Rennes, le 4 Février 1988

Cher Deligne,

J'ai pu constater ces derniers jours qu'une rédaction sur les lois de groupe dans les 2-catégories risquait de me prendre un certain temps. Comme je t'ai annoncé de tels résultats dans ma précédente lettre, je crois plus raisonnable de te les décrire assez succintement, sans attendre d'avoir effectué une rédaction en forme. Je commence par exposer, sous une forme un peu personnelle, des rappels sur les lois de groupes dans les 1-catégories, afin de motiver la suite. Cette partie est rédigée de manière assez allusive pour ne pas l'allonger démesurément, étant plus ou moins bien connue. C'est à partir de la page 7 que tu trouveras les énoncés précis des axiomes pour les 2-catégories de Picard et autres.

Plaçons-nous pour commencer dans le cas des 1-catégories. Soit donc $\mathcal{C}$ une telle catégorie pour laquelle toute flèche est inversible (c'est-à-dire un groupoïde). Le point sur lequel je voudrais insister est qu'il y a plusieurs niveaux de commutativité pour une telle catégorie, munie d'une loi $+ : \mathcal{C}\times\mathcal{C} \to \mathcal{C}$:

a) On se donne une contrainte d'associativité $\xi_{A,B,C} : A+(B+C) \to (A+B)+C$ satisfaisant à la condition du pentagone de Mac Lane (je néglige, dans cette discussion informelle, la question des éléments unité). Cette condition du pentagone implique la cohérence, c'est-à-dire que l'on peut donner un sens a l'expression $A_1+...+A_n$, indépendamment du choix des parenthèses dans celle-ci. Une autre manière de formuler ceci est de dire qu'une telle catégorie $\mathcal{C}$ est équivalente (de manière compatible à +) à une catégorie $\overline{\mathcal{C}}$ où l'associativité est stricte : $A+(B+C) = (A+B)+C$. Ceci se démontre comme tu le fais pour Picard dans SGA 4 exp. XVIII : on prend pour $ob(\overline{\mathcal{C}})$ le monoïde libre engendré par $ob(\mathcal{C})$, et pour $Fl(\overline{\mathcal{C}})$ la définition est alors imposée. C'est la cohérence mentionnée plus haut qui entraîne que $Fl(\overline{\mathcal{C}})$ est un monoïde, et que le foncteur $\pi : \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}$ est une équivalence. On peut associer à $\overline{\mathcal{C}}$ un complexe de monoïdes $\partial : G_1 \longrightarrow G_0$ concentré en degrés [–1,0], où $G_0 = ob(\overline{\mathcal{C}})$ et G_1 désigne les flèches de $\overline{\mathcal{C}}$ issues de l'élément neutre. Dans le cas où $\mathcal{C}$ satisfait a un axiome d'inverse pour les objets, pour lequel on a une condition de compatibilité, la même construction permet d'associer à $\mathcal{C}$ une catégorie $\overline{\mathcal{C}}$ dont les objets et les morphismes sont des groupes, et donc un complexe de groupes $\partial : G_1 \to G_0$ de longueur 1, qui est un module croisé, au sens de J.H.C. Whitehead : le groupe G_0 agit sur G_1 cette action devant satisfaire à deux axiomes que je ne reproduis pas ici. Cette donnée détermine entièrement la catégorie $\overline{\mathscr{C}}$, ou, si l'on veut, son nerf $N(\overline{\mathscr{C}})$, qui est le groupe simplicial obtenu à partir du module croisé en question par une construction de style Dold-Puppe non abélienne.

