

Méthodes Numériques II

Sup'Galilée, Ingénieurs Energétique, 1ère année (S6)

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

18/03/2024

- Chapitre I : Algorithmique numérique
- Chapitre II : Dérivation numérique
- Chapitre III : Résolution numérique des E.D.O.
- Chapitre IV : Résolution numérique des E.D.P.**

Equation de Laplace et équation de Poisson



Pierre-Simon Laplace 1749-1827, mathématicien, astronome, physicien et homme politique français



Siméon Denis Poisson 1781-1840, mathématicien, géomètre et physicien français

$$-\Delta u = f, \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

où Δ est l'opérateur laplacien : $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$.

Equation de Laplace si $f = 0$, sinon équation de Poisson.

$$-\Delta u = f, \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

- **Dirichlet** si on impose, sur une partie de $\partial\Omega$,

$$u = g, \text{ sur } \Gamma_D \subset \partial\Omega. \quad (2)$$

- **Neumann** si on impose sur une partie de $\partial\Omega$,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g, \text{ sur } \Gamma_N \subset \partial\Omega. \quad (3)$$

où $\frac{\partial u}{\partial n} = \langle \mathbf{grad} u, \mathbf{n} \rangle$ avec \mathbf{n} normale extérieure unitaire à Ω

- **Robin** si on impose sur une partie de $\partial\Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g, \text{ sur } \Gamma_R \subset \partial\Omega. \quad (4)$$



Problème de condensateur en 2D

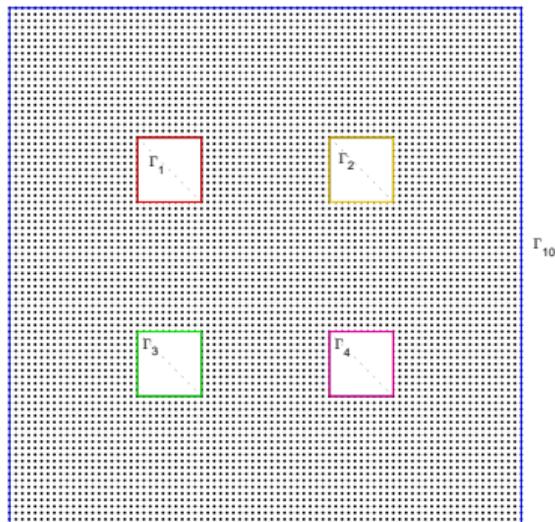
Find $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

$$u = 0 \text{ on } \Gamma_{10},$$

$$u = -1 \text{ on } \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$$

$$u = 1 \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_4,$$





Problème de condensateur en 2D

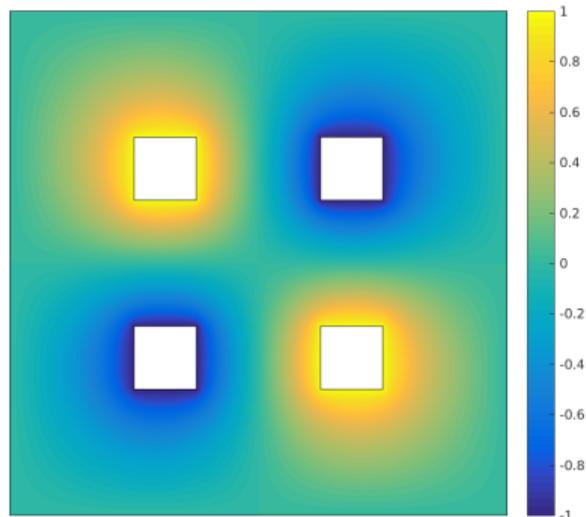
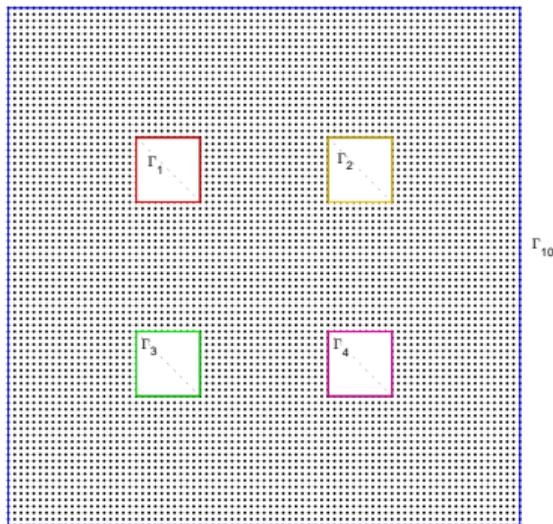
Find $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

