

Méthodes Numériques II

Chapitre 3: Equations Différentielles Ordinaires

Exercices - épisode 2

version du 2026/03/05 à 07:31:10

EXERCICE 1

la **méthode de Heun** est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \frac{h}{2} \mathbf{f}(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})).$$

Q. 1 Ecrire la fonction algorithmique `REDHeunVec` permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par la méthode de Heun en utilisant au plus $2N$ évaluation de $\mathbf{f}$. □

R. 1 Le schéma de Heun peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} (\mathbf{k}_1^n + \mathbf{k}_2^n)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1^n &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \mathbf{k}_2^n &= \mathbf{f}(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h \mathbf{k}_1^n) \end{aligned}$$

L'algorithme de la fonction `REDHeunVec` s'écrit alors :

Algorithme 1: Fonction `REDHeunVec` : résolution d'un problème de Cauchy par le schéma de Heun

Données : $\mathbf{f}$: $\mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)

t^0 : réel, temps initial

T : réel > 0

$\mathbf{y}^0$: un vecteur de $\mathbb{R}^d$, donnée initiale

N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).

Résultat : $\mathbf{t}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$, $\mathbf{t}(n) = t^{n-1}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

$\mathbf{Y}$: matrice réelle de dimension $d \times (N+1)$, $\mathbf{Y}(:, n) = \mathbf{y}^{(n-1)}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

1: **Fonction** `[t, Y] ← REDHeunVec( f, t0, T, y0, N )`

2: `t ← DirReg(t0, t0 + T, N)`

3: `h ← (b - a)/N`

4: `Y(:, 1) ← y0`

5: **Pour** $n \leftarrow 1$ à N **faire**

6: `k1 ← f(t(n), Y(:, n))`

7: `k2 ← f(t(n+1), Y(:, n) + h k1)`

8: `Y(:, n+1) ← Y(:, n) + (h/2) * (k1 + k2)`

9: **Fin Pour**

10: **Fin Fonction**

Q. 2 Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode. □

R. 2 Il est possible de vérifier/retrouver numériquement l'ordre du schéma de Heun. Pour cela on choisit un problème de Cauchy dont la solution exacte est connue et on calcule pour différentes valeurs de h (et donc différentes valeurs de N) le maximum de l'erreur commise entre la solution exacte et la solution numérique donnée par le schéma de Heun :

$$E(h) = \max_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} \left\| \mathbf{y}(t^n) - \mathbf{y}^{[n]} \right\|_{\infty}$$

On représente ensuite la fonction $h \mapsto E(h)$. La méthode de Heun étant d'ordre 2, on a alors $E(h) = \mathcal{O}(h^2) \approx Ch^2$ quand h est suffisamment petit. On utilise alors une échelle logarithmique pour représenter la courbe. En effet, on a

$$\log E(h) \approx \log(Ch^2) = \log(C) + 2 \log(h)$$

En posant $X = \log(h)$ et $Y = \log E(h)$, coordonnées en échelle logarithmique, on a

$$Y \approx \log(C) + 2X$$

qui est l'équation d'une droite. La pente de cette droite est donc l'ordre de la méthode.

```

1:  $t^0 \leftarrow 0, T \leftarrow 4\pi,$ 
2:  $f : t, z \longrightarrow \cos(t) + 1, y_{ex} : t \longrightarrow \sin(t) + t$ 
3:  $y^0 \leftarrow y_{ex}(t^0)$ 
4:  $LN \leftarrow 100 : 50 : 1000$ 
5:  $nLN \leftarrow \text{length}(LN)$ 
6:  $H \leftarrow \mathbb{O}_{nLN},$  ▷ pour stocker les  $h$ 
7:  $E \leftarrow \mathbb{O}_{nLN},$  ▷ pour stocker les erreurs
8: Pour  $k \leftarrow 1$  à  $nLN$  faire
9:    $N \leftarrow LN(k)$ 
10:   $[t, y] \leftarrow \text{REDHeunVec}(f, t^0, T, \mathbf{y}^0, N)$ 
11:   $E(k) \leftarrow \max(\text{abs}(y - y_{ex}(t)))$ 
12:   $H(k) \leftarrow T/N$ 
13: Fin Pour
14: ... ▷ Representation graphique

```

EXERCICE 2

la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est donnée par

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_1^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\
 \mathbf{k}_2^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \mathbf{k}_1^{[n]}\right) \\
 \mathbf{k}_3^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \mathbf{k}_2^{[n]}\right) \\
 \mathbf{k}_4^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h \mathbf{k}_3^{[n]}\right) \\
 \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{6} (\mathbf{k}_1^{[n]} + 2\mathbf{k}_2^{[n]} + 2\mathbf{k}_3^{[n]} + \mathbf{k}_4^{[n]}).
 \end{aligned}$$

