

Méthodes Numériques II

Chapitre 1: Algorithmique

Exercices axés sur l'algèbre linéaire

EXERCICE 1

Soient $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Q. 1 Ecrire une fonction `dot` permettant de calculer le produit scalaire du vecteur \mathbf{u} par \mathbf{v} , noté mathématiquement par $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. □

Q. 2 Ecrire une fonction `norm2` permettant de calculer la norme euclidienne du vecteur \mathbf{u} donnée par $\|\mathbf{u}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$. □

Soient a et b deux réels.

Q. 3 Ecrire une fonction `aUpbV` permettant de calculer le vecteur $\mathbf{w} \stackrel{\text{def}}{=} a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$. □

Q. 4 Ecrire un programme algorithmique permettant de calculer $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2$ avec $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. □

Correction

R. 1 On a

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}.$$

Voici une correction possible où l'on différencie la notation mathématique \mathbf{u}_i , i -ème composante du vecteur \mathbf{u} , et la notation algorithmique $\mathbf{U}(i)$ permettant d'accéder à l'élément i du tableau/vecteur \mathbf{U} , avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Algorithme 1 Fonction `dot`, produit scalaire entre deux vecteurs.

Données : \mathbf{U} : vecteur/tableau de \mathbb{R}^n , tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{U}(i) = \mathbf{u}_i.$$

\mathbf{V} : vecteur/tableau de \mathbb{R}^n , tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{V}(i) = \mathbf{v}_i.$$

Résultat : r : le réel tel que $r = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

1: **Fonction** $r \leftarrow \text{dot}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ $r \leftarrow 0$

2: **Pour** $i \leftarrow 1$ à n **faire**

3: $r \leftarrow r + \mathbf{U}(i) * \mathbf{V}(i)$

4: **Fin Pour**

5: **Fin Fonction**

On peut aussi utiliser la notation algorithmique $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ pour décrire un vecteur/tableau de \mathbb{R}^p et on a alors la correspondance suivante entre notation mathématique et algorithmique:

Description	Mathématiques	Algorithmique
Composante $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$	\mathbf{x}_i	$\mathbf{x}(i)$

Cependant pour bien différencier ces deux types de notations, on continue dans cet exercice à noter \mathbf{U} le vecteur algorithmique correspondant au vecteur mathématique \mathbf{u} .

R. 2 Voici une correction possible:

Algorithme 2 Fonction `norm2`

Données : \mathbf{U} : vecteur/tableau de \mathbb{R}^n , tel que
 $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{U}(i) = \mathbf{u}_i$.

Résultat : r : le réel tel que $r = \|\mathbf{u}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$.

1: **Fonction** $r \leftarrow \text{norm2}(\mathbf{U})$
2: $r \leftarrow \text{Sqrt}(\text{dot}(\mathbf{U}, \mathbf{U}))$
3: **Fin Fonction**

R. 3 On a $\mathbf{w} \stackrel{\text{def}}{=} a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ et plus précisément

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{w}_i \stackrel{\text{def}}{=} a\mathbf{u}_i + b\mathbf{v}_i.$$

Voici une correction possible:

Algorithme 3 Fonction `aUpbV`

Données : \mathbf{U} : vecteur/tableau de \mathbb{R}^n , tel que
 $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{U}(i) = \mathbf{u}_i$.
 \mathbf{V} : vecteur/tableau de \mathbb{R}^n , tel que
 $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{V}(i) = \mathbf{v}_i$.
 a : un réel,
 b : un réel.

Résultat : \mathbf{W} : vecteur/tableau de \mathbb{R}^n , tel que
 $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{W}(i) = \mathbf{w}_i$,
avec $\mathbf{w}_i \stackrel{\text{def}}{=} a\mathbf{u}_i + b\mathbf{v}_i$.

1: **Fonction** $\mathbf{W} \leftarrow \text{aUpbV}(a, \mathbf{U}, b, \mathbf{V})$
2: **Pour** $i \leftarrow 1$ à n **faire**
3: $\mathbf{W}(i) \leftarrow a * \mathbf{U}(i) + b * \mathbf{V}(i)$
4: **Fin Pour**
5: **Fin Fonction**

R. 4 Voici un premier programme possible:

$$1: \mathbf{U} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{V} \leftarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2: \mathbf{x} \leftarrow \text{norm2}(\text{aUpbV}(1, \mathbf{U}, -1, \mathbf{V})) \quad \triangleright x \text{ contient le réel } \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2$$

On peut aussi écrire directement

$$1: \mathbf{x} \leftarrow \text{norm2}(\text{aUpbV}(1, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, -1, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix})) \quad \triangleright x \text{ contient le réel } \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2$$

◇

EXERCICE 2

Q. 1 Ecrire une fonction `VecZeros` retournant le vecteur nul de \mathbb{R}^n . □

Q. 2 Ecrire une fonction `VecConst` retournant le vecteur de \mathbb{R}^n dont toutes les composantes valent $\alpha \in \mathbb{R}$. □

Q. 3 Soient $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Ecrire une fonction `VecPlusConst` retournant le vecteur de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i + \alpha.^\dagger$$

□

On suppose que l'on dispose de la fonction algorithmique `rand()` retournant un réel aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Q. 4 Ecrire une fonction `VecRand` retournant un vecteur de \mathbb{R}^n dont toutes les composantes sont aléatoires suivant la loi uniforme sur $[a, b]$. □



Correction

R. 1 Voici une correction possible

Algorithme 4 Fonction `VecZeros` retournant le vecteur nul de \mathbb{R}^n .