$$u = 0 \text{ on } \Gamma_{10},$$

$$u = -1 \text{ on } \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$$

$$u = 1 \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_4,$$





Problème de condensateur en 2D

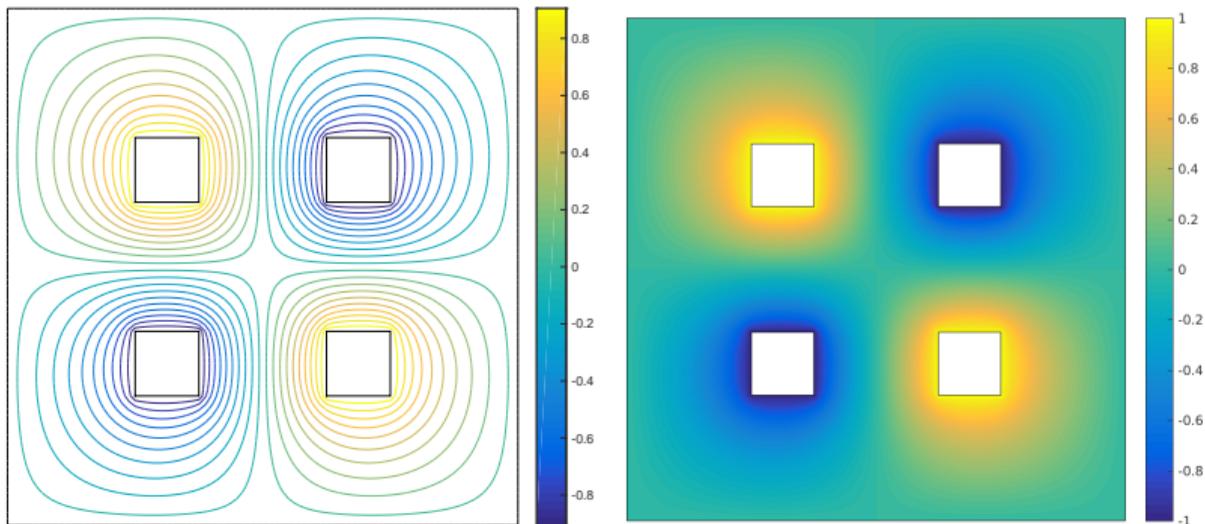
Find $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

$$u = 0 \text{ on } \Gamma_{10},$$

$$u = -1 \text{ on } \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$$

$$u = 1 \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_4,$$





Champ de vitesses en 2D : $\mathbf{V} = \nabla u$

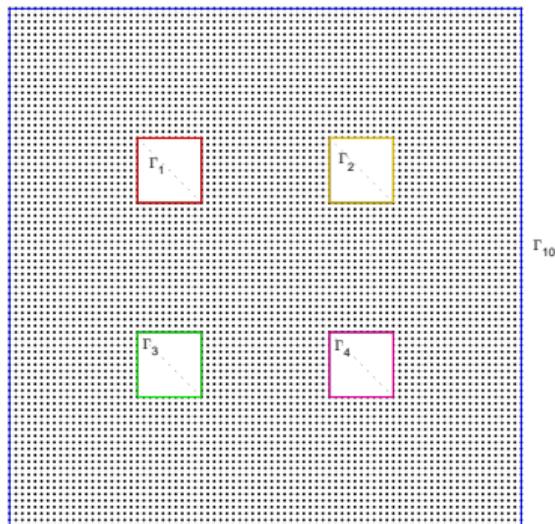
Trouver $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$-\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

$$u = -1 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$$

$$u = 1 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_4,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_{10}.$$





Champ de vitesses en 2D : $\mathbf{V} = \nabla u$

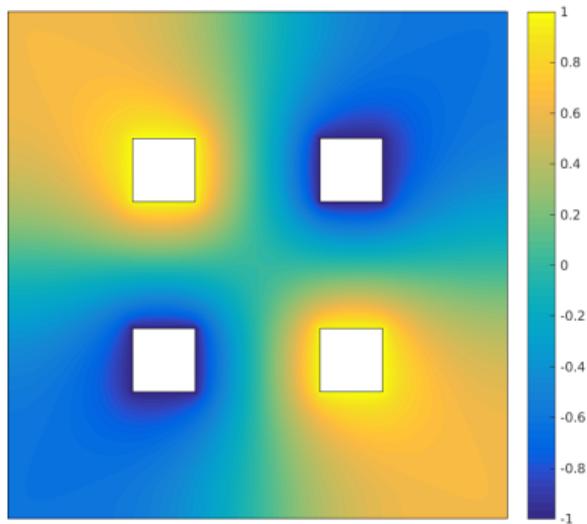
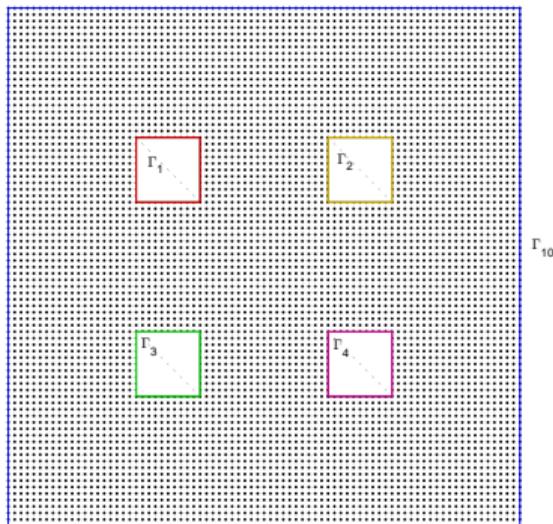
Trouver $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$-\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

$$u = -1 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$$

$$u = 1 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_4,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_{10}.$$





