

## Méthodes Numériques (G3SEMN)\*

Sup'Galilée, Ingénieurs Énergétique, 1ère année

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications  
Institut Galilée  
Université Paris XIII.

2026/03/10

\*Compilé le 2026/03/10 à 12:59:54

2026/03/10 1 / 30

## Plan du cours

- Chapitre I : Algorithmique numérique
- Chapitre II : Dérivation numérique
- Chapitre III : Résolution numérique des E.D.O.
- Chapitre IV : Résolution numérique des E.D.P.**

2026/03/10 2 / 30

## Equation de Laplace et équation de Poisson



*Pierre-Simon Laplace* 1749-1827, mathématicien, astronome, physicien et homme politique français

*Siméon Denis Poisson* 1781-1840, mathématicien, géomètre et physicien français

$$-\Delta u = f, \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien :  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ .

Equation de Laplace si  $f = 0$ , sinon équation de Poisson.

2026/03/10 3 / 30

## Conditions aux limites

$$-\Delta u = f, \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

- **Dirichlet** si on impose, sur une partie de  $\partial\Omega$ ,

$$u = g, \text{ sur } \Gamma_D \subset \partial\Omega. \quad (2)$$

- **Neumann** si on impose sur une partie de  $\partial\Omega$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g, \text{ sur } \Gamma_N \subset \partial\Omega. \quad (3)$$

où  $\frac{\partial u}{\partial n} = \langle \mathbf{grad} u, \mathbf{n} \rangle$  avec  $\mathbf{n}$  normale extérieure unitaire à  $\Omega$

- **Robin** si on impose sur une partie de  $\partial\Omega$

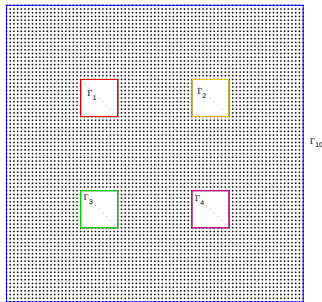
$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g, \text{ sur } \Gamma_R \subset \partial\Omega. \quad (4)$$

2026/03/10 4 / 30

### Problème de condensateur en 2D

Find  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  such that

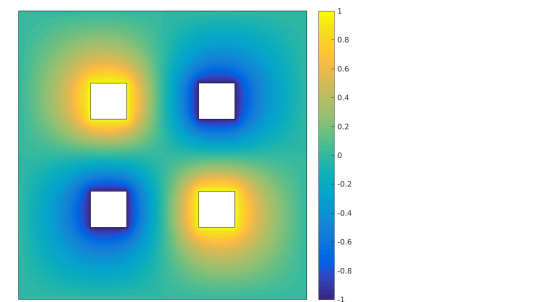
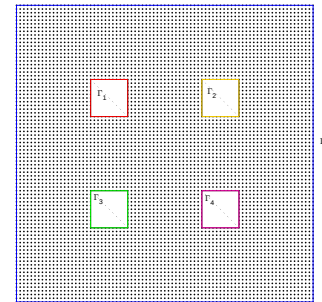
$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= 0 \text{ on } \Gamma_{10}, \\ u &= -1 \text{ on } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ u &= 1 \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \end{aligned}$$



### Problème de condensateur en 2D

Find  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  such that

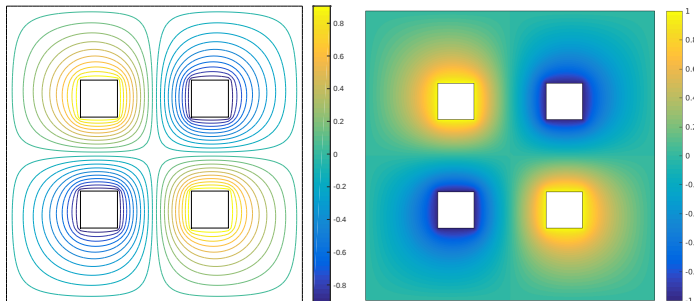
$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= 0 \text{ on } \Gamma_{10}, \\ u &= -1 \text{ on } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ u &= 1 \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \end{aligned}$$