Q. 1 Ecrire une fonction algorithmique `REDRK4Vec` permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. □

R. 1 Il faut noter qu'il n'est pas nécessaire de stocker l'ensemble des vecteurs $\mathbf{k}_1^{[n]}, \dots, \mathbf{k}_4^{[n]}, n \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Pour minimiser l'occupation mémoire de l'ordinateur, à chaque itération, on calcule $\mathbf{k}_1 \leftarrow \mathbf{k}_1^{[n]}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$, ... $\mathbf{k}_4 \leftarrow \mathbf{k}_4^{[n]}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$. L'algorithme de la fonction `REDRK4Vec` s'écrit alors :

Algorithme 2: Fonction `REDRK4Vec` : résolution d'un problème de Cauchy par le schéma de RK4

Données : $\mathbf{f}$: $\mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)

t^0 : réel, temps initial

T : réel > 0

$\mathbf{y}^0$: un vecteur de $\mathbb{R}^d$, donnée initiale

N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).

Résultat : $\mathbf{t}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$, $\mathbf{t}(n) = t^{n-1}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

$\mathbf{Y}$: matrice réelle de dimension $d \times (N+1)$, $\mathbf{Y}(:, n) = \mathbf{y}^{(n-1)}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

```

1: Fonction  $[\mathbf{t}, \mathbf{Y}] \leftarrow \text{REDRK4Vec}( \mathbf{f}, t^0, T, \mathbf{y}^0, N )$ 
2:    $\mathbf{t} \leftarrow \text{DirReg}(t^0, t^0 + T, N)$ 
3:    $h \leftarrow (b - a)/N$ 
4:    $\mathbf{Y}(:, 1) \leftarrow \mathbf{y}^0$ 
5:   Pour  $n \leftarrow 1$  à  $N$  faire
6:      $\mathbf{k}_1 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n), \mathbf{Y}(:, n))$ 
7:      $\mathbf{k}_2 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n) + h/2, \mathbf{Y}(:, n) + (h/2)\mathbf{k}_1)$ 
8:      $\mathbf{k}_3 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n) + h/2, \mathbf{Y}(:, n) + (h/2)\mathbf{k}_2)$ 
9:      $\mathbf{k}_4 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n) + h, \mathbf{Y}(:, n) + h\mathbf{k}_3)$ 
10:     $\mathbf{Y}(:, n+1) \leftarrow \mathbf{Y}(:, n) + (h/6) * (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$ 
11:   Fin Pour
12: Fin Fonction
```

Q. 2 *Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode.* □

R. 2 voir aussi correction Exercice ??-Q2 : l'ordre 2 étant remplacé par 4 ici! Il est possible de vérifier/retrouver numériquement l'ordre du schéma de Runge-Kutta 4. Pour cela on choisit un problème de Cauchy dont la solution exacte est connue et on calcule pour différentes valeurs de h (et donc différentes valeurs de N) le maximum de l'erreur commise entre la solution exacte et la solution numérique donnée par le schéma de Runge-Kutta 4 :

$$E(h) = \max_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} \left\| \mathbf{y}(t^n) - \mathbf{y}^{[n]} \right\|_{\infty}$$

On représente ensuite la fonction $h \mapsto E(h)$. La méthode de Runge-Kutta 4 étant d'ordre 4, on a alors théoriquement $E(h) = \mathcal{O}(h^4) \approx Ch^4$ quand h est suffisamment petit. On utilise alors une échelle logarithmique pour représenter la courbe. En effet, on a

$$\log E(h) \approx \log(Ch^4) = \log(C) + 4 \log(h)$$

En posant $X = \log(h)$ et $Y = \log E(h)$, coordonnées en échelle logarithmique, on a

$$Y \approx \log(C) + 4X$$

qui est l'équation d'une droite. La pente de cette droite est donc l'ordre de la méthode.

```

1:  $t^0 \leftarrow 0, T \leftarrow 4\pi,$ 
2:  $f : t, z \longrightarrow \cos(t) + 1, y_{ex} : t \longrightarrow \sin(t) + t$ 
3:  $y^0 \leftarrow y_{ex}(t^0)$ 
4:  $LN \leftarrow 100 : 50 : 1000$ 
5:  $nLN \leftarrow \text{length}(LN)$ 
6:  $H \leftarrow \mathbb{O}_{nLN},$   $\triangleright$  pour stocker les  $h$ 
7:  $E \leftarrow \mathbb{O}_{nLN},$   $\triangleright$  pour stocker les erreurs
8: Pour  $k \leftarrow 1$  à  $nLN$  faire
9:    $N \leftarrow LN(k)$ 
10:   $[t, y] \leftarrow \text{REDRK4Vec}(f, t^0, T, y^0, N)$ 
11:   $E(k) \leftarrow \max(\text{abs}(y - y_{ex}(t)))$ 
12:   $H(k) \leftarrow T/N$ 
13: Fin Pour
14: ...  $\triangleright$  Representation graphique

```

EXERCICE 3

La méthode de Adam-Bashforth d'ordre 4 explicite est donnée par

$$y^{[n+1]} = y^{[n]} + \frac{h}{24} \left(55f^{[n]} - 59f^{[n-1]} + 37f^{[n-2]} - 9f^{[n-3]} \right). \quad (3.1)$$

avec $f^{[n]} = f(t^n, y^{[n]})$.