b) On introduit maintenant une donnée de commutativité $\tau : A+B \to B+A$. Plutôt que d'introduire d'un seul coup toutes les compatibilités qu'il pourrait satisfaire, il y a lieu de considérer une étape intermédiaire. J'adopterai la jolie terminologie de Joyal-Street, qui, dans un récent preprint, appellent catégorie tressée (par référence au groupe de tresses) une catégorie $\mathscr{C}$ avec contrainte d'associativité ξ, pentagone, contrainte de commutativité τ, et enfin hexagone au sens de Mac Lane. En fait, il existe vraiment deux hexagone de Mac Lane, suivant que l'on fasse passer l'objet A à travers B, C de gauche à droite (resp. C à travers A, B de droite à gauche). Si on s'autorise, par **a)** à négliger les données d'associativité, ce sont les diagrammes commutatifs suivants :

$$
\begin{tikzcd}
 & A+B+C \arrow[dl] \arrow[dd] \\
B+A+C \arrow[dr] & \\
 & B+C+A
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A+B+C \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
 & A+C+B \arrow[dl] \\
C+A+B &
\end{tikzcd}
.
$$

Ces deux diagrammes sont équivalents lorsque, comme on l'a supposé, les flèches dans $\mathscr{C}$ sont inversibles, mais il est préférable, pour des raisons qui apparaîtront plus bas, de se donner l'information redondante qui consiste en ces 2 axiomes.

c) On introduit la condition supplémentaire

$$1_{A+B} = \tau_{B,A} \circ \tau_{A,B} : A+B \to B+A \to A+B \, .$$

On est alors en présence (à l'existence des inverses près) d'une catégorie de Picard(*).

d) Enfin, de nature différente des précédentes est la condition $\tau_{A,A} = 1_{A+A}$. C'est le cas Picard strict.

(*) tu dirais Picard commutative

Au niveau des complexes de monoïdes (groupes) l'axiome des catégories tressées dit que le module croisé $G_1 \xrightarrow{\partial} G_0$ possède une structure supplémentaire : c'est la donnée d'une flèche [,] : $G_0 \times G_0 \to G_1$ qui relève le commutateur de G_0 et qui satisfait a une condition de bilinéarité (tordue) décrite par les deux hexagones. Dans le cas Picard, on a une condition supplémentaire, à laquelle la flèche [,] est astreinte, à savoir $[x,y][x,y] = e \;\; \forall x,y \in G_0$. Enfin en **d**), on requiert que $[x,x] = e$. On doit penser à **b**) et **c**) comme des conditions de commutativité de plus en plus forte que l'on peut imposer à la catégorie $\mathscr{C}$. Dans le cas **b**) ceci revient à dire que le complexe G peut être translaté à gauche en un complexe $G[1]$ concentré en degrés (–2,–1), qui correspond par un Dold-Puppe non-commutatif à un groupe simplicial dont le classifiant est le groupe associé à G. Lorsque l'on est dans le cas Picard **c**) on peut de même translater G de deux crans vers la gauche en $G[2]$, concentré en degré [-3,-2]. Dans ce cas le groupe simplicial associé à G est le classifiant d'un classifiant, donc encore plus commutatif que précédemment. En fait, il n'y a pas toute une hiérarchie de conditions supplémentaires, lorsque l'on continue à translater G vers la gauche, et Picard est la condition de commutativité la plus forte (Picard stricte exceptée) que l'on peut imposer à une catégorie. Ceci se constate en examinant où vivent les invariants de Postnikoff associés aux catégories en question. Si l'on pose $A = \pi_0\mathscr{C}$, $B = \pi_1\mathscr{C}$, on a ($K(A,n)$ désignant l'objet d'Eilenberg - Mac Lane associé à A, et S le morphisme de suspension) :

$$H^{n+2}(K(A,n);B) \xrightarrow[\sim]{S} H^5(K(A,3);B) \xrightarrow{S} H^4(K(A,2);B) \xrightarrow{S} H^3(K(A,1);B)$$

condition correspondante : (*c*) (*b*) (*a*)