Données : n : un entier > 0 .

Résultat : \mathbf{z} : le vecteur nul de \mathbb{R}^n .

```
1: Fonction  $\mathbf{z} \leftarrow \text{VecZeros}(n)$ 
2:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire
3:      $\mathbf{z}(i) \leftarrow 0$ 
4:   Fin Pour
5: Fin Fonction
```

R. 2 Voici une correction possible

Algorithme 5 Fonction `VecConst` retournant le vecteur \mathbf{v} de \mathbb{R}^n dont toutes les composantes valent $\alpha \in \mathbb{R}$.

Données : n : un entier > 0 ,

α : un réel.

Résultat : \mathbf{v} : vecteur de \mathbb{R}^n .

```
1: Fonction  $\mathbf{v} \leftarrow \text{VecConst}(n, \alpha)$ 
2:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire
3:      $\mathbf{v}(i) \leftarrow \alpha$ 
4:   Fin Pour
5: Fin Fonction
```

R. 3 Voici une correction possible

[†]Cette opération n'est pas une opération algébrique dans \mathbb{R}^n , c'est à dire mathématiquement, on ne peut pas écrire $\mathbf{u} + \alpha$!

Algorithme 6 Fonction `VecPlusConst` retournant le vecteur \mathbf{v} de \mathbb{R}^n tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i + \alpha$ avec

Données : \mathbf{u} : vecteur de \mathbb{R}^n ,
 α : un réel.

Résultat : \mathbf{v} : vecteur de \mathbb{R}^n .

```

1: Fonction  $\mathbf{v} \leftarrow \text{VecPlusConst}(\mathbf{u}, \alpha)$ 
2:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire
3:      $\mathbf{v}(i) \leftarrow \mathbf{u}(i) + \alpha$ 
4:   Fin Pour
5: Fin Fonction

```

R. 4 On rappelle le changement de variable permettant de passer de l'intervalle $[0, 1]$ à l'intervalle $[a, b]$

$$\forall t \in [0, 1], \quad x = a + (b - a)t, \quad \text{avec } x \in [a, b].$$

Donc, si T est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors $X = a + (b - a)T$ est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a, b]$.

Voici une correction possible

Algorithme 7 Fonction `VecRand` retournant un vecteur dont toutes les composantes sont aléatoires suivant la loi uniforme sur $[a, b]$.

Données : n : un entier > 0 ,
 a : un réel,
 b : un réel, tel que $a < b$.

Résultat : \mathbf{x} : vecteur de \mathbb{R}^n .

```

1: Fonction  $\mathbf{x} \leftarrow \text{VecRand}(n, a, b)$ 
2:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire
3:      $\mathbf{x}(i) \leftarrow a + (b - a) * \text{rand}()$ 
4:   Fin Pour
5: Fin Fonction

```

◇

EXERCICE 3

Q. 1 Ecrire une fonction `MatZeros` retournant la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. □

Q. 2 Ecrire une fonction `MatConst` retournant la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes valent $\alpha \in \mathbb{R}$. □

Q. 3 Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Ecrire une fonction `MatPlusConst` retournant la matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{B}_{i,j} = \mathbb{A}_{i,j} + \alpha.^\ddagger$$

□

On suppose que l'on dispose de la fonction algorithmique `rand()` retournant un réel aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Q. 4 Ecrire une fonction `MatRand` retournant une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes sont aléatoires suivant la loi uniforme sur $[a, b]$. □

[‡]Cette opération n'est pas une opération algébrique dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, c'est à dire mathématiquement, on ne peut pas écrire $\mathbb{A} + \alpha$!

Correction

R. 1 Voici une correction possible

Algorithme 8 Fonction `MatZeros` la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Données : m : un entier > 0 ,
 n : un entier > 0 .

Résultat : Z : la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

```
1: Fonction  $Z \leftarrow \text{MatZeros}(m, n)$ 
2:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $m$  faire
3:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n$  faire
4:        $Z(i, j) \leftarrow 0$ 
5:     Fin Pour
6:   Fin Pour
7: Fin Fonction
```

R. 2 Voici une correction possible

Algorithme 9 Fonction `MatConst` retournant la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes valent $\alpha \in \mathbb{R}$.

Données : m : un entier > 0 ,
 n : un entier > 0 ,
 α : un réel.

Résultat : Z : matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

```
1: Fonction  $v \leftarrow \text{MatConst}(m, n, \alpha)$ 
2:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $m$  faire
3:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n$  faire
4:        $Z(i, j) \leftarrow \alpha$ 
5:     Fin Pour
6:   Fin Pour
7: Fin Fonction
```

R. 3 Voici une correction possible

Algorithme 10 Fonction `MatPlusConst` retournant la matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{B}_{i,j} = \mathbb{A}_{i,j} + \alpha$.

