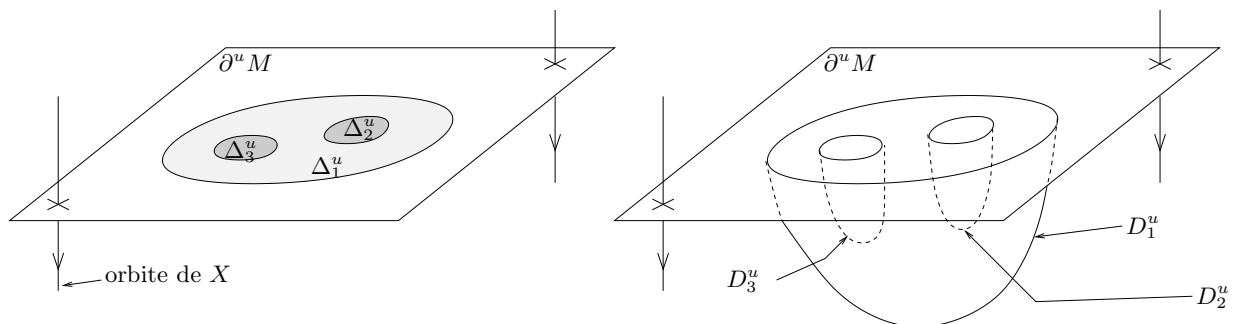


FIG. 7 — Construction des disques D_1^u, \dots, D_l^u , obtenus en déplaçant les disques $\Delta_1^u, \dots, \Delta_l^u$ le long des orbites de X .

De plus, on peut choisir les disques D_1^u, \dots, D_l^u aussi proche que l'on veut des disques $\Delta_1^u, \dots, \Delta_l^u$. Or, d'après l'étape 3, les disques $\Delta_1^u, \dots, \Delta_l^u$ sont disjoints des disques D_{l+1}^u, \dots, D_p^u .

Par conséquent, on peut supposer que les disques D_1^u, \dots, D_i^u sont disjoints des disques D_{i+1}^u, \dots, D_p^u ; ce qui achève la preuve. \triangle

On note D^u l'union des disques fermés D_1^u, \dots, D_p^u . On rappelle que R désigne l'union des rectangles de la partition \mathcal{R} , et que $X^1(R)$ désigne l'image de R par le temps 1 du flot de X .

Proposition 6.9 *L'ensemble $X^1(R) \cup D^u$ est une surface topologique à bord plongée dans \mathcal{M} .*

Preuve Les ensembles $X^1(R)$ et D^u sont des unions finies de disques topologiques fermés deux à deux disjoints; en particulier, ce sont des surfaces topologiques à bords plongées dans \mathcal{M} . Pour montrer la proposition, il reste à étudier l'intersection de $X^1(R)$ et D^u .

Par définition, les arcs marqués de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ sont les images par la projection P_M^u des composantes connexes de $\partial^s R$. En utilisant le point (i) de la proposition 6.7, on en déduit que les arcs marqués de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ sont les images par le temps 1 du flot de X des composantes connexes de $\partial^s R$. En particulier, les arcs marqués de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ sont inclus dans le bord de $X^1(R)$. Par ailleurs, les arcs marqués de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ sont inclus dans la réunion des courbes $\gamma_1^u, \dots, \gamma_n^u$, c'est-à-dire dans le bord de D^u .

Le point (i) de la proposition 6.7 implique également que, pour tout point $x \in R \setminus \partial^s R$, le segment d'orbite joignant le point x au point $X^1(x)$ est inclus dans l'intérieur du voisinage filtrant M . En particulier, la surface à bord $X^1(R)$, privée des composantes connexes de $X^1(\partial^s R)$, est incluse dans l'intérieur du voisinage filtrant M . Comme D^u est disjoint de l'intérieur de M , il en résulte que l'intersection des surfaces à bord D^u et $X^1(R)$ est réduite aux composantes connexes de $X^1(\partial^s R)$, c'est-à-dire aux arcs marqués de $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$.