### Problème de condensateur en 2D

Find  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  such that

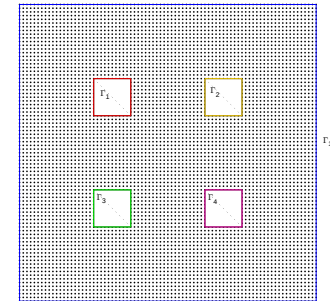
$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= 0 \text{ on } \Gamma_{10}, \\ u &= -1 \text{ on } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ u &= 1 \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \end{aligned}$$



### Champ de vitesses en 2D : $V = \nabla u$

Trouver  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

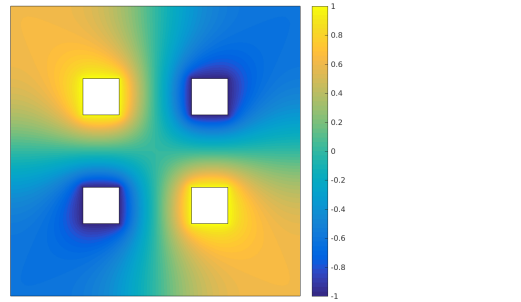
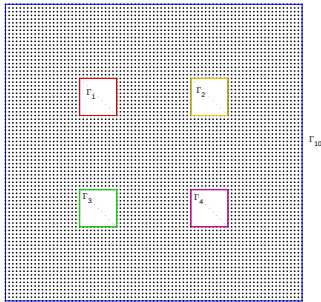
$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= -1 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ u &= 1 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_{10}. \end{aligned}$$



### 💡 Champ de vitesses en 2D : $\mathbf{V} = \nabla u$

Trouver  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

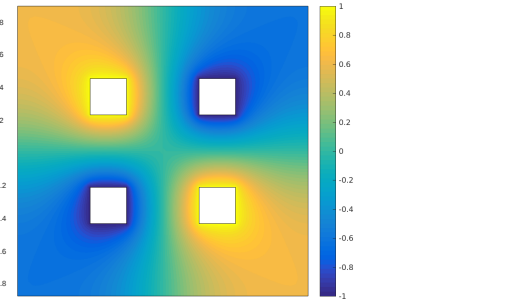
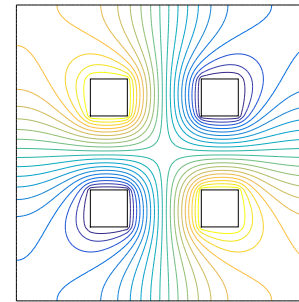
$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= -1 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ u &= 1 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_{10}. \end{aligned}$$



### 💡 Champ de vitesses en 2D : $\mathbf{V} = \nabla u$

Trouver  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= -1 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ u &= 1 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_{10}. \end{aligned}$$



## Problème mal posé

### 💡 Problème en dimension $n$

Find  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

où  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$ .

Ce problème est **mal posé** : non unicité de la solution.

$$u \text{ solution} \Rightarrow u + \text{constante solution}$$

## Equation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \mathbf{x}) - D\Delta u(t, \mathbf{x}) = \frac{f(t, \mathbf{x})}{\rho c}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in [0, T] \quad (5)$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  de frontière  $\partial\Omega$
- $D$ , coefficient de diffusivité thermique (en  $m^2/s$ ),
- $f$ , production volumique de chaleur (en  $W/m^3$ ),
- $\rho$ , masse volumique du matériau (en  $kg/m^3$ ),
- $c$ , chaleur spécifique massique du matériau (en  $J/kg/K$ ),
- $\Delta u$  laplacien (en espace) :  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}$

Problème bien posé ?