Q. 1 Ecrire la fonction algorithmique *REDAB4Vec* permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par cette méthode. $\square$

R. 1 Soit $(t^{[n]})_{n=0}^N$ la discrétisation régulière de $[t^0, t^0 + T]$ avec $h = T/N$. On a donc $t^{[n]} = t^0 + nh$, $\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

On ne peut *utiliser* le schéma à pas multiples (3.1) que pour $n \geq 3$. On va alors utiliser un schéma à un pas d'ordre (au moins) 4 pour calculer les 4 premiers termes $y^{[0]}, y^{[1]}, y^{[2]}$ et $y^{[3]}$ nécessaire pour *démarrer* le schéma (3.1). On choisit par exemple la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour initialiser ces 4 termes. Deux possibilités :

- on réécrit le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 pour ces 4 premiers termes

```

1:  $Y(:, 1) \leftarrow y^0$ 
2: Pour  $n \leftarrow 1$  à 3 faire
3:    $k_1 \leftarrow f(t(n), Y(:, n))$ 
4:    $k_2 \leftarrow f(t(n) + h/2, Y(:, n) + (h/2)k_1)$ 
5:    $k_3 \leftarrow f(t(n) + h/2, Y(:, n) + (h/2)k_2)$ 
6:    $k_4 \leftarrow f(t(n) + h, Y(:, n) + hk_3)$ 
7:    $Y(:, n+1) \leftarrow Y(:, n) + (h/6) * (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ 
8: Fin Pour

```

- on utilise la fonction *REDRK4Vec* avec ses paramètres d'entrées judicieusement choisis :

```

1:  $[t_{ini}, Y_{ini}] \leftarrow \text{REDRK4Vec}(f, t^0, t^0 + 3 * h, y^0, 3)$ 
2: Pour  $n \leftarrow 1$  à 4 faire
3:    $Y(:, n) \leftarrow Y_{ini}(:, n)$ 
4: Fin Pour

```

En choisissant cette dernière solution, l'algorithme de la fonction `REDAB4Vec` s'écrit alors :

Algorithme 3: Fonction `REDAB4Vec` : résolution d'un problème de Cauchy par le schéma explicite d'Adams-Bashforth d'ordre 4

Données : $\mathbf{f}$: $\mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)

t^0 : réel, temps initial

T : réel > 0

$\mathbf{y}^0$: un vecteur de $\mathbb{R}^d$, donnée initiale

N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).

Résultat : $\mathbf{t}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$, $\mathbf{t}(n) = t^{n-1}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

$\mathbf{Y}$: matrice réelle de dimension $d \times (N+1)$, $\mathbf{Y}(:, n) = \mathbf{y}^{(n-1)}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

```

1: Fonction  $[\mathbf{t}, \mathbf{Y}] \leftarrow \text{REDAB4Vec}( \mathbf{f}, t^0, T, \mathbf{y}^0, N )$ 
2:    $\mathbf{t} \leftarrow \text{DisReg}(t^0, t^0 + T, N)$ 
3:    $h \leftarrow (b - a)/N$ 
4:    $[\mathbf{t}_{ini}, \mathbf{Y}_{ini}] \leftarrow \text{REDRK4Vec}(\mathbf{f}, t^0, t^0 + 3 * h, \mathbf{y}^0, 3)$ 
5:   Pour  $n \leftarrow 1$  à 4 faire
6:      $\mathbf{Y}(:, n) \leftarrow \mathbf{Y}_{ini}(:, n)$ 
7:   Fin Pour
8:    $\mathbf{k}_1 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(3), \mathbf{Y}(:, 3))$ 
9:    $\mathbf{k}_2 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(2), \mathbf{Y}(:, 2))$ 
10:   $\mathbf{k}_3 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(1), \mathbf{Y}(:, 1))$ 
11:  Pour  $n \leftarrow 4$  à  $N$  faire
12:     $\mathbf{k}_0 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n), \mathbf{Y}(:, n))$ 
13:     $\mathbf{Y}(:, n+1) \leftarrow \mathbf{Y}(:, n) + (h/24) * (55 * \mathbf{k}_0 - 59 * \mathbf{k}_1 + 37 * \mathbf{k}_2 - 9 * \mathbf{k}_3)$ 
14:     $\mathbf{k}_3 \leftarrow \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2 \leftarrow \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1 \leftarrow \mathbf{k}_0$ 
15:  Fin Pour
16: Fin Fonction
```

EXERCICE 4

On pose $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$. La **méthode de Adams-Bashforth d'ordre 4** explicite est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left(55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]} \right)$$

et la **méthode de Adams-Moulton d'ordre 4** implicite par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left(9\mathbf{f}^{[n+1]} + 19\mathbf{f}^{[n]} - 5\mathbf{f}^{[n-1]} + \mathbf{f}^{[n-2]} \right)$$

avec $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$.