On a prouvé que l'intersection des surfaces à bords $X^1(R)$ et D^u est constituée d'un nombre fini d'arcs du bord de $X^1(R)$ (les arcs marqués de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$) qui sont également des arcs du bord de D^u . Il en résulte que $X^1(R) \cup D^u$ est une surface topologique compacte à bord, plongée dans \mathcal{M} . \triangle

Remarque 6.10 La preuve de la proposition 6.9 montre que la surface topologique $X^1(R) \cup D^u$ est l'union de deux surfaces lisses ($X^1(R)$ et D^u) qui s'intersectent le long des arcs marqués de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ (chaque arc marqué est dans le bord de $X^1(R)$ et dans le bord de D^u).

Proposition 6.11 *La surface à bord $X^1(R) \cup D^u$ est topologiquement transverse à X .*

Preuve Les surfaces à bords $X^1(R)$ et D^u sont transverses au champ X . En utilisant la remarque 6.10, on voit donc que la proposition 6.11 est équivalente à l'énoncé technique suivant :

Lemme 6.12 *Soit δ un arc marqué de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$. Soit $i \leq p$ l'unique entier tel que l'arc δ est inclus dans la courbe fermée γ_i^u . Soit $j \leq n$ l'unique entier tel que δ est l'une des deux composantes connexes de $X^1(\partial^s R_j)$. Alors, la surface à bord $D_i^u \cup X^1(R_j)$ est topologiquement transverse au champ X au voisinage de δ .*

Preuve du lemme 6.12 quand la courbe γ_i^u n'est pas homologue à 0 dans $\partial^u M$. On remarque que la surface à bord $D_i^u \cup X^1(R_j)$ est transverse au champ X au voisinage de δ si et seulement si les orientations dynamiques (voir la sous-partie 3.1) du disque D_i^u et du rectangle $X^1(R_j)$ induisent la même orientation de la surface $D_i^u \cup X^1(R_j)$ au voisinage de δ . Dans la suite, le disque D_i^u et le rectangle $X^1(R_j)$ sont munis de leurs orientations dynamiques.

La courbe γ_i^u peut-être munie de deux orientations : l'orientation comme bord du disque orienté D_i^u (c'est-à-dire l'orientation *dynamique* de γ_i^u considéré comme un méridien du tore plein puits bordé par la composante connexe de $\partial^u M$ sur laquelle est tracée γ_i^u , voir sous-partie 6.3), et l'orientation induite par les orientations des arcs marqués de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$. Par construction de la variété \mathcal{M} (voir la sous-partie 6.3), ces deux orientations de γ_i^u sont opposées. Par ailleurs, l'orientation de l'arc marqué δ coïncide, par définition, avec l'orientation de δ comme arc du bord du rectangle orienté $X^1(R_j)$. On en déduit que l'orientation de δ comme arc du

bord du rectangle orienté $X^1(R_j)$ et l'orientation de δ comme arc du bord du disque orienté D_i^u sont opposées. Il en résulte que les orientations (dynamiques) du disque D_i^u et du rectangle $X^1(R_j)$ induisent la même orientation de la surface $D_i^u \cup X^1(R_j)$ au voisinage de δ . \triangle

Preuve du lemme 6.12 quand la courbe γ_i^u est homologue à 0 dans $\partial^u M$. L'arc δ est une composante connexe de $X^1(\partial^s R) \subset X^1(R^u)$; on note $X^1(H)$ la composante connexe de l'ensemble $X^1(R^u)$ qui contient l'arc δ , et on remarque que $X^1(H)$ est un voisinage de l'arc δ dans le rectangle $X^1(R_j)$. Pour prouver la proposition, il suffit donc de prouver que la sous-surface $X^1(H) \cup D_i^u$ est topologiquement transverse au champ X .