Données : \mathbb{A} : matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
 α : un réel.

Résultat : \mathbb{B} : matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

```
1: Fonction  $\mathbb{B} \leftarrow \text{MatPlusConst}(\mathbb{A}, \alpha)$ 
2:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $m$  faire
3:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n$  faire
4:        $\mathbb{B}(i, j) \leftarrow \mathbb{A}(i, j) + \alpha$ 
5:     Fin Pour
6:   Fin Pour
7: Fin Fonction
```

R. 4 On rappelle le changement de variable permettant de passer de l'intervalle $[0, 1]$ à l'intervalle $[a, b]$

$$\forall t \in [0, 1], \quad x = a + (b - a)t, \quad \text{avec } x \in [a, b].$$

Donc, si T est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors $X = a + (b - a)T$ est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a, b]$.

Voici une correction possible

Algorithme 11 Fonction `MatRand` retournant une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes sont aléatoires suivant la loi uniforme sur $[a, b]$.

Données : m : un entier > 0 ,
 n : un entier > 0 ,
 a : un réel,
 b : un réel, tel que $a < b$.

Résultat : \mathbb{X} : matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

```

1: Fonction  $\mathbb{X} \leftarrow \text{MatRand}(m, n, a, b)$ 
2:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $m$  faire
3:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n$  faire
4:        $\mathbb{X}(i, j) \leftarrow a + (b - a) * \text{rand}()$ 
5:     Fin Pour
6:   Fin Pour
7: Fin Fonction

```

◇

EXERCICE 4

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Q. 1 a. Ecrire une fonction algorithmique `setMatCol` permettant d'initialiser le j -ème vecteur colonne de \mathbb{A} par un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

b. Ecrire une fonction algorithmique `getMatCol` retournant le j -ème vecteur colonne de \mathbb{A} avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

□

Q. 2 a. Ecrire une fonction algorithmique `setMatRow` permettant d'initialiser le i -ème vecteur ligne de \mathbb{A} par un vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, avec $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$.

b. Ecrire une fonction algorithmique `getMatRow` retournant le i -ème vecteur ligne de \mathbb{A} avec $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$.

□



Correction

R. 1 Mathématiquement, le j -ème vecteur colonne de \mathbb{A} le vecteur (colonne) de \mathbb{R}^m donné par

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,j} \\ \vdots \\ \mathbb{A}_{m,j} \end{pmatrix}.$$

a. Voici une correction possible

Algorithme 12 Fonction `setMatCol`

Données : \mathbb{A} : matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$
 \mathbf{x} : vecteur de \mathbb{R}^n ,
 j : entier dans $\llbracket 1, m \rrbracket$.

Résultat : \mathbb{A} : la matrice \mathbb{A} modifiée.

```
1: Fonction  $\mathbb{A} \leftarrow \text{setMatCol}(\mathbb{A}, \mathbf{x}, j)$ 
2:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire
3:      $\mathbb{A}(i, j) \leftarrow \mathbf{x}(i)$ 
4:   Fin Pour
5: Fin Fonction
```

b. Voici une correction possible

Algorithme 13 Fonction `getMatCol`

Données : \mathbb{A} : matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
 j : entier dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Résultat : \mathbf{x} : vecteur de \mathbb{R}^m , colonne j de \mathbb{A} .

```
1: Fonction  $\mathbf{x} \leftarrow \text{getMatCol}(\mathbb{A}, j)$ 
2:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $m$  faire
3:      $\mathbf{x}(i) \leftarrow \mathbb{A}(i, j)$ 
4:   Fin Pour
5: Fin Fonction
```

R. 2 Le i -ème vecteur ligne de \mathbb{A} est le vecteur ligne de \mathbb{R}^n donné par

$$(\mathbb{A}_{i,1} \quad \dots \quad \mathbb{A}_{i,n}).$$

a. Voici une correction possible

Algorithme 14 Fonction `setMatRow`

Données : \mathbb{A} : matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
 \mathbf{x} : vecteur de \mathbb{R}^n ,
 i : entier dans $\llbracket 1, m \rrbracket$.

Résultat : \mathbb{A} : la matrice \mathbb{A} modifiée.

```
1: Fonction  $\mathbb{A} \leftarrow \text{setMatRow}(\mathbb{A}, \mathbf{x}, i)$ 
2:   Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n$  faire
3:      $\mathbb{A}(i, j) \leftarrow \mathbf{x}(j)$ 
4:   Fin Pour
5: Fin Fonction
```

b. Voici une correction possible

Algorithme 15 Fonction `getMatRow`

Données : \mathbb{A} : matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
 i : entier dans $\llbracket 1, m \rrbracket$.

Résultat : \mathbf{x} : vecteur de \mathbb{R}^n , ligne i de \mathbb{A} .

```
1: Fonction  $\mathbf{x} \leftarrow \text{getMatCol}(\mathbb{A}, i)$ 
2:   Pour  $j \leftarrow 1$  à  $m$  faire
3:      $\mathbf{x}(j) \leftarrow \mathbb{A}(i, j)$ 
4:   Fin Pour
5: Fin Fonction
```

◇

EXERCICE 5

Q. 1 Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Ecrire une fonction `aApbB` permettant de calculer la matrice $\mathbb{W} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha\mathbb{A} + \beta\mathbb{B}$. □

Q. 2 Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et \mathbf{u} un vecteur (colonne).

a. A quelle(s) condition(s) le produit de la matrice \mathbb{A} par le vecteur \mathbf{u} existe-t'il?

b. Sous les conditions précédentes, on note $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbf{u}$.