Equation de la chaleur

∂u/∂t(t,x) - DΔu(t,x) = f(t,x) / ρc, ∀x ∈ Ω, ∀t ∈ [0, T] (5)

Problème bien posé :

- condition initiale

∀x ∈ Ω, u(0,x) = u0(x) (6)

- conditions aux limites sur ∂Ω

Dirichlet :

∀x ∈ ΓD ⊂ ∂Ω, ∀t ∈ [0, T] u(t,x) = gD(t,x)

Neumann :

∀x ∈ ΓN ⊂ ∂Ω, ∀t ∈ [0, T] D ∂u/∂n(t,x) = gN(t,x)

Robin :

∀x ∈ ΓR ⊂ ∂Ω, ∀t ∈ [0, T] D ∂u/∂n(t,x) + αu(t,x) = gN(t,x)

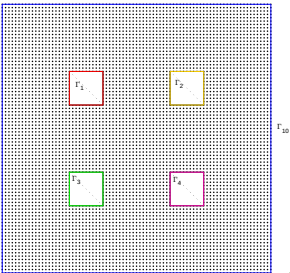
Problème de chaleur en 2D

Find u : Ω ⊂ R^2 -> R such that

∂u/∂t - DΔu = 0 in [0, T] x Ω,
u(0,x) = 20 ∀x ∈ Ω,
∂u/∂n = 0 on Γ10,
u = g1 on Γ2 ∪ Γ3,
u = g2 on Γ1 ∪ Γ4,

où Ω (cotés de 20cm)

- D = 98.8 x 10^-6 (aluminium) ou D = 23.9 x 10^-6 (plomb),
∀x ∈ Γ2 ∪ Γ3, g1(t,x) = (20 + 40t) si t <= 1 et g1(t,x) = 60 sinon,
∀x ∈ Γ1 ∪ Γ4, g2(t,x) = (20 + 80t) si t <= 1 et g2(t,x) = 100 sinon.



Equation des ondes

∂^2u/∂t^2(t,x) - c^2Δu(t,x) = 0, ∀x ∈ Ω, ∀t ∈ [0, T] (7)

- Ω ⊂ R^d de frontière ∂Ω
- c > 0 vitesse de propagation de l'onde,

Problème bien posé ?

∂^2u/∂t^2(t,x) - c^2Δu(t,x) = 0, ∀x ∈ Ω, ∀t ∈ [0, T]

- conditions initiales

u(0,x) = u0(x), ∀x ∈ Ω [position initiale] (8)

∂u/∂t(0,x) = v0(x), ∀x ∈ Ω [vitesse initiale] (9)

- conditions aux limites sur ∂Ω

Dirichlet :

∀x ∈ ΓD ⊂ ∂Ω, ∀t ∈ [0, T], u(t,x) = gD(t,x)

Neumann :

∀x ∈ ΓN ⊂ ∂Ω, ∀t ∈ [0, T], c^2 ∂u/∂n(t,x) = gN(t,x)

Robin :

∀x ∈ ΓR ⊂ ∂Ω, ∀t ∈ [0, T], c^2 ∂u/∂n(t,x) + αu(t,x) = gN(t,x)

Résolution numérique d'EDP

Méthodes déterministes :

- méthode des différences finies
- méthode des éléments finis
- méthode des volumes finis

Soient  $a < b$ ,  $c > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ , et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  donnés.

EDP modèle stationnaire 1D

Trouver  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$-u'' + cu = f \text{ in } ]a, b[, \tag{10}$$

$$u(a) = \alpha, \tag{11}$$

$$u(b) = \beta. \tag{12}$$

ou

EDP modèle stationnaire 1D : formulation aux points

Trouver  $u(x) \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x \in [a, b]$  telle que

$$-u''(x) + cu(x) = f(x) \quad \forall x \in ]a, b[,$$

$$u(a) = \alpha,$$

$$u(b) = \beta.$$

Chercher  $u$  ou  $u(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$  (infinité de points!)

EDP modèle stationnaire 1D : formulation aux points

Trouver  $u(x) \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x \in [a, b]$  telle que

$$-u''(x) + cu(x) = f(x) \quad \forall x \in ]a, b[,$$

$$u(a) = \alpha,$$

$$u(b) = \beta.$$

$$x_i = a + ih, \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, \text{ avec } h = \frac{b-a}{N}.$$

EDP modèle stationnaire1D : formulation aux points de discrétisation

Trouver  $u(x_i) \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$  tels que

$$-u''(x_i) + cu(x_i) = f(x_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, \tag{13}$$

$$u(x_0) = \alpha, \tag{14}$$

$$u(x_N) = \beta. \tag{15}$$

EDP modèle stationnaire1D : formulation aux points de discrétisation

Trouver  $u(x_i) \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$  tels que

$$-u''(x_i) + cu(x_i) = f(x_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket,$$

$$u(x_0) = \alpha,$$

$$u(x_N) = \beta.$$

$$u''(x_i) = (D_h^2 u)(x_i) + \mathcal{O}(h^2) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

