

## Méthodes Numériques II

Sup'Galilée, Ingénieurs Energétique, 1ère année (S6)

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications  
Institut Galilée  
Université Paris XIII.

20/02/2024

## Plan du cours

- Chapitre I : Algorithmique numérique
- Chapitre II : Dérivation numérique
- Chapitre III : Résolution numérique des E.D.O.**
- Chapitre IV : Résolution numérique des E.D.P.

## Plan

- 1 Exemples d'E.D.O.
- 2 Définitions et résultats
- 3 Problème de Cauchy
- 4 Différences finies  $m = 1$

- 5 Différences finies  $m > 1$
- 6 Méthodes à un pas**
- 7 Méthodes à pas multiples
- 8 Méthodes de prédiction-corrrection
- 9 Application

Soit  $\mathbf{y}$  la solution d'un problème de Cauchy (vectoriel) et  $(t^n)_{n=0}^N$  la discrétisation régulière de l'intervalle  $[t^0, t^0 + T]$ .

### ♥ Définition 6.1: Méthodes à un pas

Les méthodes à un pas utilisent la formule générale:

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\Phi(t^n, \mathbf{y}^{[n]}, h) \quad (1)$$

Le schéma (1) converge sur l'intervalle  $[t^0, t^0 + T]$  si, pour la suite des  $\mathbf{y}^{[n]}$  calculés, l'écart maximum avec la solution exacte diminue quand le pas  $h$  diminue:

$$\lim_{h=\frac{T}{N} \rightarrow 0} \max_{n \in \{0, \dots, N\}} \|\mathbf{y}^{[n]} - \mathbf{y}(t^n)\|_{\infty} = 0$$

Pour la méthode d'Euler progressif  $\Phi(t, \mathbf{y}, h) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ .

### ♥ Definition 6.2: Consistance

Le schéma de calcul (1) est consistant avec le problème de Cauchy (3.9)-(3.10) si

$$\lim_{h=\frac{T}{N} \rightarrow 0} \max_n \left\| \frac{\mathbf{y}(t^{n+1}) - \mathbf{y}(t^n)}{h} - \Phi(t^n, \mathbf{y}(t^n), h) \right\|_{\infty} = 0$$

Cela signifie que le schéma doit être une approximation vraisemblable, bien construite.

### 📖 Théorème 7

Le schéma (1) est consistant avec le problème de Cauchy (3.9)-(3.10) si  $\Phi(t, \mathbf{y}, 0) = f(t, \mathbf{y})$ .

### ♥ Definition 7.1: Stabilité

La méthode est stable si une petite perturbation sur  $\mathbf{y}^{[0]}$  ou  $\Phi$  n'entraîne qu'une petite perturbation sur la solution approchée, et cela quel que soit le pas  $h$ .

### 📖 Théorème 8

Si  $\Phi(t, \mathbf{y}, h)$  vérifie la condition de Lipschitz en  $\mathbf{y}$  alors la méthode est stable.

### 📖 Théorème 9

Si la méthode est **stable et consistante**, alors elle **converge** pour n'importe quelle valeur initiale.

### ♥ Definition 9.1: Ordre d'un schéma

Le schéma (1) est d'ordre  $p$  si la solution  $\mathbf{y}$  du problème de Cauchy (3.9)-(3.10) vérifie

$$\max_n \left\| \frac{\mathbf{y}(t^{n+1}) - \mathbf{y}(t^n)}{h} - \Phi(t^n, \mathbf{y}(t^n), h) \right\|_{\infty} = \mathcal{O}(h^p)$$

### 📖 Lemme 9.2

Soient  $\mathbf{y}$  la solution du problème de Cauchy (3.9)-(3.10). et  $(\mathbf{y}^{[n]})_{n \in [0, N]}$  donnés par un schéma à un pas (1) d'ordre  $p$  avec  $\mathbf{y}^{[0]} = \mathbf{y}(t^0)$ . On a alors

$$\max_{n \in [0, N]} \left\| \mathbf{y}(t^n) - \mathbf{y}^{[n]} \right\|_{\infty} = \mathcal{O}(h^p) \quad (2)$$

### 📖 Proposition

Le schéma d'Euler progressif est une méthode à un pas d'ordre 1.

