La géométrie des modèles locaux p-adiques

Cet exposé s'appuie sur des travaux avec J. Anschütz, I. Gleason, et T. Richarz (AGLR, GL)

<u>Précédemment:</u> G groupe déployé$/\mathbb{Q}_p$

$\mathcal{G}$ modèle iwahorique$/\mathbb{Z}_p$

$\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(B_{dR})/\mathcal{G}(B_{dR}^+)$, $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}/\mathbb{Q}_p = \mathrm{Gr}_G = \bigcup_{\mu \text{ dominants}} \mathrm{Gr}_{G,\mu}$ diamants propres à orbites lisses

$\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}/\mathbb{F}_p = (\mathcal{F}\ell_{\mathcal{G}})^{\diamond}$ espace de Witt

$\bigcup_{w \in \tilde{W}} \mathcal{F}\ell_{\mathcal{G},w}$ variétés parfaites projectives à orbites lisses.

$Z : \mathrm{Rep}_{\Lambda} \check{G} \longrightarrow P_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}\ell_{\mathcal{G}})$ "cycles proches of Satake"

$J : \mathrm{Rep}_{\Lambda} \check{T} \longrightarrow P_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}\ell_{\mathcal{G}})$ "Wakimoto"

tq Z est muni d'une filtration à gradué $\in$ images J

Λ extn algébrique de $\mathbb{F}_\ell$ ou $\mathbb{Q}_\ell$

$\mathrm{supp}\, Z(V) = \bigcup_{\lambda \in \mathrm{wt} V} \mathcal{F}\ell_{\mathcal{G},\lambda}$

Aujourd'hui on étudie plutôt la géométrie des <u>modèles locaux</u>

↳ adhérence $\mathcal{M}_{\mathcal{G},\mu} \subset \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$ du diamant $\mathrm{Gr}_{G,\mu} \subset \mathrm{Gr}_G$

v-faisceau propre par définition

ATTENTION : Ni tous les fermés $\subseteq |X|$ proviennent d'un fermé $Y \subseteq X$ ← sous-faisceau

Donc $(-)^{cl}$ de v-faisceaux ne commute pas à $|-|$.

Exemple : DCB...

Toutefois $M_{G,\mu}$ est défini par $Gr(B_{dR}^+)$

donc $|M_{G,\mu}| \to |Gr_{G,\mu}|$ est dense pro-(partiellement propre et lisse)

et $M_{G,\mu}/\mathbb{F}_p = \bigcup_{i \in I} Fl^{\diamond}_{G,\mu,w_i}$ $|I| < \infty$

En effet comme $\overline{\text{supp}\, Z(V_\mu)} = M_{G,\mu}/\mathbb{F}_p$

on en déduit que $M_{G,\mu}/\mathbb{F}_p \overset{\text{haut finalement}}{=} \bigcup_{\lambda \in Wt(V_\mu)} Fl_{G,\lambda,1} =: A_{G,\mu}$ — lieu admissible de Kottwitz–Rapoport.

Foncteurs $\diamond$: Étant donné un schéma $X/\mathbb{Z}_p$, $\exists$ 2 foncteurs vers la catégorie des v-faisceaux

qcompact $X \longmapsto X^{\diamond}(R, R^+) = X^{\diamond}(R^+)$ $\quad \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p} \mapsto \mathbb{B}^1_{\mathbb{F}_p}$

propre $X \longmapsto X^{\diamond}(R, R^+) = X^{\diamond}(R)$ $\quad \mapsto \mathbb{A}^{1,\text{an}}_{\mathbb{F}_p}$

égaux pour X propre. Th (L) : pleinement fidèle pour X propre et absolument faiblement normal