- A quel espace appartient \mathbf{v} ?
- Rappeler précisément la formule permettant de calculer les composantes de \mathbf{v} .

c. Ecrire une fonction `ProdMatVec` permettant de calculer $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbf{u}$.

d. Donner un exemple algorithmique d'utilisation. □

**Correction**

R. 1 La matrice \mathbb{W} est aussi dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et on a

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{W}_{i,j} = \alpha\mathbb{A}_{i,j} + \beta\mathbb{B}_{i,j}.$$

Voici une correction possible

Algorithme 16 Fonction `aApbB` retournant la matrice $\mathbb{W} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha\mathbb{A} + \beta\mathbb{B}$.

Données : \mathbb{A} : matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
 \mathbb{B} : matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
 α : un réel,
 β : un réel.

Résultat : \mathbb{W} : matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

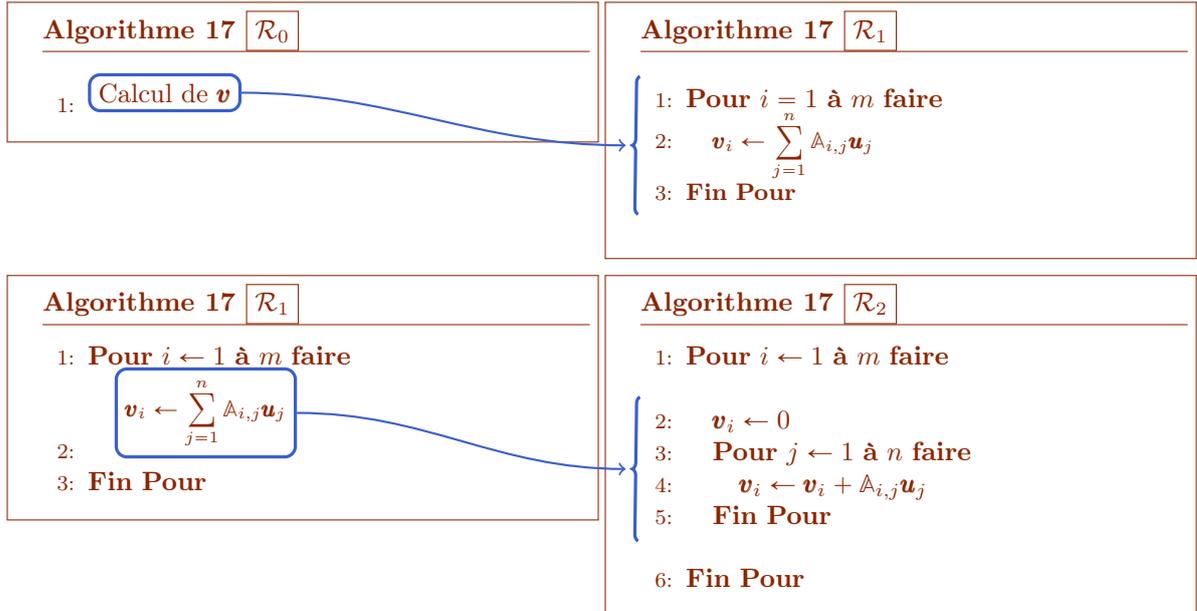
```
1: Fonction  $\mathbb{W} \leftarrow \text{aApbB}(\alpha, \mathbb{A}, \beta, \mathbb{B})$ 
2:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $m$  faire
3:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n$  faire
4:        $\mathbb{W}(i, j) \leftarrow \alpha * \mathbb{A}(i, j) + \beta * \mathbb{B}(i, j)$ 
5:     Fin Pour
6:   Fin Pour
7: Fin Fonction
```

R. 2 a. Pour que le produit de la matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ par un vecteur (colonne) \mathbf{u} soit possible il faut et il suffit que la dimension du vecteur (nombre de lignes) soit égale au nombre de colonnes de \mathbb{A} , et donc $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

b. Avec $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, on a alors $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. et

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^n \mathbb{A}_{i,j} \mathbf{u}_j.$$

c. Voici une manière d'obtenir l'algorithme en utilisant une méthode de raffinements successifs et les notations mathématiques pour accéder aux composantes des vecteurs et des matrices



Pour écrire la fonction algorithmique, il nous faut passer des notations mathématiques aux notations algorithmiques pour les matrices et vecteurs. Les correspondances sont données en Table 3.

<i>Description</i>	<i>Mathématiques</i>	<i>Algorithmique</i>
Composante $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$	\mathbf{x}_i	$\mathbf{x}(i)$
Composante $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$ de $\mathbb{Z} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$,	$\mathbb{Z}_{i,j}$	$\mathbb{Z}(i, j)$

Table 1: Correspondance entre les notations mathématiques et algorithmiques pour les matrices et vecteurs

On obtient alors la fonction

Algorithme 17 Fonction `ProdMatVec` retournant le vecteur $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbf{u}$, produit de la matrice \mathbb{A} par le vecteur \mathbf{u} .