Q. 1 Ecrire la fonction algorithmique `REDPC4Vec` permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par une méthode de prédiction-correction utilisant ces deux schémas. On minimisera le nombre d'appel à la fonction $\mathbf{f}$ dans la boucle principale. □

R. 1 On utilise le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 pour initialiser les 4 premières valeurs. Ensuite on utilise comme prédicteur le schéma explicite et comme correcteur le schéma implicite. Le principe est donc

- Calcul à l'aide du prédicteur :

$$\hat{\mathbf{y}}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left(55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]} \right)$$

- Calcul à l'aide du correcteur :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}^{[n+1]} &= \mathbf{f}(t^{n+1}, \hat{\mathbf{y}}^{[n+1]}) \\ \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left(9\hat{\mathbf{f}}^{[n+1]} + 19\mathbf{f}^{[n]} - 5\mathbf{f}^{[n-1]} + \mathbf{f}^{[n-2]} \right) \end{aligned}$$

L'algorithme de la fonction **REDPC4Vec** s'écrit alors :

Algorithme 4: Fonction **REDPC4Vec** : résolution d'un problème de Cauchy par prédiction-correction (Adams-Bashforth/Adams-Moulton) d'ordre 4

Données : $\mathbf{f}$: $\mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)

t^0 : réel, temps initial

T : réel > 0

$\mathbf{y}^0$: un vecteur de $\mathbb{R}^d$, donnée initiale

N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).

Résultat : $\mathbf{t}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$, $\mathbf{t}(n) = t^{n-1}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

$\mathbf{Y}$: matrice réelle de dimension $d \times (N+1)$, $\mathbf{Y}(:, n) = \mathbf{y}^{(n-1)}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

```

1: Fonction  $[\mathbf{t}, \mathbf{Y}] \leftarrow \text{REDPC4Vec}(f, t^0, T, \mathbf{y}^0, N)$ 
2:  $\mathbf{t} \leftarrow \text{DisReg}(t^0, t^0 + T, N)$ 
3:  $h \leftarrow (b - a)/N$ 
4:  $[\mathbf{t}_{ini}, \mathbf{Y}_{ini}] \leftarrow \text{REDRK4Vec}(f, t^0, t^0 + 3 * h, \mathbf{y}^0, 3)$ 
5: Pour  $n \leftarrow 1$  à 4 faire
6:    $\mathbf{Y}(:, n) \leftarrow \mathbf{Y}_{ini}(:, n)$ 
7: Fin Pour
8:  $\mathbf{k}_1 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(3), \mathbf{Y}(:, 3))$ 
9:  $\mathbf{k}_2 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(2), \mathbf{Y}(:, 2))$ 
10:  $\mathbf{k}_3 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(1), \mathbf{Y}(:, 1))$ 
11: Pour  $n \leftarrow 4$  à  $N$  faire
12:    $\mathbf{k}_0 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n), \mathbf{Y}(:, n))$ 
13:    $\hat{\mathbf{Y}} \leftarrow \mathbf{Y}(:, n) + (h/24) * (55 * \mathbf{k}_0 - 59 * \mathbf{k}_1 + 37 * \mathbf{k}_2 - 9 * \mathbf{k}_3)$ 
14:    $\hat{\mathbf{F}} \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n+1), \hat{\mathbf{Y}})$ 
15:    $\mathbf{Y}(:, n+1) \leftarrow \mathbf{Y}(:, n) + (h/24) * (9 * \hat{\mathbf{F}} + 19 * \mathbf{k}_0 - 5 * \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ 
16:    $\mathbf{k}_3 \leftarrow \mathbf{k}_2$ 
17:    $\mathbf{k}_2 \leftarrow \mathbf{k}_1$ 
18:    $\mathbf{k}_1 \leftarrow \mathbf{k}_0$ 
19: Fin Pour
20: Fin Fonction
```

EXERCICE 5 : Examen du 4 avril 2023, partie E.D.O.

Q. 1 a. Que signifie l'abréviation E.D.O. ?

b. Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy **vectorel**.

c. Quelles sont les données d'un problème de Cauchy **vectorel** ?

d. Que cherche-t'on?