Champ de vitesses en 2D : $\mathbf{V} = \nabla u$

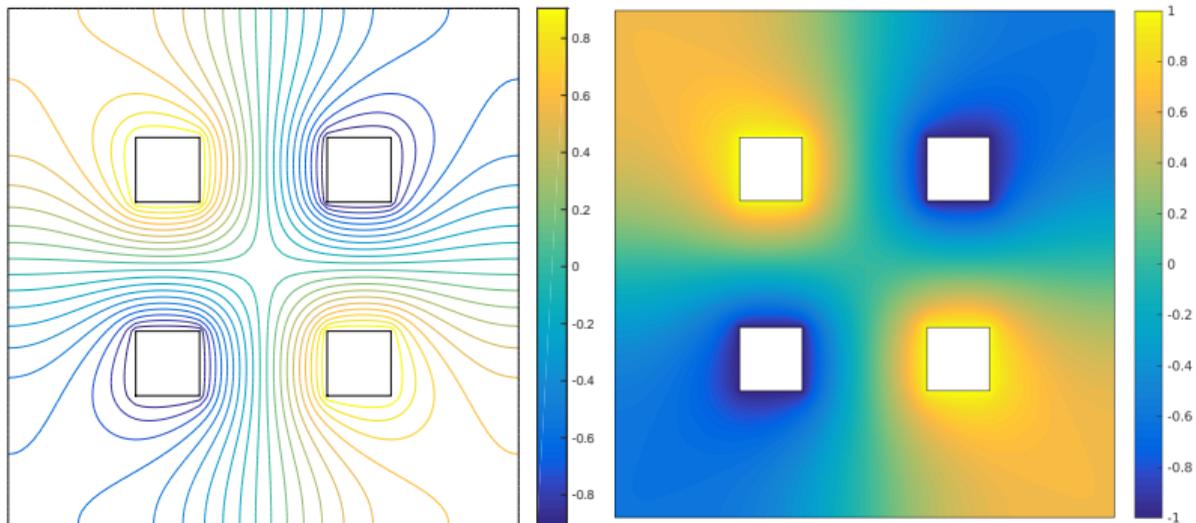
Trouver $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$-\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

$$u = -1 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$$

$$u = 1 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_4,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_{10}.$$





Problème en dimension n

Find $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

où Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^n .

Ce problème est **mal posé** : non unicité de la solution.

$$u \text{ solution} \Rightarrow u + \text{constante solution}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \mathbf{x}) - D\Delta u(t, \mathbf{x}) = \frac{f(t, \mathbf{x})}{\rho c}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall t \in [0, T] \quad (5)$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$
- D , coefficient de diffusivité thermique (en m^2/s),
- f , production volumique de chaleur (en W/m^3),
- ρ , masse volumique du matériau (en kg/m^3),
- c , chaleur spécifique massique du matériau (en $J/kg/K$),
- Δu laplacien (en espace) : $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}$

Problème bien posé ?

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \mathbf{x}) - D\Delta u(t, \mathbf{x}) = \frac{f(t, \mathbf{x})}{\rho c}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall t \in [0, T] \quad (5)$$

Problème bien posé :

- **condition initiale**

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \quad (6)$$

- **conditions aux limites** sur $\partial\Omega$

- ▶ **Dirichlet :**

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \subset \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T] \quad u(t, \mathbf{x}) = g_D(t, \mathbf{x})$$

- ▶ **Neumann :**

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_N \subset \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T] \quad D \frac{\partial u}{\partial n}(t, \mathbf{x}) = g_N(t, \mathbf{x})$$

- ▶ **Robin :**

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_R \subset \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T] \quad D \frac{\partial u}{\partial n}(t, \mathbf{x}) + \alpha u(t, \mathbf{x}) = g_N(t, \mathbf{x})$$



Problème de chaleur en 2D

Find $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = 0 \text{ in } [0, T] \times \Omega,$$

$$u(0, \mathbf{x}) = 20 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

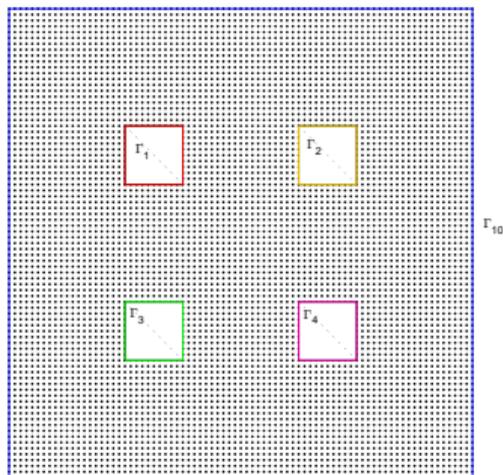
$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma_{10},$$

$$u = g_1 \text{ on } \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$$

$$u = g_2 \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_4,$$

où Ω (cotés de 20cm)

- $D = 98.8 \times 10^{-6}$ (aluminium) ou $D = 23.9 \times 10^{-6}$ (plomb),
- $\forall \mathbf{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $g_1(t, \mathbf{x}) = (20 + 40t)$ si $t \leq 1$ et $g_1(t, \mathbf{x}) = 60$ sinon,
- $\forall \mathbf{x} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_4$, $g_2(t, \mathbf{x}) = (20 + 80t)$ si $t \leq 1$ et $g_2(t, \mathbf{x}) = 100$ sinon.