C'est un fait général que $H^{n+i+1}(K(A,n+1);B) \xrightarrow{S} H^{n+i}(K(A,n),B)$ est un isomorphisme lorsque $n>i$, ce qui montre qu'il n'y a guère de conditions plus fortes que (*c*). Au niveau des modules croisés, on dira qu'un module croisé de type (*c*) est stable, et ce qui précède montre que l'on peut le translater vers la gauche autant qu'on le souhaite. Il reste à parler de la condition Picard stricte. Du point de vue adopté ici, il suffit de remarquer que $H_n(K(A,n)) \simeq A$ $(n \geq 1)$ et $H_i(K(A,n)) = 0$ $i<n$ (il faudrait vraiment parler d'homologie réduite pour que ceci soit vrai lorsque $i=0$). Ainsi la suite spectrale du coefficient universel définit une flèche

$$Ext^2(A,B) \longrightarrow H^{n+2}(K(A,n),B)$$

qui, pour n=3, correspond, au niveau des catégories, à l'oubli de la condition stricte $1 = \tau_{A,A} : A+A \to A+A$ (resp. pour n=1,2, à l'oubli de cette condition et de diverses autres conditions mentionnées plus haut). On comprend ainsi dans quelle mesure Picard stricte est d'une autre nature que les conditions (**a**), (**b**), (**c**) précédentes.

Il est temps de passer aux 2-catégories. Je suppose pour simplifier que la composition des 1-flèches est strictement associative. On doit tout d'abord imposer à $\mathscr{C}$ d'être un 2-groupoïde. Je suis ici un peu moins sûr de mon fait que dans ce qui suit, et je te propose les axiomes minimaux suivants pour un 2-groupoïde. C'est une 2-catégorie pour laquelle

i) Toute 2-flèche de $\mathscr{C}$ est inversible.

ii) Pour toute 1-flèche $f : X \to Y$ dans $\mathscr{C}$, il existe une 1-flèche quasi-inverse $g : Y \to X$, et des 2 flèches $\theta_X : 1_X \Rightarrow g \circ f$, $\theta_Y : 1_Y \Rightarrow f \circ g$.

iii) Enfin, j'imagine que l'on doit exiger la compatibilité de cette contrainte de (quasi)-inverse $g = f^{-1}$ pour la composition des flèches à l'associativité, c'est-à-dire que les deux 2-flèches $f \circ \theta_X$ et $\theta_Y \circ f : f \Rightarrow f \circ f^{-1} \circ f$ coïncident.

Par ailleurs on requiert que les objets de $\mathscr{C}$ soient inversibles. J'espère qu'il suffit de demander à ce propos que pour tout objet X de $\mathscr{C}$, les foncteurs $(\ )+X$ et $X+(\ ) : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ soient des équivalences.

Ces conditions étant imposées (ou renforcées éventuellement : peut être as-tu une opinion là-dessus ?), soit donc $\mathscr{C}$ un tel 2-groupoïde à objets inversibles, muni d'une loi de groupe $+ : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$. Les conditions d'associativité supérieures sont assez bien connues, et sont dues, dans le cadre topologique, à J. Stasheff (Homotopy associativity of H-espaces I, Trans. A.M.S. 108, 275-292, 1963). On se donne alors, fonctoriellement en les objets, pour tous objets A,B,C de $\mathscr{C}$, une 1-flèche

$$\xi_{A;B,C} : (A+B)+C \longrightarrow A+(B+C) ,$$

et pour tout quadruplet (A,B,C,D) d'objets de $\mathscr{C}$, une 2-flèche "Pentagone" $P_{A,B,C,D}$

$$\begin{tikzcd}
& ((A+B)+C)+D \arrow[rr] \arrow[dl] & & (A+(B+C))+D \arrow[dr] & \\
(A+B)+(C+D) \arrow[drr] & & \overset{P_{A,B,C,D}}{\Longrightarrow} & & A+((B+C)+D) \arrow[dll] \\
& & A+(B+(C+D)) & &
\end{tikzcd}$$

entre les deux 1-flèches qui relient $((A+B)+C)+D$ à $A+(B+(C+D))$. La condition à laquelle doivent satisfaire les 2-flèches pentagonales est une condition qui lie entre elles les 6 pentagones $1_A+P_{B,C,D,E}$, $P_{A+B,C,D,E}$, $P_{A,B+C,D,E}$, $P_{A,B,C+D,E}$, $P_{A,B,C,D+E}$, $P_{A,B,C,D+E}$ et $P_{A,B,C,D}+1_E$ $(\forall\,(A,B,C,D,E) \in ob(\mathscr{C})$, condition dans laquelle interviennent également 3 carrés qui sont trivialement munis de 2-flèches de commutation, par fonctorialité de $\xi_{A,B,C}$.