---

Plus de structure : Théorie des kimberlites

Une kimberlite p-adique est un v-faisceau $X \to \text{Spd}\,\mathbb{Z}_p$ qcompact séparé

tq $\exists$ $\text{Spd}\, R^+ \twoheadrightarrow X$

anneau entier perfectoïde sans p-torsion

$X_\eta/\mathbb{Q}_p$ diamant, $X^{\text{red}}/\mathbb{F}_p = (X_{\text{red}})^{\diamond}$ schéma parfait de type fini

à $\mathbb{F}$-points denses dans $|X_\eta|$ cons

Glaçon : Kimfoldité p-adique vient muni de

$$sp : |X_\eta| \longrightarrow |X_{red}| \; (\text{† } |X_\eta| \text{ plusieurs points analytiques})$$

appli de spécialisation. On peut former les voisinages formels $\widehat{X}_U$, $\widehat{X}_Z$ et aussi leurs tubes X_U°, X_Z°.

U étale, Z fermé de X_{red}

encore kimfoldité p-adique

Kimfoldité mais NON p-adique

Prop (AGLR) : $X \longmapsto (X_\eta, X_{red}, sp)$ est pleinement fidèle.

Dém : Considérons le graphe dans $X \times Y$ etc... $\square$

Maintenant on discute la normalité d'une kimfoldité X

Pour X schéma noethérien géo. unibranchité puisque v-faisceaux sont topologiques

$\widetilde{X} \to X$ revêt. universel

$\iff R^0 j_* \Lambda = \Lambda$

points génériques

Pour $X = \mathrm{Spf}\, A$ avec $A[1/p]$ normal ($\mathbb{Z}_p$-algèbre tf)

X unibranche

$\iff X_{\bar{x}}^\circ$ connexes

Déf : X kimfoldité p-adique est normale si $X_{\bar{x}}^\circ$ est connexe $\forall \bar{x}$ pt géo fermé. $\forall \bar{x} : \mathrm{Spec}\, \bar{\mathbb{F}}_p \to X_{red}$

Thm (GL) : $\mathbb{M}_{\mathcal{G},\mu}$ est normal.

Dém : On doit montrer que $\pi_0(X_{\bar{x}}^\circ) = 1 \iff R^0 j_* \Lambda = \Lambda$

$\Longleftarrow$ $\pi_0(X_U^\circ)$ $\forall$ étale $U \to X_{red}$

$\iff \mathcal{H}^0 \mathcal{Z}(\mathbb{V}_\mu) = \Lambda$

parce que $\mathcal{H}^0 \mathrm{Sat}_{\mathbb{V}_\mu} = \Lambda$

Groupe géo. unibranche

On regarde $\bar{x}$ comme élément de $\mathrm{Adm}(\mu) = \{ w \in \widetilde{W} \mid \exists \lambda \in \Lambda_\mu \text{ tq } w \leq \lambda \}$

et que $\mathcal{Z}(\mathbb{V}_\mu)$ est équivariant.

Si la colongueur de $\bar{x} = 0$, c'est trivial.

— — . . . $= 1$, utilisons le fait que $\bar{x} \leq \lambda_i$ $i = 1,2$ (Haines)

Les seuls termes de la filtration de Wakimoto qui contribuent dans $\mathcal{H}^{-d}_{\bar{x}} Z(V_\mu)$ sont $J(V_\mu(\lambda_1))$ et $J(V_\mu(\lambda_2))$

Supposons $J(V_\mu(\lambda_1)) = \Delta_{\lambda_1}$ spdg $\Rightarrow \dim_L J_{\bar{x}}(V_\mu(\lambda_1) \oplus V_\mu(\lambda_2)) \leq 1$

Colongueur$(\bar{x}) \geq 2$: il faut juste vérifier que $A_{\mathcal{G},\mu}$ est $\mathcal{S}_2$ (marchant)

$\Updownarrow$ Hochster-Huneke + normalité des vars de Schubert

$\mathrm{Adm}(\mu) \supset \{y \geq x\}$ est un graphe connexe $\Longleftrightarrow \tau_0(\mathrm{Spe}^*_{\bar{x}}\,\mathcal{O}_{A_{\mathcal{G},\mu},\bar{x}}) = 1$ $\forall x$ de $\mathrm{cht}\, d \geq 2$

Comme ceci ne dépend que de la combinatoire et pas de si la base est $\mathcal{O}_F$ ou $\mathbb{F}_p((t))$, on peut passer aux caract.