### EDP modèle stationnaire 1D : formulation aux points de discrétisation

Trouver  $u(x_i) \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$  tels que

$$\begin{aligned} -u''(x_i) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, \\ u(x_0) &= \alpha, \\ u(x_N) &= \beta. \end{aligned}$$

$$u''(x_i) = (D_h^2 u)(x_i) + \mathcal{O}(h^2) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

### EDP modèle stationnaire en dimension 1 : formulation aux points de discrétisation (bis)

Trouver  $u(x_i) \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$  tels que

$$-\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} - \mathcal{O}(h^2) + cu(x_i) = f(x_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad (16)$$

$$u(x_0) = \alpha, \quad (17)$$

$$u(x_N) = \beta. \quad (18)$$

### EDP modèle stationnaire en dimension 1 : formulation aux points de discrétisation (bis)

Trouver  $u(x_i) \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$  tels que

$$-\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} - \mathcal{O}(h^2) + cu(x_i) = f(x_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket,$$

$$u(x_0) = \alpha,$$

$$u(x_N) = \beta.$$

On oublie le  $\mathcal{O}(h^2)$  et on pose  $u_i \approx u(x_i)$ .

### EDP modèle stationnaire 1D : schéma aux différences finies

Trouver  $u_i \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$  tels que

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + cu_i = f(x_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad (19)$$

$$u_0 = \alpha, \quad (20)$$

$$u_N = \beta. \quad (21)$$

### EDP modèle stationnaire en dimension 1 : formulation aux points de discrétisation (bis)

Trouver  $u(x_i) \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$  tels que

$$-\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} - \mathcal{O}(h^2) + cu(x_i) = f(x_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket,$$

$$u(x_0) = \alpha,$$

$$u(x_N) = \beta.$$

On oublie le  $\mathcal{O}(h^2)$  et on pose  $u_i \approx u(x_i)$ .

### EDP modèle stationnaire 1D : schéma aux différences finies

Trouver  $u_i \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$  tels que

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + cu_i = f(x_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad (19)$$

$$u_0 = \alpha, \quad (20)$$

$$u_N = \beta. \quad (21)$$

système linéaire de  $N + 1$  équations à  $N + 1$  inconnues !

$$\begin{cases} u_0 &= \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\ -u_2 + \mu u_1 - u_0 &= h^2 f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\ &\vdots & \\ -u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} &= h^2 f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\ u_N &= \beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N \end{cases}$$

avec  $\mu = 2 + ch^2$ .

$$\begin{cases} u_0 &= \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0 & : \text{ ligne 1} \\ -u_2 + \mu u_1 - u_0 &= h^2 f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1 & : \text{ ligne 2} \\ -u_3 + \mu u_2 - u_1 &= h^2 f(x_2) & \leftarrow \text{eq. en } x_2 & : \text{ ligne 3} \\ &\vdots & & \\ -u_{N-1} + \mu u_{N-2} - u_{N-3} &= h^2 f(x_{N-2}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2} & : \text{ ligne } N-1 \\ -u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} &= h^2 f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} & : \text{ ligne } N \\ u_N &= \beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N & : \text{ ligne } N+1 \end{cases}$$

$$\mathbb{A} \mathbf{U} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ -1 & \mu & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & \mu & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 f(x_{N-2}) \\ h^2 f(x_{N-1}) \\ \beta \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B} \quad (22)$$

avec  $\mu = 2 + ch^2$ ,  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N+1}(R)$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N+1}$  et  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N+1}$ .

### Proposition 3.1 : admis

Le schéma aux différences finies (19) à (21) est consistant à l'ordre 2 avec l'EDP (10) à (12) et on a

$$\max_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket} |u(x_i) - u_i| = \mathcal{O}(h^2). \quad (23)$$

#### Exercice 1 (schéma étudié en cours)

Q.1) Écrire la fonction `AssembleMat1D` retournant la matrice  $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  définie par

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (1)$$

où  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des réels donnés.