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \quad t \in [0, 4\pi] \text{ avec } y(0) = 0 \quad (\text{sol.ex. } y(t) = \sin(t) + t)$$

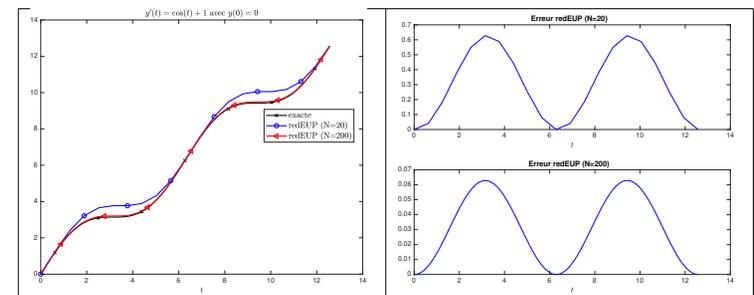


Figure: Méthode d'Euler progressive : vérification numérique de l'ordre

Autre courbe pertinente?

### Proposition

Le schéma d'Euler progressif est une méthode à un pas d'ordre 1.

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \quad t \in [0, 4\pi] \text{ avec } y(0) = 0 \quad (\text{sol.ex. } y(t) = \sin(t) + t)$$

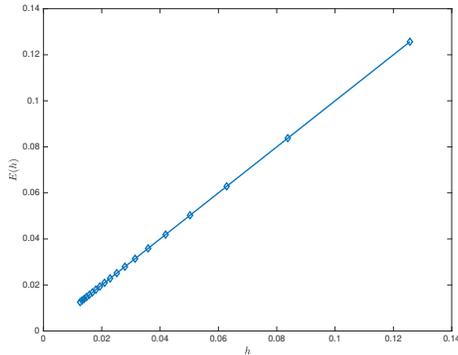


Figure: Méthode d'Euler progressive : vérification numérique de l'ordre

## Méthodes de Runge-Kutta



(a) Carl Runge 1856-1927, mathématicien et physicien allemand



(b) Martin Wilhelm Kutta 1867-1944, Mathématicien allemand



(c) John C. Butcher 1933, Mathématicien appliqué néozélandais

L'idée fondamentale des méthodes de Runge-Kutta est d'intégrer l'équation  $y'(t) = f(t, y(t))$  sur  $[t^n, t^{n+1}]$  et de calculer:

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t)) dt,$$

en utilisant une formule d'intégration numérique à  $q$  points intermédiaires pour évaluer l'intégrale.

## Méthodes de Runge-Kutta

Ce sont des méthodes à un pas :

$$y^{[n+1]} = y^{[n]} + h\Phi(t^n, y^{[n]}, h)$$

avec

$$\Phi(t, y, h) = \sum_{i=1}^q c_i k^{[i]}(t, y, h)$$

et

$$k^{[i]}(t, y, h) = f\left(t + ha_i, y + h \sum_{j=1}^q b_{ij} k^{[j]}(t, y, h)\right), \quad 1 \leq i \leq q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \mathbf{c}^t \end{array} \quad (3)$$

avec  $\mathbb{B} = (b_{ij})_{i,j \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathcal{M}q, q(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$  et  $\mathbf{c} = (c_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$

### Proposition 9.3: (admis)

- Les méthodes de Runge-Kutta explicites sont stables si  $f$  est contractante en  $y$ .
- Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 0 si

$$a_i = \sum_{j=1}^q b_{ij}.$$

- Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 1 (et donc consistante) si elle est d'ordre 0 et si

$$\sum_{i=1}^q c_i = 1.$$

- Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 2 si elle est d'ordre 1 et si

$$\sum_{i=1}^q c_i a_i = 1/2.$$

- Une méthode de Runge-Kutta est explicite si la matrice  $\mathbb{B}$  est triangulaire inférieure à diagonale nulle :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket, j \geq i, \quad b_{ij} = 0.$$