Je n'écris pas ce diagramme, que tu trouveras explicité, dans un contexte un peu différent dans Mac Lane (Natural Associativity and Commutativity, Rice University Studies 49, 28-46, 1963) (repris dans ses "Selected Works" (p. 423)). Il me semble que l'on a à nouveau alors un énoncé de cohérence pour l'associativité. Un tel énoncé dirait alors que chaque fois que l'on dispose de deux objets $X,Y \in \mathscr{C}$, obtenus en insérant, d'une manière ou d'une autre des paires de parenthèses dans l'expression $A_1+...+A_n$, ainsi que de deux 1-flèches $f,g : X \to Y$ construites en composant des 1-flèches $\xi_{U,V,W}$ (dont chaque source et chaque but s'obtient également en insérant des parenthèses dans $A_1+...+A_n$) alors deux 2-flèches quelconques $P_1,P_2 : f \Rightarrow g$ construites en composant des pentagones, des carrés de commutativité (exprimant comme ci-dessus la fonctorialité de ξ) et leurs inverses coïncident. On pourrait démontrer un tel énoncé de la même manière que Mac Lane démontre dans loc. cit. la cohérence de l'axiome du pentagone dans le cas des 1-catégories, par un argument de récurrence, mais celui-ci risque d'être un peu lourd dans le cas qui nous intéresse. Il me semble que l'on pourra en donner une meilleure démonstration en s'appuyant sur le fait que Stasheff décrit d'un seul coup toutes les conditions d'associativité supérieures (et non pas seulement celles qui concernent cinq objets (A,B,C,D,E). On constate alors que toutes les 2-flèches P_1,P_2 qui nous intéressent vivent quelque part dans l'un des diagrammes de Stasheff, dont les constituants, outre des pentagones et des carrés, sont des objets d'associativité supérieure (3-flèches, 4 flèches, etc...) qui pour nous sont triviaux. Il me semble que ceci devrait permettre de conclure, mais je laisse ce point, encore insuffisamment examiné, de côté pour l'instant, l'assertion de cohérence mentionnée ne paraissant de toutes façons tout à fait crédible.

Le point important de la cohérence est que, comme précédemment, on en déduira que toute 2-catégorie munie d'une 2-flèches de pentagone satisfaisant à la condition que l'on a dite est 2-équivalente à une 2-catégorie pour laquelle l'associativité est stricte (c'est-à-dire $(A+B)+C = A+(B+C)$), et ceci via un 2-foncteur 2-additif, c'est-à-dire préservant la loi. + en un sens facile à expliciter. L'avantage de passer à cette nouvelle 2-catégorie est que les diagrammes de commutativité supérieure dont je vais parler maintenant deviennent beaucoup plus faciles à appréhender. Si tu ne crois pas aux remarques précédentes sur la 2-cohérence des pentagones, ce qui suit reste valable mais n'est plus qu'une étude des conditions de commutativité dans les 2-catégories pour lesquelles l'associativité est stricte.