On souhaite résoudre par un schéma aux différences finies l'EDP suivante

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \text{ in } ]a, b[, \\ u(a) &= \alpha, \\ u(b) &= \beta. \end{aligned}$$

Q.2) En prenant le jeu de données  $a = 0$ ,  $b = 2\pi$ ,  $c = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1$  et  $f : x \mapsto \cos(x^2)$ , écrire une fonction permettant de résoudre l'EDP précédente. On pourra utiliser la fonction  $\mathbf{X} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \mathbf{B})$  retournant la solution du système linéaire  $\mathbb{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ .

Q.3) En choisissant judicieusement un jeu de données écrire un programme permettant de vérifier l'ordre du schéma utilisé à l'aide de la formule (23).

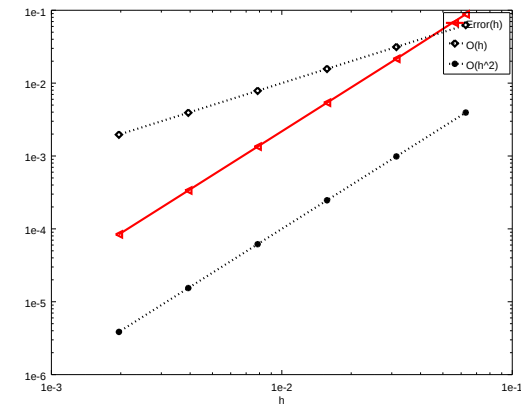


Figure: Représentation en échelle logarithmique

```
1 function W=AssembleMatID(d,alp,bet,gam)
2
3 H=sparse(d,d);
4 H(1,1)=gam;H(d,d)=gam;
5 for i=2:d-1
6     H(i,i)=alp;
7     H(i,i-1)=bet;H(i,i+1)=bet;
8 end
9 end
```

Listing: fonction Matlab/Octave AssembleMatID

```
1 function [x,U]=solveEDP1(a,b,c,alp,bet,f,H)
2
3 h=(b-a)/H;
4 x=a:h:b;
5 A=AssembleMatID(H+1,2+c)*h,-1,h*h);
6 B=zeros(H+1,1);
7 B(1)=alp;B(H+1)=bet;
8 for i=2:H
9     B(i)=f(x(i));
10 end
11 B=h*B;
12 U=A\B;
```

Listing: fonction Matlab/Octave solveEDP1

```
1 clear all
2 close all
3 % Initialisation des donnees
4 uex=@(x) sin(x.^2);
5 c=1;
6 f=@(x) 4*x.^2*sin(x.^2) - 2*cos(x.^2) + c*sin(x.^2);
7 a=0;b=2*pi;
8 % Calcul des erreurs
9 LH=[100,200,400,800,1600,3200];
10 k=1;
11 for H=LH
12     [x,U]=solveEDP1(a,b,c,uex(x),uex(b),f,H);
13     E(k)=(b-a)/H;
14     E(k)=max(abs(uex(x)'-U));
15     k=k+1;
16 end
17 % Représentation graphique
18 loglog(H,E,'r<-','LineWidth',2)
19 hold on
20 loglog(H,H,'kd:','LineWidth',2)
21 loglog(H,H.^2,'k*','LineWidth',2)
22 legend('Error(h)','O(h)','O(h^2)')
23 xlabel('h')
```

Listing: Script Matlab/Octave pour la représentation de l'ordre

- 1 Exemples d'E.D.P.
  - Equation de Laplace/Poisson
  - Equation de la chaleur
  - Equation des ondes
- 2 Méthodes de résolution numérique d'EDP
- 3 Méthode des différences finies 1D
  - EDP stationnaire 1D + Dirichlet
  - EDP stationnaire + CL mixtes

EDP stationnaire + CL mixtes

 EDP modèle stationnaire 1D avec condition de Dirichlet à droite et Neumann à gauche

Trouver  $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$-u'' + cu = f \text{ in } ]a, b[, \tag{24}$$
$$u(a) = \alpha, \tag{25}$$
$$u'(b) = \beta. \tag{26}$$

Seule la dernière ligne du système linéaire est à modifier! Remplacer par ???