Données : \mathbb{A} : matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
 \mathbf{u} : vecteur de \mathbb{R}^n .

Résultat : \mathbf{v} : vecteur de \mathbb{R}^m tel que $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbf{u}$.

```

1: Fonction  $\mathbf{v} \leftarrow \text{ProdMatVec}(\mathbb{A}, \mathbf{u})$ 
2:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $m$  faire
3:      $\mathbf{v}(i) \leftarrow 0$ 
4:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n$  faire
5:        $\mathbf{v}(i) \leftarrow \mathbf{v}(i) + \mathbb{A}(i, j) * \mathbf{u}(j)$ 
6:     Fin Pour
7:   Fin Pour
8: Fin Fonction

```

d. Par exemple,

$$\mathbf{x} \leftarrow \text{ProdMatVec}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

◇

EXERCICE 6

Q. 1 Soient \mathbf{u} et \mathbf{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^n . Ecrire la fonction `ProdSca` permettant de retourner le produit scalaire de ces deux vecteurs noté mathématiquement $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. □

L'objectif de la suite de l'exercice est de voir plusieurs manières de programmer le produit d'une matrice par un vecteur. Soient $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ et $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Q. 2 a. Rappeler précisément les hypothèses et les formules permettant le calcul de $\mathbf{v} = \mathbb{A}\mathbf{u}$.

b. Ecrire la fonction `ProdMatVec` permettant de retourner $\mathbb{A}\mathbf{u}$. □

Voici quelques notations mathématiques (non standards) que l'on va utiliser. Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ alors

- $\mathbb{A}_{:,j}$ correspond au j -ème vecteur colonne de \mathbb{A} .
- $\mathbb{A}_{i,:}$ correspond au i -ème vecteur ligne de \mathbb{A} .

On suppose que l'on dispose des commandes suivantes au niveau algorithmique:

Description	Avec fonction	Instruction simplifiée
Obtenir la j -ème colonne d'une matrice \mathbb{A} avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, math. noté $\mathbb{A}_{:,j}$	$\mathbf{u} \leftarrow \text{getMatCol}(\mathbb{A}, j)$	$\mathbf{u} \leftarrow \mathbb{A}(:, j)$
Obtenir la i -ème ligne d'une matrice \mathbb{A} avec $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, math. noté $\mathbb{A}_{i,:}$	$\mathbf{v} \leftarrow \text{getMatRow}(\mathbb{A}, i)$	$\mathbf{v} \leftarrow \mathbb{A}(i, :)$
Remplacer la j -ème colonne d'une matrice \mathbb{A} par un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$	$\mathbb{A} \leftarrow \text{setMatCol}(\mathbb{A}, \mathbf{u}, j)$	$\mathbb{A}(:, j) \leftarrow \mathbf{u}$
Remplacer la i -ème ligne d'une matrice \mathbb{A} par un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ avec $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$	$\mathbb{A} \leftarrow \text{setMatRow}(\mathbb{A}, \mathbf{v}, i)$	$\mathbb{A}(i, :) \leftarrow \mathbf{v}$.

Table 2: Instructions algorithmiques pour accéder/modifier une ligne ou une colonne d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

- Q. 3** a. Sous les hypothèses de **Q.2** et avec $\mathbf{v} = \mathbb{A}\mathbf{u}$, écrire mathématiquement v_i comme un produit scalaire en utilisant les notations précisées ci-dessus.
- b. Ecrire la fonction `ProdMatVecFun` permettant de retourner $\mathbb{A}\mathbf{u}$ en utilisant la fonction `ProdSca` et les fonctions de la Table 2 (i.e. sans utiliser les instructions simplifiées).
- c. Ecrire la fonction `ProdMatVecSim` permettant de retourner $\mathbb{A}\mathbf{u}$ en utilisant la fonction `ProdSca` et les instructions simplifiées de la Table 2 (i.e. sans utiliser les fonctions).

□

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

- Q. 4** a. Rappeler précisément les hypothèses et les formules permettant le calcul de $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.
- b. Ecrire la fonction `ProdMatMat` permettant de retourner \mathbb{G} .

□

Q. 5 Sous les hypothèses trouvées en **Q.4**, on note $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.

- a. En utilisant les notations mathématiques d'accès aux lignes et colonnes d'une matrice, écrire $\mathbb{G}_{i,j}$ comme un produit scalaire entre un vecteur ligne de \mathbb{A} et un vecteur colonne de \mathbb{B} .
- b. Ecrire la fonction `ProdMatMatFun1` permettant de retourner \mathbb{G} en utilisant la formule trouvée en **Q.5** a., des fonctions de la Table 2 (i.e. sans utiliser les instructions simplifiées) et la fonction `ProdSca`.
- c. Ecrire la fonction `ProdMatMatSim1` permettant de retourner \mathbb{G} en utilisant la formule trouvée en **Q.5** a., des instructions simplifiées de la Table 2 et la fonction `ProdSca`.