□

R. 1 a. Equation Différentielle Ordinaire

b. Un problème de Cauchy vectoriel consiste à déterminer la fonction $\mathbf{y} : [t^0, t^0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ solution de

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T], \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

avec $\mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ donné.

c. les données d'un problème de Cauchy vectoriel sont

- $t^0 \in \mathbb{R}$,
- $T \in \mathbb{R}^{+*}$,
- $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$,
- $\mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

d. On cherche la fonction $\mathbf{y} : [t^0, t^0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Q. 2 Ecrire une fonction algorithmique **DisReg** permettant de d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ ($a < b$) en $n + 1$ points. □

R. 2 Une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ avec N pas (constant) de discrétisation est donnée par

$$t^n = a + nh, \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad \text{avec } h = \frac{b - a}{N}.$$

Algorithme 5: Fonction **DisReg** retournant une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$

Données : a, b : deux réels, $a < b$
 N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).

Résultat : $\mathbf{t}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$

```
1: Fonction  $\mathbf{t} \leftarrow \text{DisReg}(a, b, N)$ 
2:    $h \leftarrow (b - a) / N$ 
3:   Pour  $n \leftarrow 0$  à  $N$  faire
4:      $\mathbf{t}(n + 1) \leftarrow a + n * h$ 
5:   Fin Pour
6: Fin Fonction
```

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\Phi(t^n, \mathbf{y}^{[n]}, h). \quad (5.2)$$

La fonction Φ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\mathbf{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi(t, \mathbf{y}, h) = \sum_{i=1}^q c_i \mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h)$$

avec

$$\mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h) = \mathbf{f} \left(t + ha_i, y + h \sum_{j=1}^q b_{i,j} \mathbf{k}^{[j]}(t, \mathbf{y}, h) \right), \quad 1 \leq i \leq q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \mathbf{c}^t \end{array} \quad (5.3)$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$ et $\mathbf{c} = (c_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$.

On prend pour tableau de Butcher:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{13}{7} & \frac{20}{7} & 0 \\ \hline & -\frac{1}{3} & \frac{25}{24} & \frac{7}{24} \end{array} \quad (5.4)$$

Q. 3 Ecrire explicitement et en détail le schéma de Runge-Kutta associé au tableau de Butcher (5.4).

□

R. 3 On a, par identification, $q = 3$ ainsi que

$$\mathbf{a} = \left(0, \frac{1}{5}, 1 \right), \quad \mathbf{c} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{25}{24}, \frac{7}{24} \right) \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{13}{7} & \frac{20}{7} & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\Phi(t^n, \mathbf{y}^{[n]}, h)$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi(t, \mathbf{y}, h) &= \sum_{i=1}^q c_i \mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h) \\ &= c_1 \mathbf{k}^{[1]}(t, \mathbf{y}, h) + c_2 \mathbf{k}^{[2]}(t, \mathbf{y}, h) + c_3 \mathbf{k}^{[3]}(t, \mathbf{y}, h) \\ &= -\frac{1}{3} \mathbf{k}^{[1]}(t, \mathbf{y}, h) + \frac{25}{24} \mathbf{k}^{[2]}(t, \mathbf{y}, h) + \frac{7}{24} \mathbf{k}^{[3]}(t, \mathbf{y}, h) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{[1]}(t, \mathbf{y}, h) &= \mathbf{f} \left(t + ha_1, y + h \sum_{j=1}^q b_{1,j} \mathbf{k}^{[j]}(t, \mathbf{y}, h) \right) \\ &= \mathbf{f} \left(t, y + h(b_{1,1} \mathbf{k}^{[1]}(t, \mathbf{y}, h) + b_{1,2} \mathbf{k}^{[2]}(t, \mathbf{y}, h) + b_{1,3} \mathbf{k}^{[3]}(t, \mathbf{y}, h)) \right) \\ &= \mathbf{f}(t, y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{[2]}(t, \mathbf{y}, h) &= \mathbf{f} \left(t + ha_2, y + h \sum_{j=1}^q b_{2,j} \mathbf{k}^{[j]}(t, \mathbf{y}, h) \right) \\ &= \mathbf{f} \left(\frac{1}{5}h + t, y + h(b_{2,1} \mathbf{k}^{[1]}(t, \mathbf{y}, h) + b_{2,2} \mathbf{k}^{[2]}(t, \mathbf{y}, h) + b_{2,3} \mathbf{k}^{[3]}(t, \mathbf{y}, h)) \right) \\ &= \mathbf{f} \left(\frac{1}{5}h + t, y + \frac{1}{5}h \mathbf{k}^{[1]}(t, \mathbf{y}, h) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{[3]}(t, \mathbf{y}, h) &= \mathbf{f} \left(t + ha_3, y + h \sum_{j=1}^q b_{3,j} \mathbf{k}^{[j]}(t, \mathbf{y}, h) \right) \\ &= \mathbf{f} \left(h + t, y + h(b_{3,1} \mathbf{k}^{[1]}(t, \mathbf{y}, h) + b_{3,2} \mathbf{k}^{[2]}(t, \mathbf{y}, h) + b_{3,3} \mathbf{k}^{[3]}(t, \mathbf{y}, h)) \right) \\ &= \mathbf{f} \left(h + t, y + -\frac{13}{7}h \mathbf{k}^{[1]}(t, \mathbf{y}, h) + \frac{20}{7}h \mathbf{k}^{[2]}(t, \mathbf{y}, h) \right). \end{aligned}$$