D'après la proposition 6.8, le disque D_i^u s'obtient en déplaçant un disque $\Delta_i^u \subset \partial^u M$ le long des orbites de X ; autrement dit, le disque Δ_i^u est l'image par P_M^u du disque D_i^u , et la projection P_M^u est injective en restriction à D_i^u . Par ailleurs, l'image de $X^1(H)$ par la projection P_M^u est une tour T de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$, et l'arc δ est le toit de cette tour T . La projection P_M^u est injective en restriction à $X^1(H)$: sinon, le pied de la tour T serait inclus dans le toit de T (remarque 4.9), donc la tour T formerait à elle seule un cycle de tours, et la courbe γ_i^u contredirait le point (d) de la proposition 4.13. Enfin, d'après le point (c) de la proposition 4.13, la tour T n'intersecte pas l'intérieur du disque Δ_i^u ; autrement dit, aucun point de $X^1(H)$ n'a la même image par P_M^u qu'un point de l'intérieur du disque D_i^u . Tout ceci montre que la projection P_M^u envoie la surface à bord $X^1(H) \cup D_i^u$ sur la surface à bord $T \cup \Delta_i^u$, et est injective en restriction à $\text{int}(X^1(H) \cup D_i^u)$. Par conséquent, l'intérieur de la surface à bord $X^1(H) \cup D_i^u$ peut être obtenu en déplaçant l'intérieur de la surface à bord $T \cup \Delta_i^u$ le long des orbites de X (figure 8). Le lemme en découle, car la surface à bord $T \cup \Delta_i^u$ est incluse dans $\partial^u M$ qui transverse au champ X . \triangle

Ceci achève la preuve de la proposition 6.11. \triangle

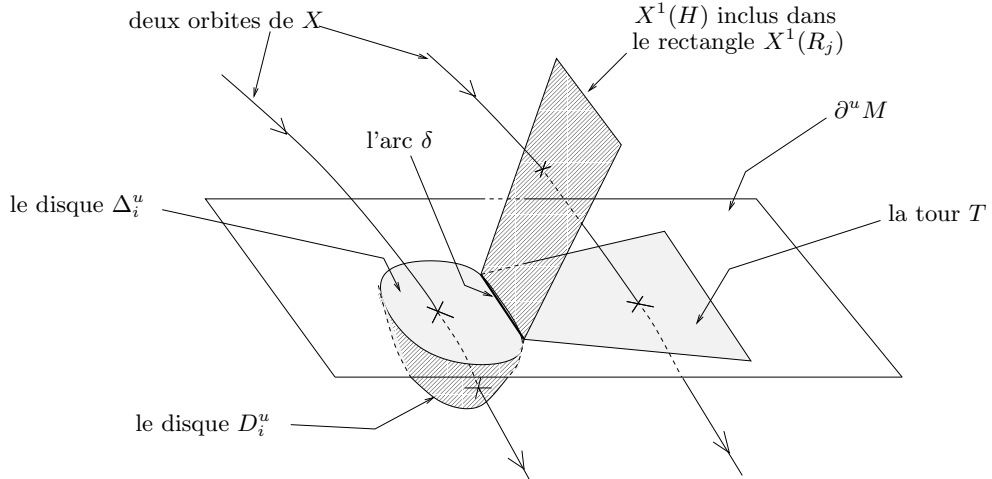


FIG. 8 – La surface à bord $X^1(R_j) \cup D_i^u$ est topologiquement transverse aux orbites du champ X au voisinage de l'arc δ .

6.6 Définition d'une section globale et conclusion

Nous allons maintenant définir une section globale du champ X , et achever la preuve de l'implication $2 \implies 1$ du théorème 1bis.

Dans la sous-partie précédente, nous avons construit des disques D_1^u, \dots, D_p^u bordés par les courbes $\gamma_1^u, \dots, \gamma_q^u$, plongés dans \mathcal{M} , deux à deux disjoints, tels que :

- pour tout i , l'intérieur du disque D_i^u est disjoint du voisinage filtrant M ,
- l'union D^u des disques D_1^u, \dots, D_p^u coupe toutes les orbites périodiques puits de X ,
- $X^1(R) \cup D^u$ est une surface à bord, plongée dans \mathcal{M} , topologiquement transverse à X .

Une construction parfaitement similaire prouve l'existence de disques D_1^s, \dots, D_q^s bordés par les courbes $\gamma_1^s, \dots, \gamma_q^s$, plongés dans \mathcal{M} , deux à deux disjoints, tels que :

- pour tout i , l'intérieur du disque D_i^s est disjoint du voisinage filtrant M ,
- l'union D^s des disques D_1^s, \dots, D_r^s coupe toutes les orbites périodiques sources de X ,
- $X^{-1}(R) \cup D^s$ est une surface à bord, plongée dans \mathcal{M} , topologiquement transverse à X .