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, \mathbf{x}) - c^2 \Delta u(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in [0, T] \quad (7)$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$
- $c > 0$ vitesse de propagation de l'onde,

Problème bien posé ?

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, \mathbf{x}) - c^2 \Delta u(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall t \in [0, T]$$

- **conditions initiales**

$$u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \text{[position initiale]} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \text{[vitesse initiale]} \quad (9)$$

- **conditions aux limites sur $\partial\Omega$**

- ▶ **Dirichlet :**

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \subset \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T], \quad u(t, \mathbf{x}) = g_D(t, \mathbf{x})$$

- ▶ **Neumann :**

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_N \subset \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T], \quad c^2 \frac{\partial u}{\partial n}(t, \mathbf{x}) = g_N(t, \mathbf{x})$$

- ▶ **Robin :**

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_R \subset \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T], \quad c^2 \frac{\partial u}{\partial n}(t, \mathbf{x}) + \alpha u(t, \mathbf{x}) = g_N(t, \mathbf{x})$$

Méthodes déterministes :

- **méthode des différences finies**
- méthode des éléments finis
- méthode des volumes finis

Soient $a < b$, $c > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ donnés.

EDP modèle stationnaire 1D

Trouver $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \text{ in }]a, b[, \\ u(a) &= \alpha, \\ u(b) &= \beta. \end{aligned}$$

ou

EDP modèle stationnaire 1D : formulation aux points

Trouver $u(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a, b]$ telle que

$$\begin{aligned} -u''(x) + cu(x) &= f(x) \quad \forall x \in]a, b[, \\ u(a) &= \alpha, \\ u(b) &= \beta. \end{aligned}$$

Chercher u ou $u(x)$, $\forall x \in [a, b]$ (infinité de points!)

EDP modèle stationnaire 1D : formulation aux points

Trouver $u(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a, b]$ telle que

$$-u''(x) + cu(x) = f(x) \quad \forall x \in]a, b[,$$

$$u(a) = \alpha,$$

$$u(b) = \beta.$$

$$x_i = a + ih, \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad \text{avec } h = \frac{b-a}{N}.$$

EDP modèle stationnaire 1D : formulation aux points de discrétisation

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ tels que

$$-u''(x_i) + cu(x_i) = f(x_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, \tag{10}$$

$$u(x_0) = \alpha, \tag{11}$$

$$u(x_N) = \beta. \tag{12}$$



EDP modèle stationnaire 1D : formulation aux points de discrétisation

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ tels que

$$-u''(x_i) + cu(x_i) = f(x_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket,$$

$$u(x_0) = \alpha,$$

$$u(x_N) = \beta.$$

$$u''(x_i) = (D_h^2 u)(x_i) + \mathcal{O}(h^2) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

EDP modèle stationnaire 1D : formulation aux points de discrétisation

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ tels que

$$\begin{aligned} -u''(x_i) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, \\ u(x_0) &= \alpha, \\ u(x_N) &= \beta. \end{aligned}$$

$$u''(x_i) = (D_h^2 u)(x_i) + \mathcal{O}(h^2) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

EDP modèle stationnaire en dimension 1 : formulation aux points de discrétisation (bis)

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ tels que

$$-\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} - \mathcal{O}(h^2) + cu(x_i) = f(x_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad (13)$$

$$u(x_0) = \alpha, \quad (14)$$

$$u(x_N) = \beta. \quad (15)$$



EDP modèle stationnaire en dimension 1 : formulation aux points de discrétisation (bis)

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ tels que

$$-\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} - \mathcal{O}(h^2) + cu(x_i) = f(x_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket,$$
$$u(x_0) = \alpha,$$
$$u(x_N) = \beta.$$

On oublie le $\mathcal{O}(h^2)$ et on pose $u_i \approx u(x_i)$.

💡 EDP modèle stationnaire en dimension 1 : formulation aux points de discrétisation (bis)

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ tels que

$$\begin{aligned} -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} - \mathcal{O}(h^2) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, \\ u(x_0) &= \alpha, \\ u(x_N) &= \beta. \end{aligned}$$

On oublie le $\mathcal{O}(h^2)$ et on pose $u_i \approx u(x_i)$.

💡 EDP modèle stationnaire 1D : schéma aux différences finies

Trouver $u_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ tels que

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + cu_i = f(x_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad (16)$$

$$u_0 = \alpha, \quad (17)$$

$$u_N = \beta. \quad (18)$$



EDP modèle stationnaire 1D : schéma aux différences finies

Trouver $u_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ tels que

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + cu_i = f(x_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad (16)$$

$$u_0 = \alpha, \quad (17)$$

$$u_N = \beta. \quad (18)$$

système linéaire de $N + 1$ équations à $N + 1$ inconnues !

$$\left\{ \begin{array}{lll} u_0 & = & \alpha \quad \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\ -u_2 + \mu u_1 - u_0 & = & h^2 f(x_1) \quad \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\ & \vdots & \\ -u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} & = & h^2 f(x_{N-1}) \quad \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\ u_N & = & \beta \quad \leftarrow \text{eq. en } x_N \end{array} \right.$$

avec $\mu = 2 + ch^2$.

$$\left\{ \begin{array}{lll}
 u_0 & = & \alpha \quad \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\
 -u_2 + \mu u_1 - u_0 & = & h^2 f(x_1) \quad \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\
 -u_3 + \mu u_2 - u_1 & = & h^2 f(x_2) \quad \leftarrow \text{eq. en } x_2 \\
 & & \vdots \\
 -u_{N-1} + \mu u_{N-2} - u_{N-3} & = & h^2 f(x_{N-2}) \quad \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2} \\
 -u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} & = & h^2 f(x_{N-1}) \quad \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\
 u_N & = & \beta \quad \leftarrow \text{eq. en } x_N
 \end{array} \right.$$

$$\mathbb{A} \mathbf{U} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix}
 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 0 & -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
 \vdots & 0 & \dots & 0 & 1 & \mu & -1 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1
 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 f(x_{N-2}) \\ h^2 f(x_{N-1}) \\ \beta \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B} \quad (19)$$

avec $\mu = 2 + ch^2$.



Proposition 3.1: admis

Le schéma aux différences finies (16)-(18) est consistant à l'ordre 2 avec l'EDP (10)-(10) et on a

$$\max_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket} |u(x_i) - u_i| = \mathcal{O}(h^2). \quad (20)$$



Exercice 1: (schéma étudié en cours)

Q.1 Ecrire la fonction `AssembleMat1D` retournant la matrice $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (21)$$

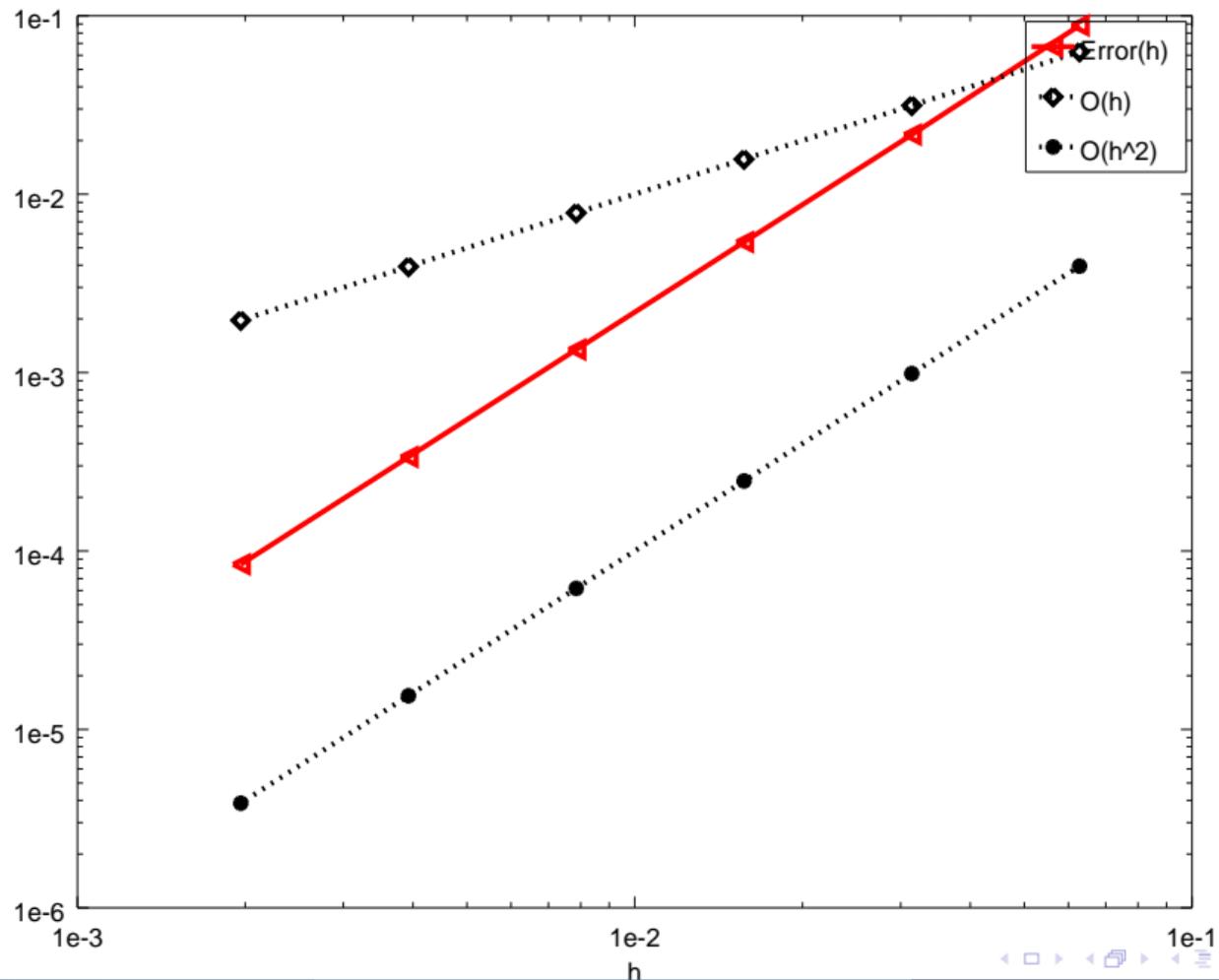
où α , β et γ sont des réels donnés.

On souhaite résoudre par un schéma aux différences finies l'EDP suivante

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \text{ in }]a, b[, \\ u(a) &= \alpha, \\ u(b) &= \beta. \end{aligned}$$

Q.2 En prenant le jeu de données $a = 0$, $b = 2\pi$, $c = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$ et $f : x \mapsto \cos(x^2)$, écrire une fonction permettant de résoudre l'EDP précédente. On pourra utiliser la fonction $\mathbf{X} \leftarrow \text{Solve}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ retournant la solution du système linéaire $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

Q.3 En choisissant judicieusement un jeu de données écrire un programme permettant de vérifier l'ordre du schéma utilisé à l'aide de la formule (20).



Listing: fonction Matlab/Octave AssembleMat1D

```

1 function M=AssembleMat1D(d,alp,bet,gam)
2   M=sparse(d,d);
3   M(1,1)=gam;M(d,d)=gam;
4   for i=2:d-1
5     M(i,i)=alp;
6     M(i,i-1)=bet;M(i,i+1)=bet;
7   end
8 end

```

```

1 function [x,U]=solveEDP1(a,b,c,alp,bet,f,N)
2   h=(b-a)/N;
3   x=a:h:b;
4   A=AssembleMat1D(N+1,2+c*h*h,-1,h*h);
5   B=zeros(N+1,1);
6   B(1)=alp;B(N+1)=bet;
7   for i=2:N
8     B(i)=f(x(i));
9   end
10  B=h*h*B;
11  U=A\B;
12 end

```

Listing: Script Matlab/Octave pour la représentation de l'ordre

```

1 clear all
2 close all
3 % Initialisation des donnees
4 uex=0(x) sin(x.^2);
5 c=1;
6 f=@(x) 4*x.^2*sin(x.^2) - 2*cos(x.^2) + c*sin(x.^2);
7 a=0;b=2*pi;
8 % Calcul des erreurs
9 LN=[100,200,400,800,1600,3200];
10 k=1;
11 for N=LN
12   [x,U]=solveEDP1(a,b,c,uex(a),uex(b),f,N);
13   H(k)=(b-a)/N;
14   E(k)=max(abs(uex(x)'-U));
15   k=k+1;
16 end
17 % Representation graphique
18 loglog(H,E,'r<-','LineWidth',2)
19 hold on
20 loglog(H,H,'kd:','LineWidth',2)
21 loglog(H,H.^2,'k*','LineWidth',2)
22 legend('Error(h)','0(h)','0(h^2)')
23 xlabel('h')

```

- 1 Exemples d'E.D.P.
 - Equation de Laplace/Poisson
 - Equation de la chaleur
 - Equation des ondes

- 2 Méthodes de résolution numérique d'EDP
- 3 Méthode des différences finies 1D
 - EDP stationnaire 1D + Dirichlet
 - EDP stationnaire + CL mixtes



EDP modèle stationnaire 1D avec condition de Dirichlet à droite et Neumann à gauche

Trouver $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$-u'' + cu = f \text{ in }]a, b[, \quad (22)$$

$$u(a) = \alpha, \quad (23)$$

$$u'(b) = \beta. \quad (24)$$

Seule la dernière ligne du système linéaire est à modifier! Remplacer par ???



EDP modèle stationnaire 1D avec condition de Dirichlet à droite et Neumann à gauche

Trouver $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$-u'' + cu = f \text{ in }]a, b[, \quad (22)$$

$$u(a) = \alpha, \quad (23)$$

$$u'(b) = \beta. \quad (24)$$

Seule la dernière ligne du système linéaire est à modifier! Remplacer par ???

$$u'(x_N) = (D_h^+ u)(x_N) + \mathcal{O}(h) = \frac{u(x_N) - u(x_{N-1}))}{h} + \mathcal{O}(h) = \beta.$$

 EDP modèle stationnaire 1D avec condition de Dirichlet à droite et Neumann à gauche

Trouver $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$-u'' + cu = f \text{ in }]a, b[, \quad (22)$$

$$u(a) = \alpha, \quad (23)$$

$$u'(b) = \beta. \quad (24)$$

Seule la dernière ligne du système linéaire est à modifier! Remplacer par ???

$$u'(x_N) = (D_h^+ u)(x_N) + \mathcal{O}(h) = \frac{u(x_N) - u(x_{N-1})}{h} + \mathcal{O}(h) = \beta.$$

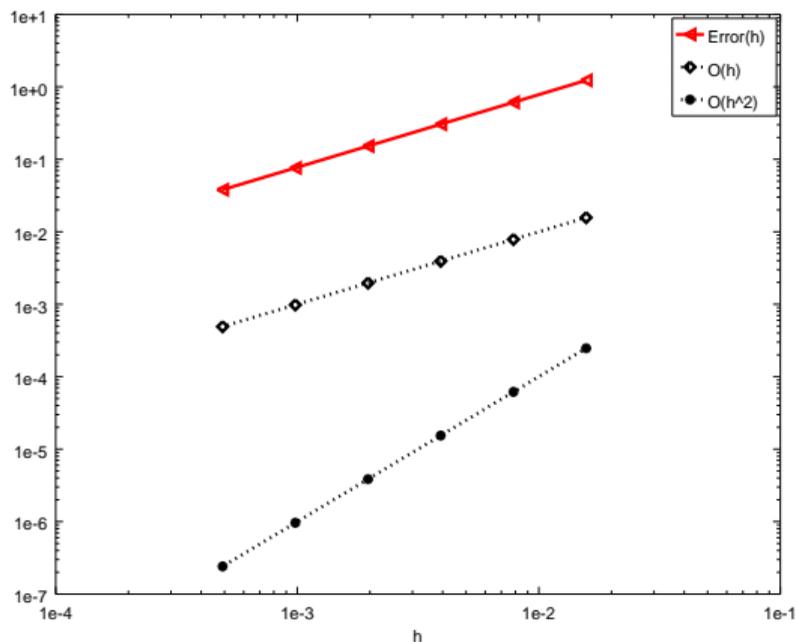
$$\frac{u_N - u_{N-1}}{h} = \beta. \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} u_0 & = & \alpha \quad \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\ -u_2 + \mu u_1 - u_0 & = & h^2 f(x_1) \quad \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\ -u_3 + \mu u_2 - u_1 & = & h^2 f(x_2) \quad \leftarrow \text{eq. en } x_2 \\ & \vdots & \\ -u_{N-1} + \mu u_{N-2} - u_{N-3} & = & h^2 f(x_{N-2}) \quad \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2} \\ -u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} & = & h^2 f(x_{N-1}) \quad \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\ u_N - u_{N-1} & = & h\beta \quad \leftarrow \text{eq. en } x_N \end{array} \right.$$

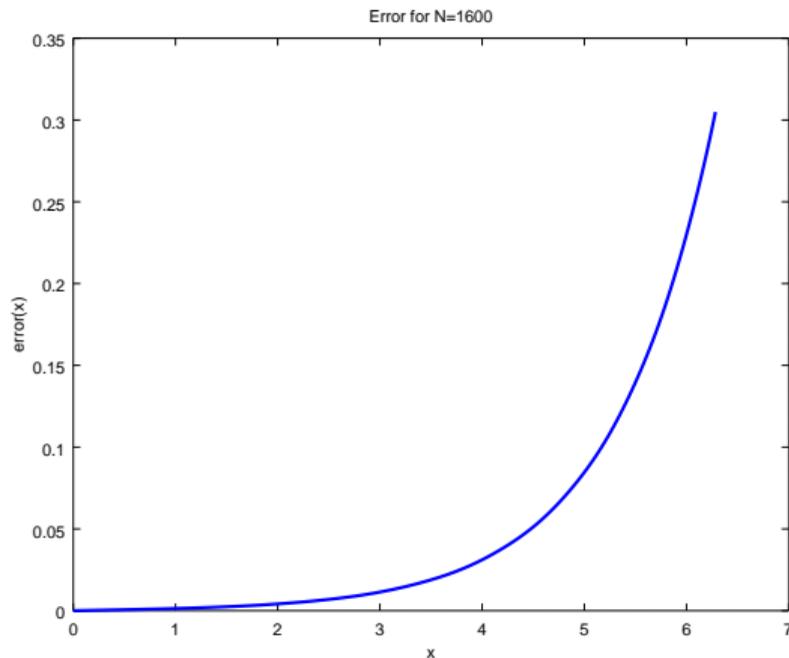
$$\mathbb{A} \mathbf{U} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 f(x_{N-2}) \\ h^2 f(x_{N-1}) \\ h\beta \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B} \quad (26)$$

Mais ...

Schéma d'ordre 1 !!!



(a) Représentation en échelle logarithmique de l'ordre du schéma



(b) Représentation de l'erreur en fonction de x pour $N = 1600$

Ecrire un schéma d'ordre 2 pour Neumann



Exercice 2

Soit φ une fonction suffisamment régulière et $h > 0$

Q.1 Montrer que

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (27)$$

Q.2 Montrer que

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (28)$$

Q.3 Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre 2 de $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ en utilisant uniquement des valeurs de la fonction φ aux points $x + ih$ avec $i \in \mathbb{N}$.

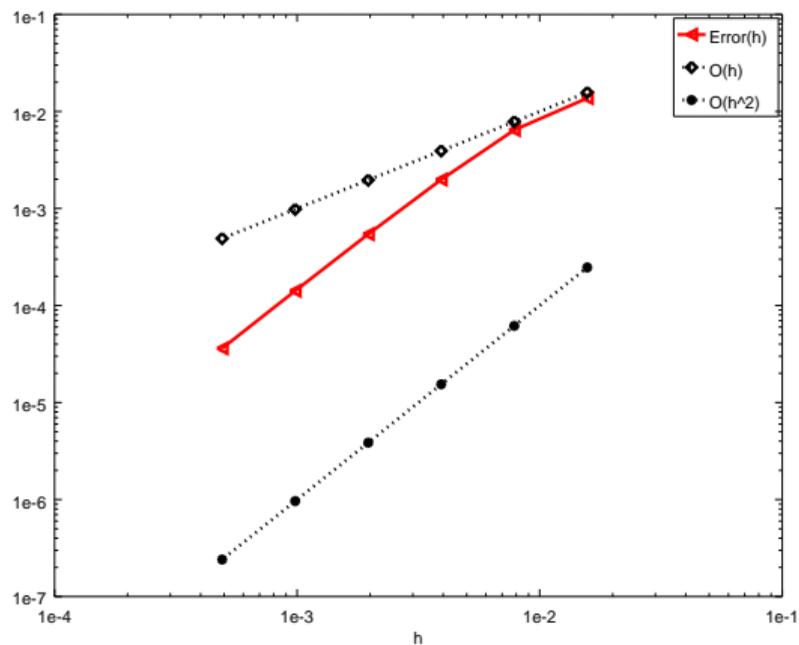
Q.4 Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre 2 de $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ en utilisant uniquement des valeurs de la fonction φ aux points $x - ih$ avec $i \in \mathbb{N}$.

$$\left\{ \begin{array}{lll} u_0 & = & \alpha \quad \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\ -u_2 + \mu u_1 - u_0 & = & f(x_1) \quad \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\ -u_3 + \mu u_2 - u_1 & = & f(x_2) \quad \leftarrow \text{eq. en } x_2 \\ & \vdots & \\ -u_{N-1} + \mu u_{N-2} - u_{N-3} & = & f(x_{N-2}) \quad \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2} \\ -u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} & = & f(x_{N-1}) \quad \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\ 3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2} & = & 2h\beta \quad \leftarrow \text{eq. en } x_N \end{array} \right.$$

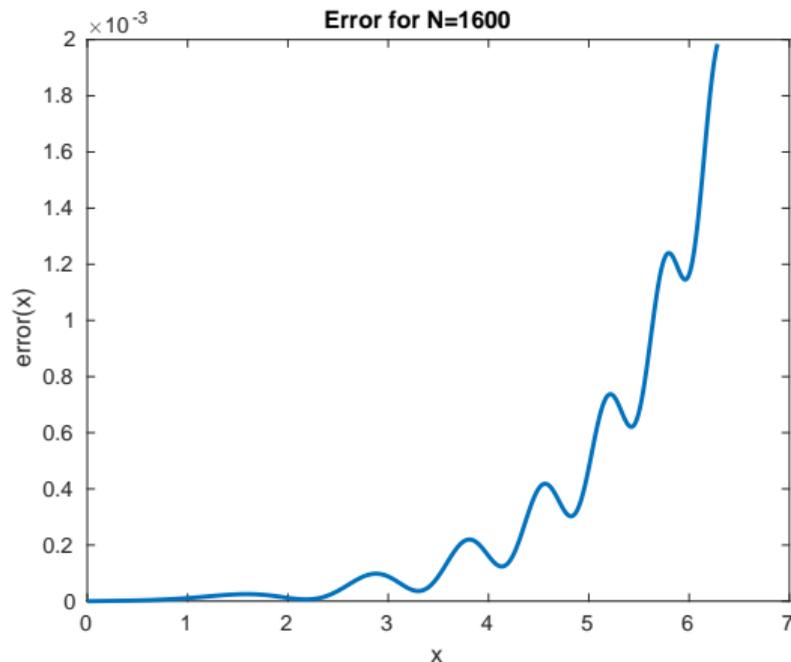
$$\mathbb{A} \mathbf{U} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|cccc|cc} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \hline -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \mu & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -4 & 3 \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 f(x_{N-2}) \\ h^2 f(x_{N-1}) \\ 2h\beta \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B} \quad (54)$$

et ...

Schéma d'ordre 2



(a) Représentation en échelle logarithmique de l'ordre du schéma



(b) Représentation de l'erreur en fonction de x pour $N = 1600$

Exercice 3

Soit le problème suivant

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad \forall x \in]a; b[, \quad (55)$$

$$u'(a) = \alpha, \quad (56)$$

$$u(b) = \beta. \quad (57)$$

où c est une fonction positive.

Q.1

- Quelles sont les données du problème (55)-(57)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)
- Quelles sont les inconnues du problème (55)-(57)? (préciser le type)
- Quelles sont les conditions initiales?
- Quelles sont les conditions aux limites?

Q.2 Construire une discrétisation régulière de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation en espace.

On note x_i , $i \in [0, N]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (55) à l'aide du schéma numérique

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + c_i u_i = f_i. \quad (58)$$

Q.3

- Expliquer comment le schéma (58) a été obtenu à partir de (55) et préciser ce que représente les termes u_i , f_i , c_i et Δx ?
- Donner l'ensemble \mathcal{E} des valeurs que peut prendre i dans le schéma (55).
- Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.
- Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.

On note \mathbf{V} le vecteur de dimension $N+1$, de composantes $\mathbf{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [1, N+1]$.

Q.4 Montrer que le vecteur \mathbf{V} est solution du système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (59)$$

en explicitant la matrice \mathbb{A} et le vecteur \mathbf{F} (préciser les dimensions).

Q.5 Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (55) à (57) basé sur (59). (Utiliser au maximum les fonctions). On pourra utiliser la fonction $\mathbf{X} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \mathbf{B})$ retournant la solution du système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$.