En résumé, le schéma peut s'écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + -\frac{1}{24} h(8\mathbf{k}_1 - 25\mathbf{k}_2 - 7\mathbf{k}_3) \\ \text{avec} & \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}), \\ & \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t^n + \frac{1}{5}h, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{1}{5}h\mathbf{k}_1), \\ & \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h(-\frac{13}{7}\mathbf{k}_1 + \frac{20}{7}\mathbf{k}_2)), \\ \mathbf{y}^{[0]} & \text{donné.} \end{cases}$$

Un autre schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{1}{36} h(3\mathbf{k}_1 + 25\mathbf{k}_2 + 8\mathbf{k}_3) \\ \text{avec} & \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}), \\ & \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t^n + \frac{2}{5}h, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{2}{5}h\mathbf{k}_1), \\ & \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h(-\frac{7}{8}\mathbf{k}_1 + \frac{15}{8}\mathbf{k}_2)), \\ \mathbf{y}^{[0]} & \text{donné.} \end{cases} \quad (5.5)$$

Q. 4 [Algorithmique] Ecrire la fonction algorithmique [RedRK3](#) permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma (5.5). $\square$

R. 4 L'algorithme de la fonction [REDRK3Vec](#) s'écrit alors :

Algorithme 6: Fonction [REDRK3Vec](#) : résolution d'un problème de Cauchy par le schéma de RK3

Données : $\mathbf{f}$: $\mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)

t^0 : réel, temps initial

T : réel > 0

$\mathbf{y}^0$: un vecteur de $\mathbb{R}^m$, donnée initiale

N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).

Résultat : $\mathbf{t}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$, $\mathbf{t}(n) = t^{n-1}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

$\mathbb{Y}$: matrice réelle de dimension $m \times (N+1)$, $\mathbb{Y}(:, n) = \mathbf{y}^{(n-1)}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

```

1: Fonction  $[\mathbf{t}, \mathbb{Y}] \leftarrow \text{REDRK3Vec}( \mathbf{f}, t^0, T, \mathbf{y}^0, N )$ 
2:    $\mathbf{t} \leftarrow \text{DisREG}(t^0, t^0 + T, N)$ 
3:    $h \leftarrow (b - a)/N$ 
4:    $\mathbb{Y}(:, 1) \leftarrow \mathbf{y}^0$ 
5:   Pour  $n \leftarrow 1$  à  $N$  faire
6:      $\mathbf{k}_1 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n), \mathbb{Y}(:, n))$ 
7:      $\mathbf{k}_2 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n) + 2 * h/5, \mathbb{Y}(:, n) + (2 * h/5) * \mathbf{k}_1)$ 
8:      $\mathbf{k}_3 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n+1), \mathbb{Y}(:, n) + h * (-7/8 * \mathbf{k}_1 + 15/8 * \mathbf{k}_2))$   $\triangleright \mathbf{t}(n) + h = \mathbf{t}(n+1)$ 
9:      $\mathbb{Y}(:, n+1) \leftarrow \mathbb{Y}(:, n) + (h/36) * (3 * \mathbf{k}_1 + 25 * \mathbf{k}_2 + 8 * \mathbf{k}_3)$ 
10:  Fin Pour
11: Fin Fonction
```

Un schéma explicite, à **pas multiples**, et d'ordre 3 est donné par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h \left(\frac{23}{12} \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) - \frac{4}{3} \mathbf{f}(t^{n-1}, \mathbf{y}^{[n-1]}) + \frac{5}{12} \mathbf{f}(t^{n-2}, \mathbf{y}^{[n-2]}) \right) \quad (5.6)$$

Q. 5 Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma (5.6). Un soin particulier sera apporté à l'«initialisation». $\square$

R. 5 Dans ce schéma, $(t^n)_{n=0}^N$ est la discrétisation régulière de $[t^0, t^0 + T]$ avec N pas de discrétisation, $h = T/N$.

Le schéma (5.6) est à 3 pas, il est donc nécessaire de connaître $\mathbf{y}^{[0]}$, $\mathbf{y}^{[1]}$ et $\mathbf{y}^{[2]}$ pour ensuite utiliser (5.6) en prenant successivement $n = 2, 3, \dots, N - 1$ ce qui permet alors de déterminer successivement $\mathbf{y}^{[3]}, \mathbf{y}^{[4]}, \dots, \mathbf{y}^{[N]}$.