□

Q. 6 Sous les hypothèses trouvées en **Q.4**, on note $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.

- a. En utilisant les notations mathématiques d'accès aux lignes et colonnes d'une matrice, écrire $\mathbb{G}_{:,j}$ (j -ème vecteur colonne de \mathbb{G}) comme le produit de la matrice \mathbb{A} par un vecteur colonne de \mathbb{B} .
- b. Ecrire la fonction `ProdMatMatFun2` permettant de retourner \mathbb{G} en utilisant la formule trouvée en **Q.6** a., des fonctions de la Table 2 (i.e. sans utiliser les instructions simplifiées) et la fonction `ProdMatVecFun`.
- c. Ecrire la fonction `ProdMatMatSim2` permettant de retourner \mathbb{G} en utilisant la formule trouvée en **Q.6** a., des instructions simplifiées de la Table 2 et la fonction `ProdMatVecSim`.

□

Correction

R. 1 On a

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}.$$

Voici une correction possible où l'on identifie la notation mathématique \mathbf{u}_i , i -ème composante du vecteur \mathbf{u} , et la notation algorithmique $\mathbf{u}(i)$ permettant d'accéder à l'élément i du tableau/vecteur \mathbf{u} , avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Algorithme 18 Fonction `ProSca`, produit scalaire entre deux vecteurs.

Données : \mathbf{u} : vecteur/tableau de \mathbb{R}^n , tel que
 $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{u}(i) = u_i.$

\mathbf{v} : vecteur/tableau de \mathbb{R}^n , tel que
 $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{v}(i) = v_i.$

Résultat : r : le réel tel que $r = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$

```

1: Fonction  $r \leftarrow \text{ProSca}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$   $r \leftarrow 0$ 
2:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire
3:      $r \leftarrow r + \mathbf{u}(i) * \mathbf{v}(i)$ 
4:   Fin Pour
5: Fin Fonction

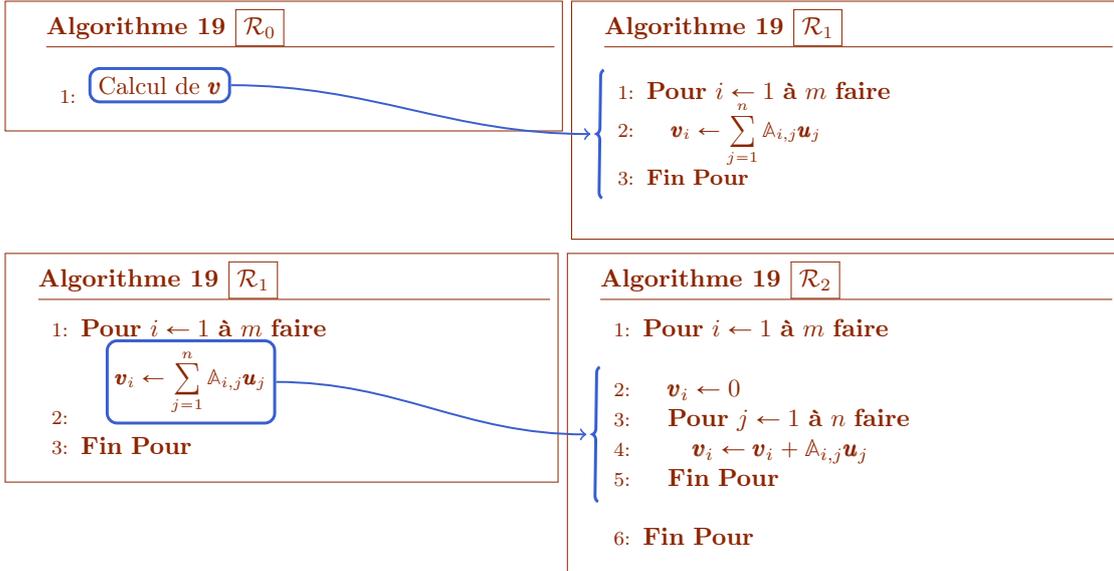
```

R. 2 a. Pour que le produit de la matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ par un vecteur (colonne) \mathbf{u} soit possible il faut et il suffit que la dimension du vecteur (nombre de lignes) soit égale au nombre de colonnes de \mathbb{A} , et donc $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

b. Avec $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, on a alors $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. et

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^n \mathbb{A}_{i,j} \mathbf{u}_j.$$

c. Voici une manière d'obtenir l'algorithme en utilisant une méthode de raffinements successifs et les notations mathématiques pour accéder aux composantes des vecteurs et des matrices



Pour écrire la fonction algorithmique, il nous faut passer des notations mathématiques aux notations algorithmiques pour les matrices et vecteurs. Les correspondances sont données en Table 3.

Description	Mathématiques	Algorithmique
Composante $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$	\mathbf{x}_i	$\mathbf{x}(i)$
Composante $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$ de $\mathbb{Z} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$,	$\mathbb{Z}_{i,j}$	$\mathbb{Z}(i, j)$

Table 3: Correspondance entre les notations mathématiques et algorithmiques pour les matrices et vecteurs

On obtient alors la fonction

Algorithme 19 Fonction `ProdMatVec1` retournant le vecteur $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbf{u}$, produit de la matrice \mathbb{A} par le vecteur \mathbf{u} .