# Runge-Kutta d'ordre 2

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} & 0 \\ \hline & 1-\alpha & \alpha \end{array} \quad (4)$$

$$\Phi(t, \mathbf{y}, h) = (1 - \alpha)\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) + \alpha\mathbf{f}\left(t + \frac{h}{2\alpha}, \mathbf{y} + \frac{h}{2\alpha}\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\right)$$

- $\alpha = \frac{1}{2}$ , **méthode de Heun** :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\mathbf{f}\left(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$

- $\alpha = 1$ , **méthode d'Euler modifiée** ou **méthode du point milieu** :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$

## Exercice 1

la **méthode de Heun** est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\mathbf{f}\left(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$

**Q.1** Ecrire la fonction algorithmique `REDHeunVec` permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par la méthode de Heun en utilisant au plus  $2N$  évaluation de  $\mathbf{f}$ .

**Q.2** Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode.

# Application

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \quad t \in [0, 4\pi] \text{ avec } y(0) = 0 \quad (\text{sol.ex. } y(t) = \sin(t) + t)$$

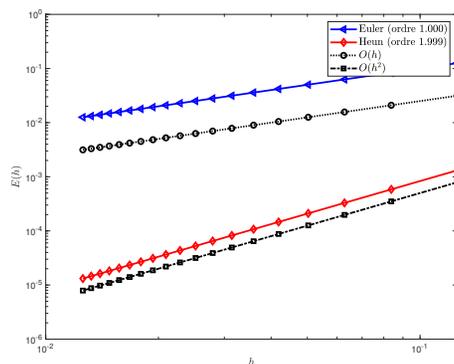


Figure: Méthode de Heun : vérification numérique de l'ordre

# Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode explicite la plus utilisée est donnée par le tableau de Buchler suivant

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array} \quad (5)$$

Ce qui donne le schéma explicite de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \mathbf{k}_2^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_3^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_4^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{k}_3^{[n]}\right) \\ \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1^{[n]} + 2\mathbf{k}_2^{[n]} + 2\mathbf{k}_3^{[n]} + \mathbf{k}_4^{[n]}). \end{aligned} \quad (6)$$

## Exercice 2

la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est donnée par

$$\begin{aligned}k_1^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\k_2^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}k_1^{[n]}\right) \\k_3^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}k_2^{[n]}\right) \\k_4^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + hk_3^{[n]}) \\ \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(k_1^{[n]} + 2k_2^{[n]} + 2k_3^{[n]} + k_4^{[n]}).\end{aligned}$$

Q.1 Ecrire une fonction algorithmique REDRK4Vec permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Q.2 Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode.

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \quad t \in [0, 4\pi] \text{ avec } y(0) = 0 \quad (\text{sol.ex. } y(t) = \sin(t) + t)$$

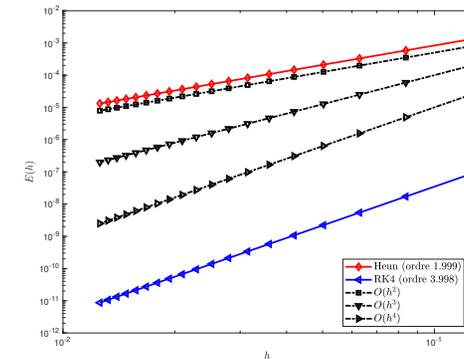


Figure: Méthode RK4 : vérification numérique de l'ordre

mais en prenant des  $h$  de plus en plus petits ...

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \quad t \in [0, 4\pi] \text{ avec } y(0) = 0 \quad (\text{sol.ex. } y(t) = \sin(t) + t)$$

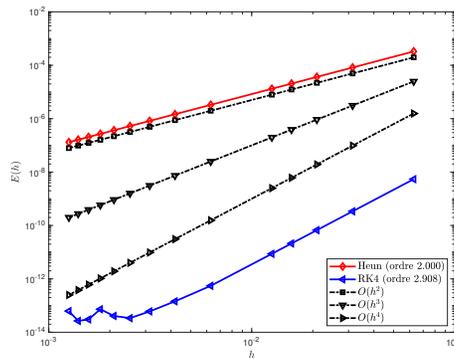


Figure: Méthode RK4 progressive : vérification numérique de l'ordre

## Plan

- 1 Exemples d'E.D.O.
- 2 Définitions et résultats
- 3 Problème de Cauchy
- 4 Différences finies  $m = 1$
- 5 Différences finies  $m > 1$
- 6 Méthodes à un pas
- 7 Méthodes à pas multiples
  - Résultats théoriques
- 8 Méthodes de prédiction-corrrection
- 9 Application

Exemple d'une méthode à deux pas :

$$y^{[n+1]} = y^{[n-1]} + 2hf(t^n, y^{[n]}). \tag{7}$$

Cette méthode est d'ordre 2.

**Definition 10.1: Méthodes à pas multiples**

Les méthodes à pas multiples s'écrivent sous la forme générale:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y^{[n+i]} = h \sum_{i=0}^k \beta_i f(t^{n+i}, y^{[n+i]}) \tag{8}$$

où  $k$  est le nombre de pas,  $\alpha_k \neq 0$  et  $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$ .

Si  $\beta_k = 0$  le schéma est **explicite**, sinon il est **implicite**.

**Definition 10.2: ordre**

Soit  $y$  la solution d'un problème de Cauchy (3.9)-(3.10) et  $y^{[n+k]}$  le terme obtenu par le schéma (8) en prenant  $y^{[n+i]} = y(t^{n+i}), \forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ . Alors, l'erreur locale est

$$\tau(n+k) = \|y(t^{n+k}) - y^{[n+k]}\|_{\infty}.$$

Le schéma (8) est alors d'ordre  $p$  si

$$\tau(n+k) = \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

**Théorème 11: ordre schémas à pas multiples (admis)**

Un schéma à pas multiples de type (8) est d'ordre  $p$  si et seulement si

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i t^q = q \sum_{i=0}^k \beta_i t^{q-1}, \quad \forall q \in \llbracket 1, p \rrbracket.$$

**Théorème 12: stabilité schémas à pas multiples (admis)**

Soit une méthode à pas multiples donnée par (8). On note  $P$  le polynôme défini par

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \alpha_i \lambda^i.$$

La méthode à pas multiples est **stable**, si

- toutes les racines de  $P$  sont de module inférieur ou égal à 1,
- une racine de module égal à 1 est une racine simple de  $P$ .

**Théorème 13: convergence (admis)**

On suppose que les  $k$  valeurs initiales vérifient,

$$\|y(t^i) - y^{[i]}\| \leq C_0 h^p, \quad \forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket.$$

Si le schéma (8) est **stable et d'ordre  $p$** , alors il est **convergent** d'ordre  $p$  :

$$\|y(t^n) - y^{[n]}\| \leq Ch^p, \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

**Exemples de schémas à pas multiples**



*John Couch Adams* 1819-1892, mathématicien et astronome britannique



*Francis Bashforth* 1819-1912, mathématicien appliqué britannique



(a) *Forest Ray Moulton* 1872-1952, mathématicien et astronome américain

- Méthodes **explicites** d'Adams-Bashforth
- Méthodes **implicites** d'Adams-Moulton

## Méthodes explicites d'Adams-Bashforth

On note en abrégé  $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ . Voici trois schémas :

- Ordre 2 à 2 pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} (3\mathbf{f}^{[n]} - \mathbf{f}^{[n-1]}).$$

- Ordre 3 à 3 pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{12} (23\mathbf{f}^{[n]} - 16\mathbf{f}^{[n-1]} + 5\mathbf{f}^{[n-2]}).$$

- Ordre 4 à 4 pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} (55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]}).$$

## Exercice 3

La **méthode de Adam-Bashforth d'ordre 4** explicite est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} (55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]}). \quad (9)$$

avec  $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ .

**Q.1** Ecrire la fonction algorithmique *REDAB4Vec* permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par cette méthode.

Initialisation d'un schéma à pas multiples avec un schéma à un pas du **même ordre au moins**

## Méthodes implicites d'Adams-Moulton

On note en abrégé  $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ . Voici trois schémas :

- Ordre 2 à 1 pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} (\mathbf{f}^{[n+1]} + \mathbf{f}^{[n]}).$$

- Ordre 3 à 2 pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{12} (5\mathbf{f}^{[n+1]} + 8\mathbf{f}^{[n]} - \mathbf{f}^{[n-1]}).$$

- Ordre 4 à 3 pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} (9\mathbf{f}^{[n+1]} + 19\mathbf{f}^{[n]} - 5\mathbf{f}^{[n-1]} + \mathbf{f}^{[n-2]}).$$

## Plan

- 1 Exemples d'E.D.O.
- 2 Définitions et résultats
- 3 Problème de Cauchy
- 4 Différences finies  $m = 1$

- 5 Différences finies  $m > 1$
- 6 Méthodes à un pas
- 7 Méthodes à pas multiples
- 8 Méthodes de prédiction-corrrection
- 9 Application

## Méthodes de prédiction-corrrection

Une méthode de prédiction-corrrection procède en deux étapes à chacune des itérations :

- **Prédiction** : on calcule une approximation de  $\mathbf{y}(t_{n+1})$  notée  $\widehat{\mathbf{y}}^{[n+1]}$  à l'aide du **schéma explicite**
- **Correction** : on utilise le schéma implicite dans lequel les fonctions  $\mathbf{f}$  utilisant  $\mathbf{y}^{[n+1]}$  sont remplacées par les fonctions  $\mathbf{f}$  utilisant  $\widehat{\mathbf{y}}^{[n+1]}$ .



## Exemple

Méthode d'Euler **explicite** pour **prédicteur** et méthode **implicite** des trapèzes comme **correcteur**.

$$\begin{aligned} \text{Euler explicite : } & \mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \text{Trapèze implicite : } & \mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}(\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \mathbf{f}(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n+1]})) \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{y}}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) & \text{Prédiction} \\ \mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}(\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \mathbf{f}(t^{n+1}, \widehat{\mathbf{y}}^{[n+1]})) & \text{Correction} \end{cases}$$



### Exercice 4

On pose  $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ . La **méthode de Adams-Bashforth d'ordre 4** explicite est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} (55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]})$$

et la **méthode de Adams-Moulton d'ordre 4** implicite par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} (9\mathbf{f}^{[n+1]} + 19\mathbf{f}^{[n]} - 5\mathbf{f}^{[n-1]} + \mathbf{f}^{[n-2]})$$

avec  $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ .

**Q.1** Ecrire la fonction algorithmique **REDPC4Vec** permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par une méthode de prédiction-corrrection utilisant ces deux schémas. On minimisera le nombre d'appel à la fonction  $\mathbf{f}$  dans la boucle principale.