La donnée initiale $\mathbf{y}^{[0]}$ étant connue, il nous faut calculer $\mathbf{y}^{[1]}$ et $\mathbf{y}^{[2]}$. Pour cela on utilise un schéma à un pas, au moins du même ordre (3 ici). On peut donc utiliser la fonction **REDRK3Vec** pour calculer ces trois premiers termes en faisant attention à bien calculer ceux-ci aux temps t^0 , $t^1 = t^0 + h$, et $t^2 = t^0 + 2h$. On utilise donc la fonction **REDRK3Vec** de la manière suivante:

$$[\mathbf{t}_{ini}, \mathbb{Y}_{ini}] \leftarrow \text{REDRK3Vec}(f, t^0, t^0 + 2 * h, \mathbf{y}_0, 2).$$

On a alors $\mathbf{t}_{ini} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbb{Y}_{ini} \in \mathcal{M}_{m,3}(\mathbb{R})$ avec

$$\mathbf{t}_{ini}(1) = t^0, \mathbf{t}_{ini}(2) = t^0 + h \text{ et } \mathbf{t}_{ini}(3) = t^0 + 2 * h$$

et

$$\mathbb{Y}_{ini}(:, 1) \approx \mathbf{y}(t^0), \mathbb{Y}_{ini}(:, 2) \approx \mathbf{y}(t^0 + h) \text{ et } \mathbb{Y}_{ini}(:, 3) \approx \mathbf{y}(t^0 + 2h).$$

Q. 6 [Algorithmique] Ecrire la fonction algorithmique **RedPM3** permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma (5.6).

□

R. 6 Voici un algorithme possible:

Algorithme 7: Fonction **REDPM3Vec** : résolution d'un problème de Cauchy par le schéma explicite à pas multiples d'ordre 3

Données : $\mathbf{f}$: $\mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)

t^0 : réel, temps initial

T : réel > 0

$\mathbf{y}^0$: un vecteur de $\mathbb{R}^m$, donnée initiale

N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).

Résultat : $\mathbf{t}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$, $\mathbf{t}(n) = t^{n-1}$, $\forall n \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$

$\mathbb{Y}$: matrice réelle de dimension $m \times (N + 1)$, $\mathbb{Y}(:, n) = \mathbf{y}^{[n-1]}$, $\forall n \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$

```

1: Fonction  $[\mathbf{t}, \mathbb{Y}] \leftarrow \text{REDPM3Vec}(\mathbf{f}, t^0, T, \mathbf{y}^0, N)$ 
2:    $\mathbf{t} \leftarrow \text{DisReg}(t^0, t^0 + T, N)$ 
3:    $h \leftarrow T/N$ 
4:    $[\mathbf{t}_{ini}, \mathbb{Y}_{ini}] \leftarrow \text{REDRK3Vec}(\mathbf{f}, t^0, t^0 + 2 * h, \mathbf{y}^0, 2)$ 
5:   Pour  $n \leftarrow 1$  à 3 faire
6:      $\mathbb{Y}(:, n) \leftarrow \mathbb{Y}_{ini}(:, n)$ 
7:   Fin Pour
8:   Pour  $n \leftarrow 3$  à  $N$  faire
9:      $\mathbf{f}_0 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n), \mathbb{Y}(:, n))$ 
10:     $\mathbf{f}_1 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n - 1), \mathbb{Y}(:, n - 1))$ 
11:     $\mathbf{f}_2 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n - 2), \mathbb{Y}(:, n - 2))$ 
12:     $\mathbb{Y}(:, n + 1) \leftarrow \mathbb{Y}(:, n) + (h/12) * (23 * \mathbf{f}_0 - 16 * \mathbf{f}_1 + 5 * \mathbf{f}_2)$ 
13:   Fin Pour
14: Fin Fonction

```

Une autre version minimisant le nombre d'appels à la fonction $\mathbf{f}$ est donné par

Algorithme 8: Fonction **REDPM3VecV1** : résolution d'un problème de Cauchy par le schéma explicite à pas multiples d'ordre 3 en minimisant le nombre d'appels à la fonction **f**