LHLM démontrent $M^{\mathrm{loc}}_{\mathcal{G},\mu}/\mathbb{F}_p[[t]]$ est géo. unibranche $\Longrightarrow A^{\mathrm{loc}}_{\mathcal{G},\mu}$ est $\mathcal{S}_2$.

Th. de conn. de Grothendieck

Passons à $M_{\mathcal{G},\mu}/\mathbb{Z}_p$ $\rightsquigarrow$ supposons $M^{\Theta}_{\mathcal{G},\mu}/U$ (v-faisceau) $= V_1 \sqcup V_2$ (voisinage connexe) $d = \langle 2\rho, \mu \rangle$

$\rightsquigarrow Z(V_\mu) = A_1 \oplus A_2$ envers à $\mathcal{H}^{-d} \neq 0$

Comme U est connexe en codim 1 $\Rightarrow \dim \overline{\mathrm{supp}\, A_1} < d$ ↯ $\square$

Représentabilité

Th (AGLR) : μ minuscule. Alors $M_{\mathcal{G},\mu}$ est représentable par un $\mathbb{Z}_p$-schéma $M^{\mathrm{loc}}_{\mathcal{G},\mu}$ projectif, plat et normal à fibres réduites.

<u>Dém</u> : On a le candidat $N_{\mathcal{G},\mu}$ dans une grassmannienne série de puissances pour un $\mathbb{Z}_p[[t]]$-groupe iwahorique $\mathcal{G}$ le long de T.

<u>But</u> : Comparer les triples de sp de $N_{\mathcal{G},\mu}^\diamond$ et $M_{\mathcal{G},\mu}$

(i) fibre générique $\simeq (G/P_\mu)^\diamond$

(ii) réduit $N^{\mathrm{red}}_{\mathcal{G},\mu}/\mathbb{F}_q = A_{\mathcal{G}',\mu}$ où $\mathcal{G}'/\mathbb{F}_p[[t]]$ Iwahori

$\exists$ iso can

$$\begin{tikzcd} D_{\mathcal{G}',w} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & D_{\mathcal{G},w} \arrow[d] \\ Fl_{\mathcal{G}',w} \arrow[r, "\simeq"] & Fl_{\mathcal{G},w} \end{tikzcd}$$

pour $w \in \mathrm{Adm}(\mu)$

On connaît Pic

Applique la factorisation de Stein des faisceaux semi-amples

(iii) morphisme sp compréhensible sur $M^\circ_{\mathcal{G},\mu} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_\mu} \mathcal{G}\cdot\lambda$

Tout $\mathbb{Q}_p$-point est là grâce à la déc de Iwasawa
$$\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)\backslash G(\mathbb{Q}_p)/P_\mu(\mathbb{Q}_p) \simeq \Lambda_\mu$$

En général, il faut remplacer G par $\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}_p} G$ et $E/\mathbb{Q}_p$ Galois et prendre les convolutions pour avoir un analogue d'Iwasawa

---

$\Rightarrow M_{\mathcal{G},\mu} = (M^{\mathrm{sch}}_{\mathcal{G},\mu})^\diamond$

$\nwarrow$ plat, projectif, faiblement normal, et unibranch donc normal

$M^{\mathrm{sch},\circ}_{\mathcal{G},\mu} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_\mu} \mathcal{G}\cdot\lambda \subset M^{\mathrm{sch}}_{\mathcal{G},\mu}$ ouvert lisse à fibres denses

donc $M^{\mathrm{sch}}_{\mathcal{G},\mu}/\mathbb{F}_q$ est $S_1 + R_0 \Rightarrow$ réduit $\square$