 EDP modèle stationnaire 1D avec condition de Dirichlet à droite et Neumann à gauche

Trouver  $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$-u'' + cu = f \text{ in } ]a, b[, \tag{24}$$
$$u(a) = \alpha, \tag{25}$$
$$u'(b) = \beta. \tag{26}$$

Seule la dernière ligne du système linéaire est à modifier! Remplacer par ???

$$u'(x_N) = (D_h^+ u)(x_N) + \mathcal{O}(h) = \frac{u(x_N) - u(x_{N-1}))}{h} + \mathcal{O}(h) = \beta.$$

EDP stationnaire + CL mixtes

💡

EDP modèle stationnaire 1D avec condition de Dirichlet à droite et Neumann à gauche

Trouver  $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$-u'' + cu = f \text{ in } ]a, b[, \tag{24}$$

$$u(a) = \alpha, \tag{25}$$

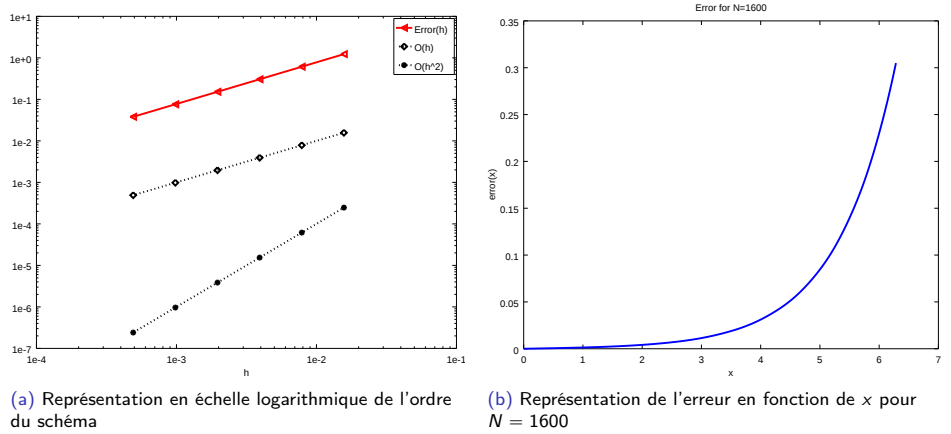
$$u'(b) = \beta. \tag{26}$$

Seule la dernière ligne du système linéaire est à modifier! Remplacer par ???

$$u'(x_N) = (D_h^+ u)(x_N) + \mathcal{O}(h) = \frac{u(x_N) - u(x_{N-1}))}{h} + \mathcal{O}(h) = \beta.$$

$$\frac{u_N - u_{N-1}}{h} = \beta. \tag{27}$$

Schéma d'ordre 1 !!!



Ecrire un schéma d'ordre 2 pour Neumann

$$\begin{cases} u_0 &= \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0 & : \text{ ligne 1} \\ -u_2 + \mu u_1 - u_0 &= h^2 f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1 & : \text{ ligne 2} \\ -u_3 + \mu u_2 - u_1 &= h^2 f(x_2) & \leftarrow \text{eq. en } x_2 & : \text{ ligne 3} \\ &\vdots & & \\ -u_{N-1} + \mu u_{N-2} - u_{N-3} &= h^2 f(x_{N-2}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2} & : \text{ ligne } N-1 \\ -u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} &= h^2 f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} & : \text{ ligne } N \\ u_N - u_{N-1} &= h\beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N & : \text{ ligne } N+1 \end{cases}$$

$$\mathbb{A} U \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \mu & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & -1 & \mu \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \mu \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ h^2 f(x_{N-2}) \\ h^2 f(x_{N-1}) \\ h\beta \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} B \tag{28}$$

Mais ...

TD

Exercice 2

Soit  $\varphi$  une fonction suffisamment régulière et  $h > 0$

Q.1

Montrer que

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{1}$$

Q.2

Montrer que

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2}$$

Q.3

Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre 2 de  $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$  en utilisant uniquement des valeurs de la fonction  $\varphi$  aux points  $x + ih$  avec  $i \in \mathbb{N}$ .