Données : **f** : $\mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)
 t^0 : réel, temps initial
 T : réel > 0
 $\mathbf{y}^0$: un vecteur de $\mathbb{R}^m$, donnée initiale
 N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).
Résultat : **t** : vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$, $\mathbf{t}(n) = t^{n-1}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$
 $\mathbb{Y}$: matrice réelle de dimension $m \times (N+1)$, $\mathbb{Y}(:, n) = \mathbf{y}^{[n-1]}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

```

1: Fonction  $[\mathbf{t}, \mathbb{Y}] \leftarrow \text{REDPM3VecV1}(\mathbf{f}, t^0, T, \mathbf{y}^0, N)$ 
2:    $\mathbf{t} \leftarrow \text{DisREG}(t^0, t^0 + T, N)$ 
3:    $h \leftarrow T/N$ 
4:    $[\mathbf{t}_{ini}, \mathbb{Y}_{ini}] \leftarrow \text{REDRK3Vec}(\mathbf{f}, t^0, t^0 + 2 * h, \mathbf{y}^0, 2)$ 
5:   Pour  $n \leftarrow 1$  à 3 faire
6:      $\mathbb{Y}(:, n) \leftarrow \mathbb{Y}_{ini}(:, n)$ 
7:   Fin Pour
8:    $\mathbf{f}_1 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(2), \mathbb{Y}(:, 2))$ 
9:    $\mathbf{f}_2 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(1), \mathbb{Y}(:, 1))$ 
10:  Pour  $n \leftarrow 3$  à  $N$  faire
11:     $\mathbf{f}_0 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n), \mathbb{Y}(:, n))$ 
12:     $\mathbb{Y}(:, n+1) \leftarrow \mathbb{Y}(:, n) + (h/12) * (23 * \mathbf{f}_0 - 16 * \mathbf{f}_1 + 5 * \mathbf{f}_2)$ 
13:     $\mathbf{f}_2 \leftarrow \mathbf{f}_1$ 
14:     $\mathbf{f}_1 \leftarrow \mathbf{f}_0$ 
15:  Fin Pour
16: Fin Fonction

```

Application: Soit le système d'E.D.O. suivant

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) - \nu_1(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + x_2(t) &= \cos(t) \end{cases} \quad (5.7a)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_2(t) - \nu_2(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + x_1(t) &= \sin(t) \end{cases} \quad (5.7b)$$

On veut résoudre numériquement ce système d'E.D.O. avec pour données initiales $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = -1$, $\dot{x}_2(0) = 1/2$. Le temps final T sera égal à 10.

Q. 7 Ecrire le problème précédent sous la forme d'un problème de Cauchy. □

R. 7 C'est un système de deux E.D.O couplées: elles dépendent l'une de l'autre. Les deux E.D.O. ayant un terme en dérivée seconde, elles sont d'ordre 2. On va donc pouvoir *transformer* chacune des E.D.O. en deux E.D.O. d'ordre 1, pour aboutir à un système de 4 E.D.O. d'ordre 1.

On pose, par exemple,

$$\mathbf{y}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix}.$$

Il aurait aussi été possible de prendre

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x'_1(t) \\ x_2(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ ou } \dots$$

Avec notre choix, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}'(t) &= \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_1''(t) \\ x_2''(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y_3(t) \\ y_4(t) \\ \nu_1(x_2'(t) - x_1'(t)) - x_2(t) + \cos(t) \\ \nu_2(x_1'(t) - x_2'(t)) - x_1(t) + \sin(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y_3(t) \\ y_4(t) \\ \nu_1(y_4(t) - y_3(t)) - y_2(t) + \cos(t) \\ \nu_2(y_3(t) - y_4(t)) - y_1(t) + \sin(t) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)).
\end{aligned}$$

Le problème de Cauchy associé est donc

trouver la fonction $\mathbf{y} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^4$ vérifiant

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [0, T] \\
\mathbf{y}(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} : [0, T] \times \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\
(t, \mathbf{z}) &\mapsto \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \\ \nu_1(z_4 - z_3) - z_2 + \cos(t) \\ \nu_2(z_3 - z_4) - z_1 + \sin(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Q. 8 [Algorithmique] Ecrire un algorithme complet permettant de résoudre (5.7a)-(5.7b) avec les données initiales spécifiées. On prendra $\nu_1 = 1/4$ et $\nu_2 = 1/3$. Ce programme devra aussi représenter les approximations des fonctions x_1 et x_2 . On utilisera pour cela la fonction `Plot(X, Y)` qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y (fonction similaire à la fonction `plot` de Matlab). □

R. 8 Voici le programme algorithmique complet:

```

1:  $T \leftarrow 10$ 
2:  $\nu_1 \leftarrow 1/4, \nu_2 \leftarrow 1/3,$ 
    $\mathbf{f} : [0, T] \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ 
3:
    $(t, \mathbf{z}) \mapsto \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \\ \nu_1(z_4 - z_3) - z_2 + \cos(t) \\ \nu_2(z_3 - z_4) - z_1 + \sin(t) \end{pmatrix}$ 
4:  $[\mathbf{t}, \mathbb{Y}] \leftarrow \text{REDPM3Vec}(\mathbf{f}, 0, T, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, 1000)$ 
5: Plot(t, Y(1, :))
6: Plot(t, Y(2, :))

```

▷ Représentation de la fonction x_1

▷ Représentation de la fonction x_2