## Plan

1 Exemples d'E.D.O.

2 Définitions et résultats

3 Problème de Cauchy

4 Différences finies  $m = 1$

5 Différences finies  $m > 1$

6 Méthodes à un pas

7 Méthodes à pas multiples

8 Méthodes de prédiction-corrrection

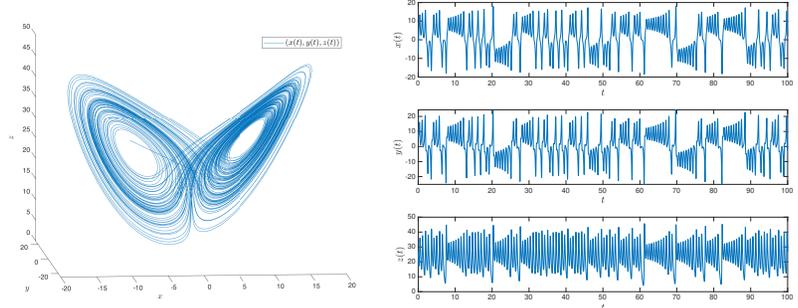
9 Application



Application : modèle de Lorentz

$$\begin{cases} x'(t) = -\sigma x(t) + \sigma y(t) \\ y'(t) = -x(t)z(t) + \rho x(t) - y(t) \\ z'(t) = x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases}$$

$\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3 - x(0) = -8, y(0) = 8, z(0) = \rho - 1.$



Comment reproduire ces graphiques avec Matlab/Octave?

Le problème de Cauchy correspondant au modèle de Lorentz :  
 Trouver  $\mathbf{y} : [t^0, t^0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^3$  solution de

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \forall t \in [t^0, t^0 + T]$$

$$\mathbf{y}(t^0) = \mathbf{y}^{[0]} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ \rho - 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

où  $t^0 = 0, T = 100$  et

$$\mathbf{f} : [0, 100] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(t, \square) \mapsto \mathbf{f}(t, \square) = \begin{pmatrix} -\sigma \square_1 + \sigma \square_2 \\ -\square_1 \square_3 + \rho \square_1 - \square_2 \\ \square_1 \square_2 - \beta \square_3 \end{pmatrix}$$

ou encore ...

Le problème de Cauchy correspondant au modèle de Lorentz :  
 Trouver  $\mathbf{y} : [t^0, t^0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^3$  solution de

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \forall t \in [t^0, t^0 + T]$$

$$\mathbf{y}(t^0) = \mathbf{y}^{[0]} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ \rho - 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

où  $t^0 = 0, T = 100$  et

$$\mathbf{f} : [0, 100] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(t, \mathbf{z}) \mapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} -\sigma z_1 + \sigma z_2 \\ -z_1 z_3 + \rho z_1 - z_2 \\ z_1 z_2 - \beta z_3 \end{pmatrix}$$

```

Listing: Résolution du modèle de Lorentz : script prgLorentz.m
1 sigma=10;rho=28;beta=8/3;
2 fCauchy=@(t,z) fLorentz(t,z,beta,rho,sigma);
3
4 y0=[-8;8;rho-1];
5 [t,Y]=ode45(fCauchy,0,100,y0,10000);
6
7 opts={'interpreter','latex','FontSize',12};
8 figure(1)
9 plot3(Y(1,:),Y(2,:),Y(3,:))
10 legend('$x(t)$','$y(t)$','$z(t)$','Location','northeast',opts{:})
11 xlabel('$x$',opts{:})
12 ylabel('$y$',opts{:})
13 zlabel('$z$',opts{:})
14 view(-5,10)
15
16 figure(2)
17 subplot(3,1,1)
18 plot(t,Y(1,:))
19 xlabel('$t$',opts{:}),ylabel('$x(t)$',opts{:})
20 subplot(3,1,2)
21 plot(t,Y(2,:))
22 xlabel('$t$',opts{:}),ylabel('$y(t)$',opts{:})
23 subplot(3,1,3)
24 plot(t,Y(3,:))
25 xlabel('$t$',opts{:}),ylabel('$z(t)$',opts{:})
    
```

```

Listing: fonction de Cauchy : fichier fLorentz.m
1 fonction w=fLorentz(t,z,beta,rho,sigma)
2 % Fonction de Cauchy associée au modèle de Lorentz
3 % beta, rho et sigma paramètres physiques
4 w=[-sigma*z(1)+sigma*z(2); ...
5   -z(1)*z(3)+rho*z(1)-z(2); z(1)*z(2)-beta*z(3)];
6 end
    
```