

Méthodes Numériques II

Chapitre 4: Equations aux Dérivées Partielles

Exercices - épisode 1 version du 2026/03/10 à 12:34:35

EXERCICE 1 : schéma étudié en cours

Q. 1 Ecrire la fonction `AssembleMat1D` retournant la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \beta & \alpha_1 & \beta & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \beta & \alpha_{d-2} & \beta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_{d-2}, \beta$ et γ sont des réels donnés. □

On souhaite résoudre par un schéma aux différences finies l'EDP suivante:

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \text{ in }]a, b[, \\ u(a) &= \alpha \in \mathbb{R}, \\ u(b) &= \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

où $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

On note $(x_i)_{i=0}^N$ la discrétisation régulière de $[a, b]$ avec N pas de discrétisation. Le schéma d'ordre 2 suivant

$$u_0 = \alpha, \quad (1.2)$$

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c(x_i)u_i = f(x_i) \quad \forall i \in]0, N[, \quad (1.3)$$

$$u_N = \beta. \quad (1.4)$$

vérifie

$$\max_{i \in]0, N]} |u(x_i) - u_i| = \mathcal{O}(h^2). \quad (1.5)$$

On note $\mathbf{V}$ le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $\mathbf{V}_i = u_{i-1}, \forall i \in]1, N + 1]$.

Q. 2 Montrer que (1.2)-(1.4) est équivalent à résoudre un système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (1.6)$$

ou l'on explicitera la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\mathbf{F}$ en précisant les dimensions. □

Q. 3 a. Ecrire une fonction algorithmique `solvePDE` permettant de résoudre l'EDP précédente par le schéma (1.2)-(1.4). On pourra utiliser la fonction $\mathbf{X} \leftarrow \text{Solve}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ retournant la solution du système linéaire $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

b. En choisissant jeu de données pertinent et non trivial avec solution exacte, écrire un programme algorithmique permettant d'obtenir la solution numérique donnée par le schéma (1.2)-(1.4) et de calculer $E = \max_{i \in [0, N]} |u(x_i) - u_i|$.

□

Q. 4 En choisissant judicieusement un jeu de données écrire un programme permettant de vérifier l'ordre du schéma utilisé à l'aide de la formule (??).

□

EXERCICE 2 : énoncé du cours

Soit φ une fonction suffisamment régulière et $h > 0$

Q. 1 Montrer que

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.7)$$

□

Q. 2 Montrer que

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.8)$$

□

Q. 3 Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre 2 de $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ en utilisant uniquement des valeurs de la fonction φ aux points $x + ih$ avec $i \in \mathbb{N}$.

□

Q. 4 Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre 2 de $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ en utilisant uniquement des valeurs de la fonction φ aux points $x - ih$ avec $i \in \mathbb{N}$.

□

EXERCICE 3 : énoncé du cours

Soit le problème suivant

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad \forall x \in]a; b[, \quad (3.9)$$

$$u'(a) = \alpha, \quad (3.10)$$

$$u(b) = \beta. \quad (3.11)$$

où c est une fonction positive.

- Q. 1** a. Quelles sont les données du problème (3.9)-(3.11)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)
- b. Quelles sont les inconnues du problème (3.9)-(3.11)? (préciser le type)
- c. Quelles sont les conditions initiales?
- d. Quelles sont les conditions aux limites?

□

- Q. 2** Construire une discrétisation régulière de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation en espace.

□

On note x_i , $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (3.9) à l'aide du schéma numérique

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + c_i u_i = f_i. \quad (3.12)$$

- Q. 3** a. Expliquer comment le schéma (3.12) a été obtenu à partir de (3.9) et préciser ce que représente les termes u_i , f_i , c_i et Δx ?
- b. Donner l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs que peut prendre i dans le schéma (3.9).
- c. Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.
- d. Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.

□

On note $\mathbf{V}$ le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $V_i = u_{i-1}$, $\forall i \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$.

- Q. 4** Montrer que le vecteur $\mathbf{V}$ est solution du système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (3.13)$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\mathbf{F}$ (préciser les dimensions).

□

- Q. 5** Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (3.9) à (3.11) basé sur (3.13). (Utiliser au maximum les fonctions). On pourra utiliser la fonction $\mathbf{X} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \mathbf{B})$ retournant la solution du système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

□

EXERCICE 4 : exercice 2, partiel 2, 2019/2020

Soit l'E.D.P. suivante

$$-u''(x) + cu'(x) = f(x), \quad \forall x \in]a; b[, \quad (4.14)$$

$$-u'(a) + 3u(a) = \alpha, \quad (4.15)$$

$$u(b) = \beta. \quad (4.16)$$

où c est un réel strictement positif.

- Q. 1** a. Que signifie l'abréviation E.D.P.?

- b. Quelles sont les données du problème (4.14)-(4.16)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)
- c. Quelles sont les inconnues du problème (4.14)-(4.16)? (préciser le type)
- d. Quelles sont les conditions initiales?
- e. Quelles sont les conditions aux limites?

□

- Q. 2** a. Expliciter la discrétisation régulière de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation en espace.
- b. Ecrire la fonction `DisReg` permettant de retourner cette discrétisation.

□

On note x_i , $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ cette discrétisation. On souhaite résoudre l'E.D.P. (4.14)-(4.16) à l'aide des schémas numériques

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = f_i, \quad (4.17)$$

$$(3 + 6h)u_0 - 4u_1 + u_2 = 2h\alpha. \quad (4.18)$$

- Q. 3** a. Expliquer en détail la façon d'obtenir le schéma (4.17) à partir de (4.14) et préciser ce que représentent les termes u_i , f_i , c et h ?
- b. Expliquer en détail comment le schéma (4.18) a été obtenu à partir de (4.15).
- c. Donner une discrétisation détaillée du problème (4.14) à (4.16) en utilisant les schémas (4.17) et (4.18).
- d. Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.

□

On note $\mathbf{V}$ le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $\mathbf{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$.

- Q. 4** Montrer que le vecteur $\mathbf{V}$ est solution du système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (4.19)$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\mathbf{F}$ (préciser les dimensions).

□

- Q. 5** Ecrire la fonction `Assemble` retournant la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ r & s & w & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & r & s & w \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \nu_3 & \nu_2 & \nu_1 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

où s , r , w , μ_1 , μ_2 , μ_3 , ν_1 , ν_2 et ν_3 sont des réels donnés.

□

- Q. 6** Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (4.14) à (4.16) basé sur (4.19). (Utiliser au maximum les fonctions). On pourra utiliser la fonction $\mathbf{X} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \mathbf{B})$ retournant la solution du système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

□