Pour comprendre quelles doivent être les conditions de commutativité en question, on observe que si $\mathcal{C}$ est une 2-catégorie avec loi + strictement associative ou associative de la manière cohérente qui vient d'être expliquée, alors on peut parler du classifiant du nerf $N(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$. Dans le cas strict $N(\mathcal{C})$ est un groupe simplicial, il n'y a donc pas de problème à définir son classifiant de la manière usuelle

$$\cdots \quad \overrightarrow{\overrightarrow{\overrightarrow{\rightarrow}}} \quad N\mathcal{C}\times N\mathcal{C} \;\overrightarrow{\overrightarrow{\rightarrow}}\; N\mathcal{C} \rightrightarrows e$$

mais on peut également en construire un dans le cas cohérent. Si on note $(N\mathcal{C})[1]$ l'objet en question, alors celui-ci admet une décomposition de Postnikoff en un triangle

$$L[2] \longrightarrow (N\mathcal{C})[1] \longrightarrow A[1] \xrightarrow{\partial} L[3]$$

où $A = \pi_0\mathcal{C}$ désigne le groupe des classes d'isomorphismes d'objets de $\mathcal{C}$ et $L^\cdot$ est le 1-groupoïde Aut(0) des automorphismes (et de leurs 2-flèches) de 0. $(N\mathcal{C})[1]$, c'est-à-dire $\mathcal{C}$ muni de sa loi +, peut être entièrement reconstruit à partir de A et de L, une fois connue la classe d'homotopie de $\partial \in [A[1],L[3]]$ associée.

Il convient à ce propos de noter que, puisque $\mathcal{C}$ satisfait aux conditions d'associativité, Aut(0) est une catégorie de Picard, et ainsi $L[3]$ a un sens. Il revient au même de dire que si l désigne le module croisé associé à L, muni d'un relèvement [,] du commutateur, comme il a été expliqué plus haut, le groupe $H^3(A,l)$ (au sens de la cohomologie du groupe A, à valeurs dans le module croisé l) à un sens bien que l ne soit pas un complexe de groupes abéliens. Le cas le plus évident est celui où tous les objets de Aut(0) sont isomorphes, et donc $\pi_0(\mathcal{C}) = A$ et $B = \pi_1(\mathrm{Aut}(0)) = \pi_2\mathcal{C}$ sont les seuls groupes d'homotopie de $\mathcal{C}$. B est donc un groupe abélien et ∂ est un élément de $H^4(A,B)$ au sens le plus usuel, d'ailleurs facile à expliciter : pour $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in A^4$, et $X_1,\dots,X_4$ quatre objets de $\mathcal{C}$, la classe d'isomorphisme de X_i étant a_i, la 2-flèche $P_{X_1,\dots,X_4}$ définit un élément $f(a_1,a_2,a_3,a_4) \in B$, lequel est un 4-cocycle en vertu de la compatibilité mentionnée des pentagones.

En revenant au cas général, on observe que la donnée de conditions de commutativité dans la 2-catégorie $\mathscr{C}$ équivaut à la possibilité de définir les translatés successifs $(N\mathscr{C})[2], N\mathscr{C}[3],\dots$ de $N\mathscr{C}$, c'est-à-dire à la question de pouvoir disposer de translatés à gauche de la flèche ∂. On est ainsi amené à considérer les groupes de cohomologie $H^{n+2}(K(A,n),L)$ pour $n \geq 1$ (resp. $H^{n+3}(K(A,n),B)$ dans le cas où $\pi_1\mathscr{C} = 0$ examiné ci-dessus). En se bornant à ce dernier cas, on constate que ces groupes sont reliés entre eux par des morphismes de suspension (cf. les flèches correspondantes dans le cas des 1-catégories p. 3) :

$$\xrightarrow{\sim} H^7(K(A,4),B) \xrightarrow{S} H^6(K(A,3),B) \xrightarrow{S} H^5(K(A,2),B) \xrightarrow{S} H^4(K(A,1),B)$$