Q.4

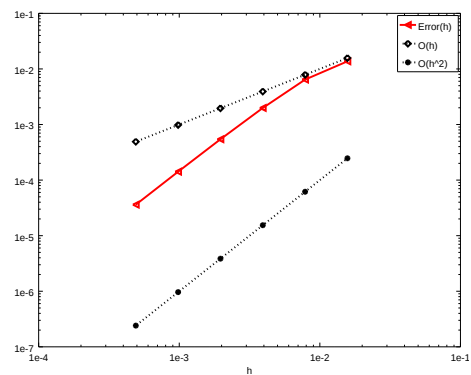
Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre 2 de  $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$  en utilisant uniquement des valeurs de la fonction  $\varphi$  aux points  $x - ih$  avec  $i \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{cases} u_0 &= \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0 & : \text{ligne 1} \\ -u_2 + \mu u_1 - u_0 &= f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1 & : \text{ligne 2} \\ -u_3 + \mu u_2 - u_1 &= f(x_2) & \leftarrow \text{eq. en } x_2 & : \text{ligne 3} \\ &\vdots & & \\ -u_{N-1} + \mu u_{N-2} - u_{N-3} &= f(x_{N-2}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2} & : \text{ligne } N-1 \\ -u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} &= f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} & : \text{ligne } N \\ 3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2} &= 2h\beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N & : \text{ligne } N+1 \end{cases}$$

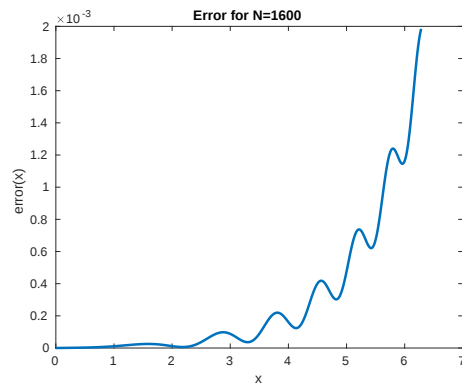
$$\mathbb{A} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mu \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ h^2 f(x_{N-2}) \\ h^2 f(x_{N-1}) \\ 2h\beta \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B} \quad (54)$$

et ...

## Schéma d'ordre 2



(a) Représentation en échelle logarithmique de l'ordre du schéma



(b) Représentation de l'erreur en fonction de x pour N = 1600

**Exercice 3**

Soit le problème suivant

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x), \quad \forall x \in ]a, b[, & (1) \\ u'(a) &= \alpha, & (2) \\ u(b) &= \beta. & (3) \end{aligned}$$

où c est une fonction positive.

Q.1

- Quelles sont les données du problème (1)-(3)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)
- Quelles sont les inconnues du problème (1)-(3)? (préciser le type)
- Quelles sont les conditions initiales?
- Quelles sont les conditions aux limites?

Q.2

Construire une discrétisation régulière de  $[a, b]$  avec N pas de discrétisation en espace.

On note  $x_i, i \in [0, N]$  cette discrétisation. On souhaite résoudre (1) à l'aide du schéma numérique

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + c_i u_i = f_i. \quad (4)$$

Q.3

- Expliquer comment le schéma (4) a été obtenu à partir de (1) et préciser ce que représente les termes  $u_i, f_i, c_i$  et  $\Delta x$ ?
- Donner l'ensemble  $\mathcal{E}$  des valeurs que peut prendre i dans le schéma (1).
- Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.
- Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.

On note  $\mathbf{V}$  le vecteur de dimension  $N+1$ , de composantes  $\mathbf{V}_i = u_{i-1}, \forall i \in [1, N+1]$ .

Q.4

Montrer que le vecteur  $\mathbf{V}$  est solution du système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (5)$$

en explicitant la matrice  $\mathbb{A}$  et le vecteur  $\mathbf{F}$  (préciser les dimensions).

Q.5

Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (3) basé sur (5). (Utiliser au maximum les fonctions). On pourra utiliser la fonction  $\mathbf{X} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \mathbf{B})$  retournant la solution du système linéaire  $\mathbb{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ .