

Méthodes Numériques II

Chapitre 3: Equations Différentielles Ordinaires

Exercices - épisode 2

version du 2026/03/05 à 07:31:24

EXERCICE 1

la **méthode de Heun** est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \frac{h}{2} \mathbf{f}(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})).$$

Q. 1 Ecrire la fonction algorithmique [REDHeunVec](#) permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par la méthode de Heun en utilisant au plus $2N$ évaluation de $\mathbf{f}$. □

Q. 2 Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode. □

Correction

R. 1 Le schéma de Heun peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} (\mathbf{k}_1^n + \mathbf{k}_2^n)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1^n &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \mathbf{k}_2^n &= \mathbf{f}(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h \mathbf{k}_1^n) \end{aligned}$$

L'algorithme de la fonction [REDHeunVec](#) s'écrit alors :

Algorithme 1: Fonction [REDHeunVec](#) : résolution d'un problème de Cauchy par le schéma de Heun

Données : $\mathbf{f}$: $\mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)

t^0 : réel, temps initial

T : réel > 0

$\mathbf{y}^0$: un vecteur de $\mathbb{R}^d$, donnée initiale

N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).

Résultat : $\mathbf{t}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$, $\mathbf{t}(n) = t^{n-1}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

$\mathbf{Y}$: matrice réelle de dimension $d \times (N+1)$, $\mathbf{Y}(:, n) = \mathbf{y}^{(n-1)}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

1: **Fonction** $[\mathbf{t}, \mathbf{Y}] \leftarrow \text{REDHeunVec}(f, t^0, T, \mathbf{y}^0, N)$

2: $\mathbf{t} \leftarrow \text{DirReg}(t^0, t^0 + T, N)$

3: $h \leftarrow (b - a)/N$

4: $\mathbf{Y}(:, 1) \leftarrow \mathbf{y}^0$

5: **Pour** $n \leftarrow 1$ à N **faire**

6: $\mathbf{k}_1 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n), \mathbf{Y}(:, n))$

7: $\mathbf{k}_2 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n+1), \mathbf{Y}(:, n) + h \mathbf{k}_1)$

8: $\mathbf{Y}(:, n+1) \leftarrow \mathbf{Y}(:, n) + (h/2) * (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$

9: **Fin Pour**

10: **Fin Fonction**

R. 2 Il est possible de vérifier/retrouver numériquement l'ordre du schéma de Heun. Pour cela on choisit un problème de Cauchy dont la solution exacte est connue et on calcule pour différentes valeurs de h (et donc différentes valeurs de N) le maximum de l'erreur commise entre la solution exacte et la solution numérique donnée par le schéma de Heun :

$$E(h) = \max_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} \left\| \mathbf{y}(t^n) - \mathbf{y}^{[n]} \right\|_{\infty}$$

On représente ensuite la fonction $h \mapsto E(h)$. La méthode de Heun étant d'ordre 2, on a alors $E(h) = \mathcal{O}(h^2) \approx Ch^2$ quand h est suffisamment petit. On utilise alors une échelle logarithmique pour représenter la courbe. En effet, on a

$$\log E(h) \approx \log(Ch^2) = \log(C) + 2 \log(h)$$

En posant $X = \log(h)$ et $Y = \log E(h)$, coordonnées en échelle logarithmique, on a

$$Y \approx \log(C) + 2X$$

qui est l'équation d'une droite. La pente de cette droite est donc l'ordre de la méthode.

```

1:  $t^0 \leftarrow 0, T \leftarrow 4\pi,$ 
2:  $f : t, z \longrightarrow \cos(t) + 1, y_{ex} : t \longrightarrow \sin(t) + t$ 
3:  $y^0 \leftarrow y_{ex}(t^0)$ 
4:  $LN \leftarrow 100 : 50 : 1000$ 
5:  $nLN \leftarrow \text{length}(LN)$ 
6:  $H \leftarrow \mathbb{O}_{nLN},$  ▷ pour stocker les  $h$ 
7:  $E \leftarrow \mathbb{O}_{nLN},$  ▷ pour stocker les erreurs
8: Pour  $k \leftarrow 1$  à  $nLN$  faire
9:    $N \leftarrow LN(k)$ 
10:   $[t, y] \leftarrow \text{REDHeunVec}(f, t^0, T, \mathbf{y}^0, N)$ 
11:   $E(k) \leftarrow \max(\text{abs}(y - y_{ex}(t)))$ 
12:   $H(k) \leftarrow T/N$ 
13: Fin Pour
14: ... ▷ Representation graphique

```

◇

EXERCICE 2

la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est donnée par

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_1^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\
 \mathbf{k}_2^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \mathbf{k}_1^{[n]}\right) \\
 \mathbf{k}_3^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \mathbf{k}_2^{[n]}\right) \\
 \mathbf{k}_4^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h \mathbf{k}_3^{[n]}\right) \\
 \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{6} (\mathbf{k}_1^{[n]} + 2\mathbf{k}_2^{[n]} + 2\mathbf{k}_3^{[n]} + \mathbf{k}_4^{[n]}).
 \end{aligned}$$

Q. 1 Ecrire une fonction algorithmique `REDRK4Vec` permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. □

Q. 2 Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode. □

~~~~~

**Correction**

**R. 1** Il faut noter qu'il n'est pas nécessaire de stocker l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{k}_1^{[n]}, \dots, \mathbf{k}_4^{[n]}$ ,  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Pour minimiser l'occupation mémoire de l'ordinateur, à chaque itération, on calcule  $\mathbf{k}_1 \leftarrow \mathbf{k}_1^{[n]}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ , ...  $\mathbf{k}_4 \leftarrow \mathbf{k}_4^{[n]}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ . L'algorithme de la fonction `REDRK4Vec` s'écrit alors :

---

**Algorithme 2:** Fonction `REDRK4Vec` : résolution d'un problème de Cauchy par le schéma de RK4

---

**Données :**  $\mathbf{f}$  :  $\mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$  fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)  
 $t^0$  : réel, temps initial  
 $T$  : réel  $> 0$   
 $\mathbf{y}^0$  : un vecteur de  $\mathbb{R}^d$ , donnée initiale  
 $N$  : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).  
**Résultat :**  $\mathbf{t}$  : vecteur de  $\mathbb{R}^{N+1}$ ,  $\mathbf{t}(n) = t^{n-1}$ ,  $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$   
 $\mathbf{Y}$  : matrice réelle de dimension  $d \times (N+1)$ ,  $\mathbf{Y}(:, n) = \mathbf{y}^{(n-1)}$ ,  $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

```

1: Fonction  $[\mathbf{t}, \mathbf{Y}] \leftarrow \text{REDRK4Vec}(f, t^0, T, \mathbf{y}^0, N)$ 
2:    $\mathbf{t} \leftarrow \text{DirReg}(t^0, t^0 + T, N)$ 
3:    $h \leftarrow (b - a)/N$ 
4:    $\mathbf{Y}(:, 1) \leftarrow \mathbf{y}^0$ 
5:   Pour  $n \leftarrow 1$  à  $N$  faire
6:      $\mathbf{k}_1 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n), \mathbf{Y}(:, n))$ 
7:      $\mathbf{k}_2 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n) + h/2, \mathbf{Y}(:, n) + (h/2)\mathbf{k}_1)$ 
8:      $\mathbf{k}_3 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n) + h/2, \mathbf{Y}(:, n) + (h/2)\mathbf{k}_2)$ 
9:      $\mathbf{k}_4 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n) + h, \mathbf{Y}(:, n) + h\mathbf{k}_3)$ 
10:     $\mathbf{Y}(:, n+1) \leftarrow \mathbf{Y}(:, n) + (h/6) * (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$ 
11:   Fin Pour
12: Fin Fonction
```

---

**R. 2** voir aussi correction Exercice ??-Q2 : l'ordre 2 étant remplacé par 4 ici! Il est possible de vérifier/retrouver numériquement l'ordre du schéma de Runge-Kutta 4. Pour cela on choisit un problème de Cauchy dont la solution exacte est connue et on calcule pour différentes valeurs de  $h$  (et donc différentes valeurs de  $N$ ) le maximum de l'erreur commise entre la solution exacte et la solution numérique donnée par le schéma de Runge-Kutta 4 :

$$E(h) = \max_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} \left\| \mathbf{y}(t^n) - \mathbf{y}^{[n]} \right\|_{\infty}$$

On représente ensuite la fonction  $h \mapsto E(h)$ . La méthode de Runge-Kutta 4 étant d'ordre 4, on a alors théoriquement  $E(h) = \mathcal{O}(h^4) \approx Ch^4$  quand  $h$  est suffisamment petit. On utilise alors une échelle logarithmique pour représenter la courbe. En effet, on a

$$\log E(h) \approx \log(Ch^4) = \log(C) + 4 \log(h)$$

En posant  $X = \log(h)$  et  $Y = \log E(h)$ , coordonnées en échelle logarithmique, on a

$$Y \approx \log(C) + 4X$$

qui est l'équation d'une droite. La pente de cette droite est donc l'ordre de la méthode.

```

1:  $t^0 \leftarrow 0, T \leftarrow 4\pi,$ 
2:  $f : t, z \longrightarrow \cos(t) + 1, y_{ex} : t \longrightarrow \sin(t) + t$ 
3:  $y^0 \leftarrow y_{ex}(t^0)$ 
4:  $LN \leftarrow 100 : 50 : 1000$ 
5:  $nLN \leftarrow \text{length}(LN)$ 
6:  $H \leftarrow \mathbb{O}_{nLN},$  ▷ pour stocker les  $h$ 
7:  $E \leftarrow \mathbb{O}_{nLN},$  ▷ pour stocker les erreurs
8: Pour  $k \leftarrow 1$  à  $nLN$  faire
9:    $N \leftarrow LN(k)$ 
10:   $[t, y] \leftarrow \text{REDRK4Vec}(f, t^0, T, y^0, N)$ 
11:   $E(k) \leftarrow \max(\text{abs}(y - y_{ex}(t)))$ 
12:   $H(k) \leftarrow T/N$ 
13: Fin Pour
14: ... ▷ Representation graphique

```

◇

### EXERCICE 3

La méthode de Adam-Bashforth d'ordre 4 explicite est donnée par

$$y^{[n+1]} = y^{[n]} + \frac{h}{24} \left( 55f^{[n]} - 59f^{[n-1]} + 37f^{[n-2]} - 9f^{[n-3]} \right). \quad (3.1)$$

avec  $f^{[n]} = f(t^n, y^{[n]})$ .

**Q. 1** Ecrire la fonction algorithmique *REDAB4Vec* permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par cette méthode. □



#### Correction

**R. 1** Soit  $(t^{[n]})_{n=0}^N$  la discrétisation régulière de  $[t^0, t^0 + T]$  avec  $h = T/N$ . On a donc  $t^{[n]} = t^0 + nh$ ,  $\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ .

On ne peut *utiliser* le schéma à pas multiples (3.1) que pour  $n \geq 3$ . On va alors utiliser un schéma à un pas d'ordre (au moins) 4 pour calculer les 4 premiers termes  $y^{[0]}$ ,  $y^{[1]}$ ,  $y^{[2]}$  et  $y^{[3]}$  nécessaire pour *démarrer* le schéma (3.1). On choisi par exemple la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour initialiser ces 4 termes. Deux possibilités :

- on réécrit le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 pour ces 4 premiers termes

```

1:  $Y(:, 1) \leftarrow y^0$ 
2: Pour  $n \leftarrow 1$  à 3 faire
3:    $k_1 \leftarrow f(t(n), Y(:, n))$ 
4:    $k_2 \leftarrow f(t(n) + h/2, Y(:, n) + (h/2)k_1)$ 
5:    $k_3 \leftarrow f(t(n) + h/2, Y(:, n) + (h/2)k_2)$ 
6:    $k_4 \leftarrow f(t(n) + h, Y(:, n) + hk_3)$ 
7:    $Y(:, n+1) \leftarrow Y(:, n) + (h/6) * (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ 
8: Fin Pour

```

- on utilise la fonction *REDRK4Vec* avec ses paramètres d'entrées judicieusement choisis :

```

1:  $[t_{ini}, Y_{ini}] \leftarrow \text{REDRK4Vec}(f, t^0, t^0 + 3 * h, y^0, 3)$ 
2: Pour  $n \leftarrow 1$  à 4 faire
3:    $Y(:, n) \leftarrow Y_{ini}(:, n)$ 
4: Fin Pour

```

En choisissant cette dernière solution, l'algorithme de la fonction `REDAB4Vec` s'écrit alors :

---

**Algorithme 3:** Fonction `REDAB4Vec` : résolution d'un problème de Cauchy par le schéma explicite d'Adams-Bashforth d'ordre 4

---

**Données :**  $\mathbf{f}$  :  $\mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$  fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)

$t^0$  : réel, temps initial

$T$  : réel  $> 0$

$\mathbf{y}^0$  : un vecteur de  $\mathbb{R}^d$ , donnée initiale

$N$  : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).

**Résultat :**  $\mathbf{t}$  : vecteur de  $\mathbb{R}^{N+1}$ ,  $\mathbf{t}(n) = t^{n-1}$ ,  $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

$\mathbf{Y}$  : matrice réelle de dimension  $d \times (N+1)$ ,  $\mathbf{Y}(:, n) = \mathbf{y}^{(n-1)}$ ,  $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

```

1: Fonction  $[\mathbf{t}, \mathbf{Y}] \leftarrow \text{REDAB4Vec}( \mathbf{f}, t^0, T, \mathbf{y}^0, N )$ 
2:    $\mathbf{t} \leftarrow \text{DisReg}(t^0, t^0 + T, N)$ 
3:    $h \leftarrow (b - a)/N$ 
4:    $[\mathbf{t}_{ini}, \mathbf{Y}_{ini}] \leftarrow \text{REDRK4Vec}(\mathbf{f}, t^0, t^0 + 3 * h, \mathbf{y}^0, 3)$ 
5:   Pour  $n \leftarrow 1$  à 4 faire
6:      $\mathbf{Y}(:, n) \leftarrow \mathbf{Y}_{ini}(:, n)$ 
7:   Fin Pour
8:    $\mathbf{k}_1 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(3), \mathbf{Y}(:, 3))$ 
9:    $\mathbf{k}_2 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(2), \mathbf{Y}(:, 2))$ 
10:   $\mathbf{k}_3 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(1), \mathbf{Y}(:, 1))$ 
11:  Pour  $n \leftarrow 4$  à  $N$  faire
12:     $\mathbf{k}_0 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n), \mathbf{Y}(:, n))$ 
13:     $\mathbf{Y}(:, n+1) \leftarrow \mathbf{Y}(:, n) + (h/24) * (55 * \mathbf{k}_0 - 59 * \mathbf{k}_1 + 37 * \mathbf{k}_2 - 9 * \mathbf{k}_3)$ 
14:     $\mathbf{k}_3 \leftarrow \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2 \leftarrow \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1 \leftarrow \mathbf{k}_0$ 
15:  Fin Pour
16: Fin Fonction
```

---

◇

## EXERCICE 4

On pose  $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ . La **méthode de Adams-Bashforth d'ordre 4** explicite est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left( 55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]} \right)$$

et la **méthode de Adams-Moulton d'ordre 4** implicite par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left( 9\mathbf{f}^{[n+1]} + 19\mathbf{f}^{[n]} - 5\mathbf{f}^{[n-1]} + \mathbf{f}^{[n-2]} \right)$$

avec  $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ .

**Q. 1** Ecrire la fonction algorithmique `REDPC4Vec` permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par une méthode de prédiction-correction utilisant ces deux schémas. On minimisera le nombre d'appel à la fonction  $\mathbf{f}$  dans la boucle principale. □



### Correction

**R. 1** On utilise le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 pour initialiser les 4 premières valeurs. Ensuite on utilise comme prédicteur le schéma explicite et comme correcteur le schéma implicite. Le principe est donc

- Calcul à l'aide du prédicteur :

$$\hat{\mathbf{y}}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left( 55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]} \right)$$

- Calcul à l'aide du correcteur :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}^{[n+1]} &= \mathbf{f}(t^{n+1}, \hat{\mathbf{y}}^{[n+1]}) \\ \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left( 9\hat{\mathbf{f}}^{[n+1]} + 19\mathbf{f}^{[n]} - 5\mathbf{f}^{[n-1]} + \mathbf{f}^{[n-2]} \right) \end{aligned}$$

L'algorithme de la fonction `REDPC4Vec` s'écrit alors :

---

**Algorithme 4:** Fonction `REDPC4Vec` : résolution d'un problème de Cauchy par prédiction-correction (Adams-Bashforth/Adams-Moulton) d'ordre 4

---

**Données :**  $\mathbf{f}$  :  $\mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)

$t^0$  : réel, temps initial

$T$  : réel  $> 0$

$\mathbf{y}^0$  : un vecteur de  $\mathbb{R}^d$ , donnée initiale

$N$  : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).

**Résultat :**  $\mathbf{t}$  : vecteur de  $\mathbb{R}^{N+1}$ ,  $\mathbf{t}(n) = t^{n-1}$ ,  $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

$\mathbf{Y}$  : matrice réelle de dimension  $d \times (N+1)$ ,  $\mathbf{Y}(:, n) = \mathbf{y}^{(n-1)}$ ,  $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

```

1: Fonction  $[\mathbf{t}, \mathbf{Y}] \leftarrow \text{REDPC4Vec}(f, t^0, T, \mathbf{y}^0, N)$ 
2:  $\mathbf{t} \leftarrow \text{DisReg}(t^0, t^0 + T, N)$ 
3:  $h \leftarrow (b - a)/N$ 
4:  $[\mathbf{t}_{ini}, \mathbf{Y}_{ini}] \leftarrow \text{REDRK4Vec}(f, t^0, t^0 + 3 * h, \mathbf{y}^0, 3)$ 
5: Pour  $n \leftarrow 1$  à 4 faire
6:    $\mathbf{Y}(:, n) \leftarrow \mathbf{Y}_{ini}(:, n)$ 
7: Fin Pour
8:  $\mathbf{k}_1 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(3), \mathbf{Y}(:, 3))$ 
9:  $\mathbf{k}_2 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(2), \mathbf{Y}(:, 2))$ 
10:  $\mathbf{k}_3 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(1), \mathbf{Y}(:, 1))$ 
11: Pour  $n \leftarrow 4$  à  $N$  faire
12:    $\mathbf{k}_0 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n), \mathbf{Y}(:, n))$ 
13:    $\hat{\mathbf{Y}} \leftarrow \mathbf{Y}(:, n) + (h/24) * (55 * \mathbf{k}_0 - 59 * \mathbf{k}_1 + 37 * \mathbf{k}_2 - 9 * \mathbf{k}_3)$ 
14:    $\hat{\mathbf{F}} \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n+1), \hat{\mathbf{Y}})$ 
15:    $\mathbf{Y}(:, n+1) \leftarrow \mathbf{Y}(:, n) + (h/24) * (9 * \hat{\mathbf{F}} + 19 * \mathbf{k}_0 - 5 * \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ 
16:    $\mathbf{k}_3 \leftarrow \mathbf{k}_2$ 
17:    $\mathbf{k}_2 \leftarrow \mathbf{k}_1$ 
18:    $\mathbf{k}_1 \leftarrow \mathbf{k}_0$ 
19: Fin Pour
20: Fin Fonction
```

---

◇

## EXERCICE 5 : Examen du 4 avril 2023, partie E.D.O.

**Q. 1** a. Que signifie l'abréviation *E.D.O.* ?

b. Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy *vectorel*.

c. Quelles sont les données d'un problème de Cauchy *vectorel* ?

d. Que cherche-t'on?

□

**Q. 2** Ecrire une fonction algorithmique *DisReg* permettant de d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle  $[a, b]$  ( $a < b$ ) en  $n + 1$  points. □

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\Phi(t^n, \mathbf{y}^{[n]}, h). \quad (5.2)$$

La fonction  $\Phi$  associée à une méthode de Runge-Kutta à  $q$  évaluations de  $\mathbf{f}$  (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi(t, \mathbf{y}, h) = \sum_{i=1}^q c_i \mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h)$$

avec

$$\mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h) = \mathbf{f} \left( t + ha_i, \mathbf{y} + h \sum_{j=1}^q b_{i,j} \mathbf{k}^{[j]}(t, \mathbf{y}, h) \right), \quad 1 \leq i \leq q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \mathbf{c}^t \end{array} \quad (5.3)$$

avec  $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$  et  $\mathbf{c} = (c_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$ .

On prend pour tableau de Butcher:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{13}{7} & \frac{20}{7} & 0 \\ \hline & -\frac{1}{3} & \frac{25}{24} & \frac{7}{24} \end{array} \quad (5.4)$$

**Q. 3** Ecrire explicitement et en détail le schéma de Runge-Kutta associé au tableau de Butcher (5.4). □

Un autre schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{1}{36} h(3\mathbf{k}_1 + 25\mathbf{k}_2 + 8\mathbf{k}_3) \\ \text{avec} & \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}), \\ & \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t^n + \frac{2}{5}h, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{2}{5}h\mathbf{k}_1), \\ & \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h(-\frac{7}{8}\mathbf{k}_1 + \frac{15}{8}\mathbf{k}_2)), \\ \mathbf{y}^{[0]} & \text{donné.} \end{cases} \quad (5.5)$$

**Q. 4** [Algorithmique] Ecrire la fonction algorithmique *RedRK3* permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma (5.5). □

Un schéma explicite, à **pas multiples**, et d'ordre 3 est donné par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h \left( \frac{23}{12} \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) - \frac{4}{3} \mathbf{f}(t^{n-1}, \mathbf{y}^{[n-1]}) + \frac{5}{12} \mathbf{f}(t^{n-2}, \mathbf{y}^{[n-2]}) \right) \quad (5.6)$$

**Q. 5** Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma (5.6). Un soin particulier sera apporté à l'«initialisation». □

**Q. 6** [Algorithmique] Ecrire la fonction algorithmique *RedPM3* permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma (5.6). □

**Application:** Soit le système d'E.D.O. suivant

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) - \nu_1(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + x_2(t) &= \cos(t) \end{cases} \quad (5.7a)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_2(t) - \nu_2(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + x_1(t) &= \sin(t) \end{cases} \quad (5.7b)$$

On veut résoudre numériquement ce système d'E.D.O. avec pour données initiales  $x_1(0) = 1$ ,  $\dot{x}_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = -1$ ,  $\dot{x}_2(0) = 1/2$ . Le temps final  $T$  sera égal à 10.

**Q. 7** Ecrire le problème précédent sous la forme d'un problème de Cauchy.  $\square$

**Q. 8** [Algorithmique] Ecrire un algorithme complet permettant de résoudre (5.7a)-(5.7b) avec les données initiales spécifiées. On prendra  $\nu_1 = 1/4$  et  $\nu_2 = 1/3$ . Ce programme devra aussi représenter les approximations des fonctions  $x_1$  et  $x_2$ . On utilisera pour cela la fonction `Plot(X,Y)` qui relie les points  $(X(i), Y(i))$  contenus dans les deux tableaux de même taille  $X$  et  $Y$  (fonction similaire à la fonction `plot` de Matlab).  $\square$



## Correction

**R. 1** a. Equation Différentielle Ordinaire

b. Un problème de Cauchy vectoriel consiste à déterminer la fonction  $\mathbf{y} : [t^0, t^0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$  solution de

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T], \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

avec  $\mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$  donné.

c. les données d'un problème de Cauchy vectoriel sont

- $t^0 \in \mathbb{R}$ ,
- $T \in \mathbb{R}^{+*}$ ,
- $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$ ,
- $\mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ .

d. On cherche la fonction  $\mathbf{y} : [t^0, t^0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$\diamond$