Or les complexes de chaînes de $K(A,2)$, $K(A,3)$, $K(A,4)$ sont connus explicitement. Il suffit donc de parcourir dans le sens inverse, en partant des groupes de cohomologie $H^{n+3}(K(A,n),B)$, le chemin effectué plus haut des pentagones aux cocycles définissant la classe ∂, pour aboutir à des conditions de commutativité successives que l'on peut imposer à la 2-catégorie $\mathscr{C}$. Lorsque ∂ provient d'un élément de $H^{n+3}(K(A,n),B)$ avec $n=2$ (resp. 3, resp. 4), on dira que la 2-catégorie $\mathscr{C}$ est tressée (resp. t_2, resp. de Picard). Il n'y a pas de conditions plus restrictives correspondant à $n \geq 5$, en vertu de l'isomorphisme $H^{n+3}(K(A,n),B) \longrightarrow H^{n+i+1}(K(A,n+1),B)$ pour $n>3$ mentionné plus haut. Voici donc les conditions sur les 2-catégories que l'on est successivement amené à imposer :

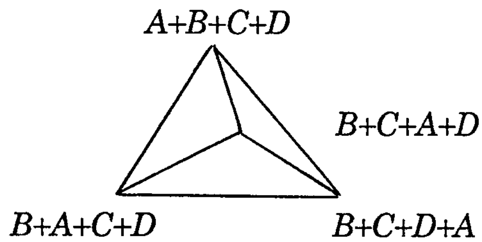
a) 2-catégorie tressée :

Puisque l'associativité est stricte, l'hexagone de Mac Lane est devenu un triangle. On se donne donc, fonctoriellement en les objets, une 1-flèche $\tau : A+B \to B+A$, et pour tout triplet d'objets A,B,C, deux 2-flèches d'hexagone (cf. p. 2)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & A+B+C \arrow[dl] \arrow[dd] \\ B+A+C \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "\Nearrow"] & \\ & B+C+A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & A+B+C \arrow[dl] \arrow[dd] \\ A+C+B \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "\Nearrow"] & \\ & C+A+B \end{tikzcd}$$

que l'on notera respectivement $H_{A;B,C}$ et $H_{A,B;C}$.

Chacun de ces triangles-hexagones satisfait à des conditions de compatibilité. La première s'exprime, lorsque l'associativité est stricte, sur le trétraèdre



dont les faces sont $H_{A;B+C,D}$, $H_{A;B,C+D}$, $H_{A;B,C}+1_D$, $1_B+H_{A;C,D}$. Une façon plus conceptuelle de comprendre cette condition est la suivante : en négligeant les $-+1_C$, et 1_A+-, on peut considérer la 2-flèche $H_{A;B,C}$:

$$\begin{tikzcd} & A+B+C \arrow[dl, "\tau_{A,B}"'] \arrow[ddr, "\tau_{A,B+C}"] & \\ B+A+C \arrow[drr, "\tau_{A,C}"'] \arrow[rr, phantom, "\Nearrow H_{A;B,C}"] & & \\ & & B+C+A \end{tikzcd}$$

comme une loi de composition partielle

$$\tau_{A,B} * \tau_{A,C} \overset{H_{A;B,C}}{\Longrightarrow} \tau_{A,B+C}$$

La condition décrite ci-dessus exprime alors que cette loi est associative, c'est-à-dire que les deux 2-flèches

$$\tau_{A,B} * \tau_{A,C} * \tau_{A,D} \Rightarrow \tau_{A,B+C+D}$$

définies par $H_{A;-,-}$ coïncident. De la même manière on requiert que la 2-flèche $H_{A,B;C} : \tau_{A,C} * \tau_{B,C} \Rightarrow \tau_{A+B,C}$ satisfasse à la condition de compatibilité qui exprime l'associativité de la loi correspondante en la seconde variable. On requiert également que ces 2 "lois de groupe" partielles soient compatibles, au sens où on l'entend pour les biextensions, c'est-à-dire que les 2 manières de calculer la 2-flèche

$$\begin{array}{ccc} \tau_{A,C} * \tau_{A,D} * \tau_{B,C} * \tau_{B,D} & & \\ \| & \Longrightarrow & \tau_{A+B,C+D} \\ \tau_{A,C} * \tau_{B,C} * \tau_{A,D} * \tau_{B,D} & & \end{array}$$

coïncident. On notera $\mathcal{H}_{A,B,C,D}$ la 2-flèche en question. Un dernier axiome pour les 2-catégories tressées est la suivant. A partir des 2-flèches H on peut construire un vrai hexagone

$$\begin{tikzcd}
& A+C+B \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "H_{A,B;C}\ \Downarrow"] & \\
A+B+C \arrow[ur] \arrow[rr, dash] \arrow[d] & & C+A+B \arrow[d] \\
B+A+C \arrow[rr, dash] \arrow[dr] & & C+B+A \\
& B+C+A \arrow[ur] \arrow[u, phantom, "H_{B,A;C}\ \Uparrow"] &
\end{tikzcd}$$

que l'on pourrait appeler hexagone de Yang-Baxter à cause de sa présence dans la définition des équations de même nom. Le carré central possède une 2-flèche de fonctorialité triviale. On observe que cet hexagone peut être également construit à partir des triangles de type $H_{A;B,C}$:

$$\begin{tikzcd}
 & & A+C+B \arrow[drr] \arrow[ddrr, "H_{A;C,B}\ \Swarrow"'] & & \\
A+B+C \arrow[urr] \arrow[d] \arrow[ddrr, "H_{A;B,C}"] & & & & C+A+B \arrow[d] \\
B+A+C \arrow[drr, "\Uparrow"'] & & & & C+B+A \\
 & & B+C+A \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

Le dernier axiome dit que les deux manières ainsi décrites de construire une 2-flèche de Yang-Baxter coïncident.

b) 2-catégories t_2 :

On suppose maintenant données, outre les 2-flèches $H_{A;B,C}$ et $H_{A,B;C}$, une 2-flèches $S_{A,B} : 1_{A+B} \Rightarrow \tau_{B,A} \circ \tau_{A,B}$. La donnée de cette 2-flèche permet donc d'inverser $\tau_{A,B}$ en $\tau_{B,A}$ (à $s_{A,B}$ près). J'avais remarqué p. 2 que les deux sortes d'hexagones-triangles de Mac Lane étaient équivalentes, pourvu que l'on veuille bien inverser les fèches $\tau_{A,B}$. L'axiome des 2-catégories t_2 dit que les deux 2-flèches $H_{A;B,C}$ et $H_{A,B;C}$ peuvent se déduire l'une de l'autre par le procédé d'équivalence en question, les $\tau_{A,B}$ étant inversés au moyen des 2-flèches $S_{A,B}$. Il est inutile désormais de se donner deux hexagones de Mac Lane : la donnée d'une 2-flèche $H_{A;B,C}$ et des 2-flèches $S_{A,B}$ permettra de reconstituer $H_{A,B;C}$.

c) 2-catégories de Picard :

Outre les conditions précédentes, on requiert que la 2-flèche $S_{A,B}$ satisfasse à une condition de style $S_{A,B} = S_{B,A}$. On entend par là que les 2-flèches $S_{A,B} * \tau_{A,B}$:

$$\begin{tikzcd}
A+B \arrow[r, "\tau"'] \arrow[rr, bend left, "1"] & B+A \arrow[r, "\tau"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow S_{A,B}"] & A+B \arrow[r, "\tau"'] & B+A
\end{tikzcd}$$

et $\tau_{A,B} * s_{B,A}$

$$\begin{tikzcd}
A+B \arrow[r, "\tau"'] & B+A \arrow[r, "\tau"'] \arrow[rr, bend left, "1"] & A+B \arrow[u, phantom, "\Downarrow s_{B,A}"] \arrow[r, "\tau"'] & B+A
\end{tikzcd}$$

coïncident. Ceci dit très précisément que $\tau_{A,B}$ est bien le (quasi)-inverse de $\tau_{A,B}$, au sens où on l'a dit page 4.

Remarques :

1) On peut, de la même manière, définir les 2-catégories de Picard strictes. Au niveau des invariants de Postnikoff, ceci revient à comprendre la flèche de la suite spectrale du coefficient universel

$$Ext^3(G,H) \longrightarrow H^{n+3}(K(G,n);H)$$

ce qui peut être fait explicitement puisque l'on dispose d'une résolution canonique de G. On trouve alors, comme il se doit, pour tout objet A, une 2-flèche ξ_A :

$$\begin{tikzcd}
A+A \arrow[r, "1_{A+A}"] \arrow[r, bend right=60, "\tau_{A,A}"'] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\xi_A"] & A+A
\end{tikzcd}$$

astreinte à satisfaire aux conditions suivantes

α) "ξ_A est additive en A" c'est-à-dire qu'il existe une compatibilité entre ξ_A, ξ_B et ξ_{A+B}. Précisément, la 2-flèche $\xi_{A+B} : 1_{A+B+A+B} \Rightarrow \tau_{A+B,A+B}$ est égale à la 2-flèche composée suivante :

$$
\begin{tikzcd}
A+B+A+B \arrow[rrrr, "1"] \arrow[d, equal] \arrow[rrrrd, phantom, "\Downarrow 1+S_{A,B}+1"] & & & & A+B+A+B \arrow[d, equal] \\
A+B+A+B \arrow[r, "\tau_{B,A}"] \arrow[d, equal] & A+A+B+B \arrow[rr, "1"'] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\xi_A"] & & A+A+B+B \arrow[r, "\tau_{A,B}"'] \arrow[d, equal] \arrow[dl, phantom, "\Downarrow\xi_B"] & A+B+A+B \arrow[d, equal] \\
A+B+A+B \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[drrrr, phantom, "\mathcal{H}_{A,B}\Downarrow"] & A+A+B+B \arrow[r, "\tau_{A,A}"'] & A+A+B+B \arrow[r, "\tau_{B,B}"'] & A+A+B+B \arrow[r] & A+B+A+B \arrow[d, equal] \\
A+B+A+B \arrow[rrrr, "\tau_{A+B,A+B}"'] & & & & A+B+A+B
\end{tikzcd}
$$

où $\mathcal{H}_{A,B}$ désigne la 2-flèche $\mathcal{H}_{A,B,A,B}$ introduite p. 9, elle-même obtenue en composant les 2-flèches $H_{A;A,B}$, $H_{B;A,B}$ et $H_{A,B;A+B}$.

β) "$\xi_A.\xi_A = S_{A,A}$" : la 2-flèche composée

$$
\begin{tikzcd}
A+A \arrow[r, "\tau_{A,A}"'] \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\xi_A\Downarrow"] & A+A \arrow[r, "\tau_{A,A}"'] \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\xi_A\Downarrow"] & A+A
\end{tikzcd}
$$

coïncide avec la 2-flèche $S_{A,A}$ définie plus haut.

Ceci termine la discussion des lois de groupes dans les 2-catégories. Pour être complet, je finirai par mentionner deux sortes de constructions liées à celle-ci, qui figurent dans la littérature, sans toutefois prétendre être exhaustif sur ce point. Au niveau des conditions de commutativité dans les catégories, on dispose de la notion très générale, mais peu explicite de Γ-catégorie, due à G. Segal, ainsi qu'une construction dans le cas des espaces topologiques appelée E_∞-espaces définie par J.-P. May. Dans les deux cas, il s'agit de construire des espaces de lacets infinis, c'est-à-dire qu'il s'agit du cas appelé ici, pour des 1 ou 2-catégories, le cas Picard. L'autre variante que je veux mentionner concerne les 2-catégories où l'associativité est stricte. On souhaite associer à une telle 2-catégorie un complexe de longueur 2 de groupes non abéliens, munis de structure supplémentaire, qui soit l'analogue du module croisé associé à une 1-catégorie. Le cas où la loi de composition n'est munie d'aucune condition de commutativité a été explicité par D. Conduché (Rennes). Il existe également une variante style bicomplexe de cette construction, appelée carré croisé, qui a été définie par J.-L. Loday et utilisé notamment par R. Brown et lui-même.

Bien cordialement.

Larry Breen