Définition de la section S . On note $S = R \cup X^1(D^s) \cup X^{-1}(D^u)$.

Proposition 6.13 *L'ensemble S ainsi défini est une surface topologique compacte sans bord, plongée dans \mathcal{M} , topologiquement transverse au champ X , qui coupe chaque orbite de X .*

Preuve Par définition, S est l'union de deux surfaces compactes à bord plongées dans \mathcal{M} : la surface $R \cup X^{-1}(D^u)$, et la surface $X^1(D^s)$. On va montrer que ces deux surfaces ont exactement le même bord, et que les intérieurs de ces surfaces sont disjoints.

(a) Le bord de R se décompose en $\partial^s R$ et $\partial^u R$.

(b) Le bord de D^u est l'union des courbes $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$. L'union de ces courbes se décompose comme réunion des arcs marqués de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ et des arcs $\alpha_1^u, \dots, \alpha_r^u$ (voir sous-partie 6.2). De plus, l'union des arcs marqués de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, X, M)$ coïncide avec l'image de $\partial^s R$ par le temps 1 du flot de X (voir la preuve de la proposition 6.9). Par conséquent, le bord de $X^{-1}(D^u)$ se décompose comme réunion de $\partial^s R$ et de $X^{-1}(\alpha_1^u \cup \dots \cup \alpha_r^u)$.

(c) D'après (a) et (b), le bord de $R \cup X^{-1}(D^u)$ est la réunion de $\partial^u R$ et de $X^{-1}(\alpha_1^u \cup \dots \cup \alpha_r^u)$.

(d) Le même raisonnement qu'en (b) montre que le bord de $X^1(D^s)$ se décompose comme réunion de $\partial^u R$ et de $X^1(\alpha_1^s \cup \dots \cup \alpha_r^s)$.

(e) Le point (iii) de la proposition 6.7 implique que les union d'arcs $X^{-1}(\alpha_1^u \cup \dots \cup \alpha_r^u)$ et $X^1(\alpha_1^s \cup \dots \cup \alpha_r^s)$ sont exactement égales.

(f) Les points (ii) et (iii) de la proposition 6.7 impliquent respectivement que l'intérieur de $X^1(D^s)$ est disjoint de R et que l'intérieur de $X^1(D^s)$ est disjoint de $X^{-1}(D^u)$.

Les points (c), (d) et (e) ci-dessus prouvent que les surfaces $R \cup X^{-1}(D^u)$ et $X^1(D^s)$ ont exactement le même bord. Le point (f) prouve que les intérieurs des surfaces $R \cup X^{-1}(D^u)$ et $X^1(D^s)$ sont disjoints. Par conséquent, S est l'union de deux surfaces compactes à bords plongées dans \mathcal{M} , qui ont le même bord, et dont les intérieurs sont disjoints ; ceci implique que S est une surface compacte sans bord plongée dans \mathcal{M} .

La surface S est l'union de deux surfaces à bord topologiquement transverses à X : les surfaces $X^1(D^u) \cup R$ et $X^{-1}(D^s) \cup R$. Chaque composante connexe de l'intersection de ces deux surfaces est d'intérieur non-vide. Ceci implique S est topologiquement transverse à X .

Enfin, les ensembles R , $X^{-1}(D^u)$ et $X^1(D^s)$ rencontrent respectivement chaque orbite de K , chaque orbite périodique puits de X , et chaque orbite périodique source de X . Par conséquent, la surface compacte sans bord $S = R \cup X^{-1}(D^u) \cup X^1(D^s)$ rencontre transversalement chaque orbite non-errante de X . Ceci implique que S rencontre chaque orbite de X . \triangle

La proposition 6.13 prouve que S est une “section topologique globale” du champ X .