Données : \mathbb{A} : matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
 \mathbf{u} : vecteur de \mathbb{R}^n .

Résultat : \mathbf{v} : vecteur de \mathbb{R}^m tel que $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbf{u}$.

```

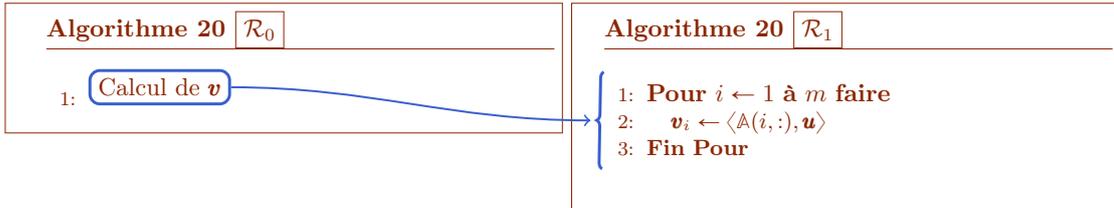
1: Fonction  $\mathbf{v} \leftarrow \text{ProdMatVec1}(\mathbb{A}, \mathbf{u})$ 
2:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $m$  faire
3:      $\mathbf{v}(i) \leftarrow 0$ 
4:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n$  faire
5:        $\mathbf{v}(i) \leftarrow \mathbf{v}(i) + \mathbb{A}(i, j) * \mathbf{u}(j)$ 
6:     Fin Pour
7:   Fin Pour
8: Fin Fonction

```

R. 3 a. On peut voir le calcul de \mathbf{v}_i , $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ comme étant le produit scalaire de la i -ème ligne de \mathbb{A} par le vecteur \mathbf{u} . On a donc

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \mathbf{v}_i = \langle \mathbb{A}(i, :), \mathbf{u} \rangle.$$

b. Voici une manière d'obtenir l'algorithme en utilisant une méthode de raffinements successifs et les notations mathématiques pour accéder aux composantes des vecteurs et des matrices



On obtient alors en utilisant des fonctions de la Table 2

Algorithme 20 Fonction `ProdMatVecFun` retournant le vecteur $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbf{u}$, produit de la matrice \mathbb{A} par le vecteur \mathbf{u} .

Données : \mathbb{A} : matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
 \mathbf{u} : vecteur de \mathbb{R}^n .

Résultat : \mathbf{v} : vecteur de \mathbb{R}^m tel que $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbf{u}$.

```

1: Fonction  $\mathbf{v} \leftarrow \text{ProdMatVec1}(\mathbb{A}, \mathbf{u})$ 
2:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $m$  faire
3:      $\mathbf{v}(i) \leftarrow \text{ProdSca}(\text{getMatRow}(\mathbb{A}, i), \mathbf{u})$ 
4:   Fin Pour
5: Fin Fonction

```

c. En utilisant les instructions simplifiées de la Table 2

Algorithme 21 Fonction `ProdMatVecFun` retournant le vecteur $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbf{u}$, produit de la matrice \mathbb{A} par le vecteur \mathbf{u} .

Données : \mathbb{A} : matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
 \mathbf{u} : vecteur de \mathbb{R}^n .

Résultat : \mathbf{v} : vecteur de \mathbb{R}^m tel que $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbf{u}$.

```

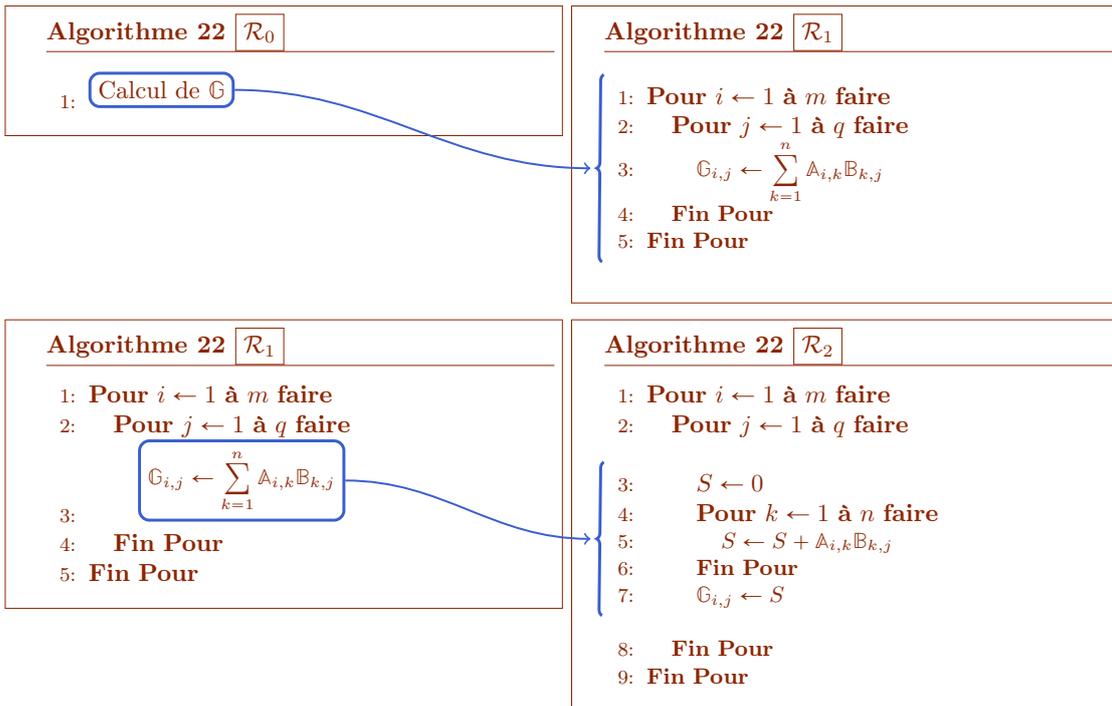
1: Fonction  $\mathbf{v} \leftarrow \text{ProdMatVec1}(\mathbb{A}, \mathbf{u})$ 
2:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $m$  faire
3:      $\mathbf{v}(i) \leftarrow \text{ProdSca}(\mathbb{A}(i, :), \mathbf{u})$ 
4:   Fin Pour
5: Fin Fonction

```

R. 4 a. Le calcul du produit matricielle $\mathbb{A}\mathbb{B}$, avec $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, est possible si et seulement si le nombre de colonnes de \mathbb{A} est égale au nombre de lignes de \mathbb{B} , c'est à dire $n = p$. Dans ce cas, la matrice résultat $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$ et on a

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, \quad \mathbb{G}_{i,j} = \sum_{k=1}^n \mathbb{A}_{i,k} \mathbb{B}_{k,j}.$$

b. Voici une manière d'obtenir l'algorithme en utilisant une méthode de raffinements successifs et les notations mathématiques usuels pour accéder aux composantes des vecteurs et des matrices



On obtient alors en utilisant les notations algorithmiques

Algorithme 22 Fonction `ProdMatMatFun` retournant la matrice $\mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbb{B}$, produit de la matrice \mathbb{A} par la matrice \mathbb{B} .

Données : \mathbb{A} : matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
 \mathbb{B} : matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$.

Résultat : \mathbb{C} : matrice de $\mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$.

```

1: Fonction  $\mathbb{C}v \leftarrow \text{ProdMatMat}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ 
2:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $m$  faire
3:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $q$  faire
4:        $S \leftarrow 0$ 
5:       Pour  $k \leftarrow 1$  à  $n$  faire
6:          $S \leftarrow S + \mathbb{A}(i, k) * \mathbb{B}(k, j)$ 
7:       Fin Pour
8:        $\mathbb{C}(i, j) \leftarrow S$ 
9:     Fin Pour
10:  Fin Pour
11: Fin Fonction

```

- R. 5** a. En effet la composante (i, j) de \mathbb{C} est le produit scalaire de la ligne i de \mathbb{A} et de la colonne j de \mathbb{B} . On a donc

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, \quad \mathbb{C}_{i,j} = \langle \mathbb{A}_{i,:}, \mathbb{B}_{:,j} \rangle.$$

- b. Voici l'algorithme utilisant les notations mathématiques permettant d'accéder aux lignes et colonnes des matrices

<p>Algorithme 23 \mathcal{R}_0</p> <hr/> <pre> 1: Pour $i \leftarrow 1$ à m faire 2: Pour $j \leftarrow 1$ à q faire 3: $\mathbb{C}_{i,j} \leftarrow \langle \mathbb{A}_{i,:}, \mathbb{B}_{:,j} \rangle$ 4: Fin Pour 5: Fin Pour </pre>
--

On obtient alors en utilisant les fonctions algorithmiques de la Table 2

Algorithme 23 Fonction `ProdMatMatFun1` retournant la matrice $\mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbb{B}$, produit de la matrice \mathbb{A} par la matrice \mathbb{B} .

Données : \mathbb{A} : matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
 \mathbb{B} : matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$.

Résultat : \mathbb{C} : matrice de $\mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$.

```

1: Fonction  $\mathbb{C}v \leftarrow \text{ProdMatMatFun1}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ 
2:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $m$  faire
3:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $q$  faire
4:        $\mathbb{C}(i, j) \leftarrow \text{ProSca}(\text{getMatRow}(\mathbb{A}, i), \text{getMatCol}(\mathbb{B}, j))$ 
5:     Fin Pour
6:   Fin Pour
7: Fin Fonction

```

- c. En utilisant des instructions simplifiées de la Table 2 et la fonction `ProSca`, on a

Algorithme 24 Fonction `ProdMatMatSim1` retournant la matrice $\mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbb{B}$, produit de la matrice \mathbb{A} par la matrice \mathbb{B} .

Données : \mathbb{A} : matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
 \mathbb{B} : matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$.

Résultat : \mathbb{C} : matrice de $\mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$.

```
1: Fonction  $\mathbb{C}v \leftarrow \text{ProdMatMatFun1}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ 
2:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $m$  faire
3:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $q$  faire
4:        $\mathbb{C}(i, j) \leftarrow \text{ProSca}(\mathbb{A}(i, :), \mathbb{B}(:, j))$ 
5:     Fin Pour
6:   Fin Pour
7: Fin Fonction
```

◇