Proposition 6.14 *La partition de Markov \mathcal{R} est tracée sur la section S (voir remarque 3.2).*

Preuve La surface S est l'union des ensembles R , $X^{-1}(D^u)$ et $X^1(D^s)$. En particulier, la surface S contient l'union R des rectangles de la partition \mathcal{R} . Par ailleurs, les unions de disques D^s et D^u sont disjoints de l'intérieur du voisinage filtrant M , donc *a fortiori*, disjoints de la pièce basique K ; par suite, l'ensemble $S \setminus R = X^{-1}(D^u) \cup X^1(D^s)$ est disjoint de K ; autrement dit, l'union R des rectangles de la partition \mathcal{R} recouvre $K \cap S$, ce qui achève la preuve. \triangle

Preuve de l'implication (2) \implies (1) du théorème 1bis Nous avons donc construit un champ de Smale X sur une 3-variété compacte sans bord orientée \mathcal{M} . L'unique pièce basique selle K de X admet une partition de Markov \mathcal{R} de type géométrique T . Enfin, la partition

\mathcal{R} est tracée sur une section topologique globale de X (*i.e.* une surface topologique compacte sans bord, topologiquement transverse à X , qui coupe toute orbite de X). Il est classique qu'on peut toujours lisser une telle section topologique globale (grâce à une isotopie parmi les surfaces topologiquement transverses à X). D'après le lemme 3.6, il en résulte que le type géométrique T est réalisable, ce qui achève la preuve de l'implication (2) \implies (1) du théorème 1bis. \triangle

7 La surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est simple si et seulement si elle peut-être encerclée dans des tores

Le but de cette partie est de prouver l'équivalence $2 \iff 3$ du théorème 1bis. On considère une partition de Markov abstraite (\mathcal{R}, f) ; quitte à raisonner composante connexe par composante connexe, on supposera que la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est connexe.

7.1 Si la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ peut être encerclée dans des tores, alors la surface à points marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est simple

On suppose qu'il existe un encerclement $h, \gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$ de la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ dans un tore F . On note G le complémentaire de l'intérieur de $h(\Sigma^u(\mathcal{R}, f))$ dans F . Par définition, G est une sous-surface à bord du tore F , qui a exactement le même bord que la surface $h(\Sigma^u(\mathcal{R}, f))$.

Par ailleurs, on note $\alpha_1^u, \dots, \alpha_r^u$ les composantes connexes de l'union des courbes $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$ privée de l'intérieur des arcs marqués de la surface $h(\Sigma^u(\mathcal{R}, f))$. Ces composantes connexes $\alpha_1^u, \dots, \alpha_r^u$ sont des arcs simples tracés sur la surface G . La remarque 2.5 et le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 6.5 (étape 2) montre que, pour tout $i \leq r$, l'arc α_i^u joint un point marqué stable-instable de la surface $h(\Sigma^u(\mathcal{R}, f))$ à un point marqué instable-stable. Réciproquement, chaque point marqué de la surface $h(\Sigma^u(\mathcal{R}, f))$ est une extrémité d'un des arcs $\alpha_1^u, \dots, \alpha_r^u$. On en déduit la propriété suivante :

(\star) *pour toute composante connexe G_0 de G , le bord de G_0 est équilibré, i.e. le bord de G_0 porte autant de points marqués stables-instables que de points marqués instables-stables.*

Le genre de la surface à bord $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est inférieur ou égal à 1 (puisque $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ peut être plongée dans un tore); on distingue donc deux cas :

— si le genre de $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est égal à 1, alors toutes les composantes connexes de G sont des disques (car G est le complémentaire d'une sous-surface de genre 1 dans un tore). Par conséquent, chaque composante de bord de $h(\Sigma^u(\mathcal{R}, f))$ est le bord d'une composante connexe de G . D'après la propriété (\star), ceci implique que chaque composante de bord de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est équilibrée.

— si le genre de $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est nul, alors toutes les composantes connexes de G sont des disques, sauf une composante connexe qui est un anneau ou un tore privé d'un disque. En particulier, hormis au plus deux composantes de bord, chaque composante de bord de $h(\Sigma^u(\mathcal{R}, f))$ borde une composante connexe de G . D'après la propriété (\star), ceci implique que, hormis peut-être deux composantes de bord, chaque composante de bord de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est équilibrée.

On a prouvé que la surface à points marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est simple. Par suite, on a prouvé l'implication $2 \implies 3$ du théorème 1bis.

7.2 Si la surface à points marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est simple, alors la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ peut être encerclée dans des tores

On suppose que la surface à points marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est simple. Puisque $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est supposée connexe, on est face à l'alternative suivante :

Cas I. $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est de genre 1 et chaque composante de bord de $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est équilibrée.

Cas II. $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est de genre nul et, hormis deux composantes de bord exceptionnelles β, β' , chaque composante de bord de $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est équilibrée. L'union des deux composantes de bord exceptionnelles $\beta \cup \beta'$ est alors nécessairement équilibrée (car le bord de $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ est équilibré).

On construit alors une surface compacte sans bord F de la manière suivante :

Cas I. La surface F s'obtient en collant un disque sur chaque composante de bord de $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$.

Cas II. La surface F s'obtient joignant les deux composantes de bord exceptionnelles β, β' de $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ par un anneau, et en collant un disque sur chaque autre composante de bord.

Dans les deux cas, la surface F obtenue est un tore. La construction de F fournit un plongement $h : \Sigma^u(\mathcal{R}, f) \hookrightarrow F$; on notera G le complémentaire de l'intérieur de $h(\Sigma^u(\mathcal{R}, f))$ dans F .

Par construction de la surface F , pour toute composante connexe G_0 de G , le bord de G_0 est équilibré. Cette propriété permet de construire facilement des arcs simples deux à deux disjoints $\alpha_1^u, \dots, \alpha_r^u$ tracés sur G , tels que, pour tout $i \leq r$, l'arc α_i^u joint un point marqué stable-instable à un point marqué instable-stable, et tels que tout point marqué est une des extrémités de l'un des arcs $\alpha_1^u, \dots, \alpha_r^u$. On note alors $\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$ les composantes connexes de l'union des arcs $\alpha_1^u, \dots, \alpha_r^u$ et des arcs marqués de $h(\Sigma^u(\mathcal{R}, f))$. La remarque 2.5 et les mêmes arguments que dans la preuve de la proposition 6.5 (étape 4) montrent que $h, \gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u$ est un encerclement de la surface $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ dans le tore F .

On a prouvé que la surface à arcs marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}, f)$ peut être encerclée dans un tore. Par suite, on a prouvé que l'implication $3 \implies 2$ du théorème 1bis.

8 Exemples de types géométriques non-réalisables

Grâce au théorème 1, il est facile d'exhiber des types géométriques non-réalisables ; voici deux exemples qu'il est aisé de généraliser :

— considérons la partition de Markov abstraite (\mathcal{R}_1, f_1) (à un seul rectangle) représentée à la figure 9 ; la surface à bord $\Sigma^u(\mathcal{R}_1, f_1)$ est connexe de genre 2 ; par conséquent, le type géométrique de la partition de Markov abstraite (\mathcal{R}_1, f_1) n'est pas réalisable ;

— considérons maintenant la partition de Markov abstraite (\mathcal{R}_2, f_2) (à un seul rectangle) représentée à la figure 10 ; la surface à bord $\Sigma^u(\mathcal{R}_2, f_2)$ est de genre 0, mais aucune des trois composantes de bord de $\Sigma^u(\mathcal{R}_2, f_2)$ n'est équilibrée ; par conséquent, le type géométrique de la partition de Markov abstraite (\mathcal{R}_2, f_2) n'est pas réalisable.

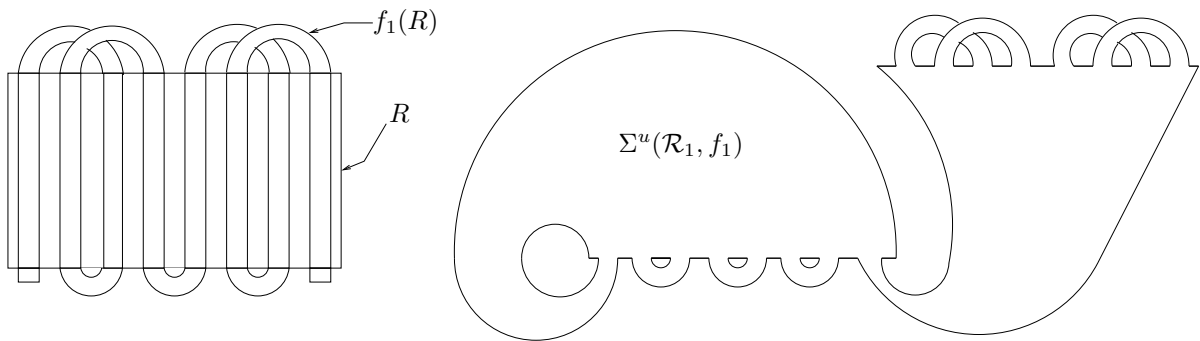


FIG. 9 – La partition de Markov abstraite (\mathcal{R}_1, f_1) et la surface à bord $\Sigma^u(\mathcal{R}_1, f_1)$.

Références

- [1] F. Béguin. Smale diffeomorphisms of compact surfaces: an algorithm for the conjugacy problem. Prépublication, 1999.

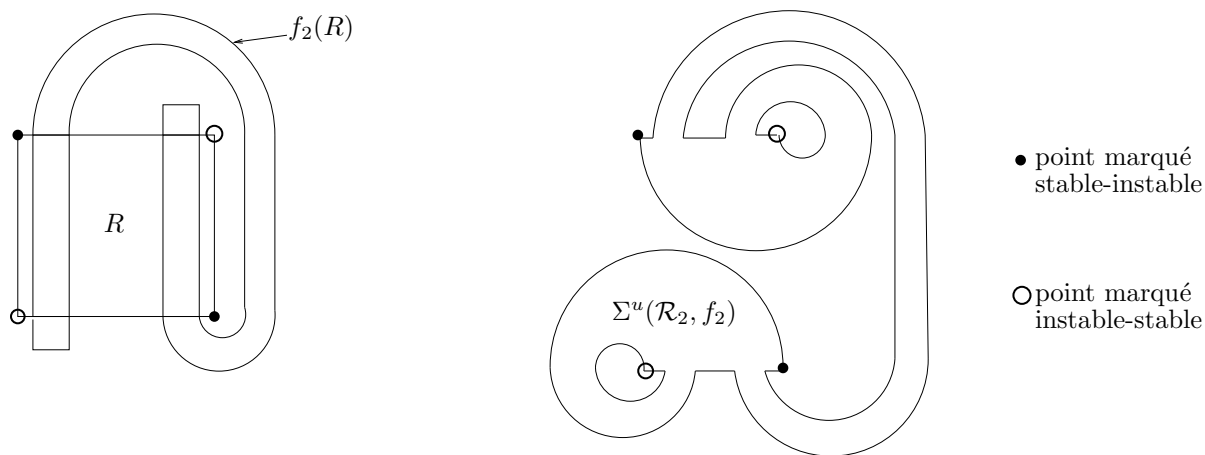


FIG. 10 – La partition de Markov abstraite (\mathcal{R}_2, f_2) et la surface à points marqués $\Sigma^u(\mathcal{R}_2, f_2)$.

- [2] F. Béguin. Champs de vecteurs hyperboliques en dimension 3. Thèse de doctorat de l'Université de Bourgogne, 1999.
- [3] F. Beguin, C. Bonatti et J.L. Vieitez. Construction de flots de Smale en dimension 3. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **8** (1999), no.3, 369–410.
- [4] C. Bonatti, R. Langevin (avec la collaboration de E. Jeandenans). Difféomorphismes de Smale des surfaces. Astérisque 250. *Soc. Math. de France, Paris*, 1998.
- [5] R. Bowen. Topological entropy and Axiom A. *Global Analysis (Proc. Symp. Pure Math., Vol XIV, Berkeley, Calif., 1968)*, 23–41. *Amer. Math. Soc., Providence, R.I.*, 1970.
- [6] J. Franks. Non singular Smale flows on S^3 . *Topology* **24** (1985), no. 3, 265–282.
- [7] E. Jeandenans. Difféomorphismes hyperboliques des surfaces et combinatoire des partitions de Markov. Thèse de doctorat de l'Université de Bourgogne, 1996.
- [8] R. Mañé. A proof of the C^1 – stability conjecture. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **66** (1988), 161–210.
- [9] C. Robinson. Structural stability of C^1 –diffeomorphisms. *J. Differential Equations* **22** (1976), 28–73.
- [10] M. Shub. Stabilité globale des systèmes dynamiques. Astérisque 56. *Soc. Math. France, Paris*, 1978.