Méthodes Numériques II
Chapitre 4: Equations aux Dérivées Partielles
Exercices - épisode 2 version du 2026/03/19 à 10:46:07

Exercice 1 : exercice 2, partiel 2, 2017/2018

Soient α, β, D trois réels, $D > 0$, et f une fonction définie sur $[a; b]$ à valeurs réelles. On souhaite résoudre numériquement le problème suivant

$$-Du''(x) + u(x) = f(x),\ \forall x \in]a; b[, \tag{1.1}$$
$$u(a) = \alpha. \tag{1.2}$$
$$3u(b) + u'(b) = \beta, \tag{1.3}$$

Q. 1 a. *Quelles sont les données du problème* (1.1) *à* (1.3)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

b. *Quelles sont les inconnues du problème* (1.1) *à* (1.3)*? (préciser le type)*

c. *Quelles sont les conditions initiales?*

d. *Quelles sont les conditions aux limites?*

□

Q. 2 a. *Expliquer ce qu'est une discrétisation régulière de l'intervalle* $[a; b]$ *avec* N *pas de discrétisation en espace.*

b. *Ecrire la fonction (algorithmique ou Matlab)* DisReg *permettant d'obtenir cette discrétisation.*

□

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (1.1) à l'aide du schéma numérique

$$-D\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + u_i = f_i. \tag{1.4}$$

Q. 3 a. *Expliquer comment le schéma* (1.4) *a été obtenu à partir de* (1.1) *et préciser ce que représentent les termes* u_i, f_i *et* Δx*?*

b. *Donner l'ensemble* $\mathcal{E}$ *des valeurs que peut prendre* i *dans le schéma* (1.4).

c. *Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.*

d. *Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.*

□

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N + 1]\!]$.

Q. 4 *Montrer que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{1.5}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{F}$ (préciser les dimensions). □

Q. 5 *Ecrire la fonction (algorithmique ou Matlab)* AssembleMat *retournant une matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

où pour tout $j \in [\![1, 3]\!]$, α_j, β_j, μ_j sont des réels donnés. □

Q. 6 *On suppose les données du problème* (1.1) *à* (1.3) *fournies et la fonction RSL permettant la résolution du système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ déjà implémentée : $\boldsymbol{x} \leftarrow \mathrm{RSL}(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$. Ecrire un algorithme complet de résolution du problème* (1.1) *à* (1.3) *basé sur (1.5). (Utiliser au maximum les fonctions)* □

Exercice 2

Soit $\left\{ \begin{array}{cccc} u & : & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (t,x) & \longmapsto & u(t,x) \end{array} \right.$ une fonction suffisament régulière. Voici deux exemples de formules de Taylor à l'ordre 3

$$\begin{aligned} u(t, x+h) &= u(t,x) + h\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \mathcal{O}(h^3) \\ u(t+h, x) &= u(t,x) + h\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

Q. 1 *En écrivant des formules de Taylor à l'ordre 2, montrer que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= \frac{u(t,x+h) - u(t,x)}{h} + \mathcal{O}(h) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= \frac{u(t,x) - u(t,x-h)}{h} + \mathcal{O}(h) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{u(t+h,x) - u(t,x)}{h} + \mathcal{O}(h) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{u(t,x) - u(t-h,x)}{h} + \mathcal{O}(h) \end{aligned}$$

□

Q. 2 *En utilisant deux formules de Taylor à l'ordre 3, montrer que*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \quad = \quad \frac{u(t,x+h)-u(t,x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

□

Q. 3 *En utilisant des formules de Taylor à l'ordre 3, montrer que*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= \frac{-3u(t,x)+4u(t,x+h)-u(t,x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \\
\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= \frac{3u(t,x)-4u(t,x-h)+u(t,x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}$$

□

Q. 4 *En utilisant deux formules de Taylor à l'ordre 4, montrer que*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \frac{u(t,x+h)-2u(t,x)+u(t,x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2.7}$$

□

Exercice 3 : exercice 2, partiel 2, 2016/2017

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \beta\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= f(t,x),\ \forall (t,x) \in]0;T]\times]a;b[, && (3.8)\\
u(0,x) &= g_0(x),\ \forall x \in [a;b], && (3.9)\\
u(t,a) &= g_a(t),\ \forall t \in [0;T], && (3.10)\\
u(t,b) &= g_b(t),\ \forall t \in]0;T]. && (3.11)
\end{aligned}$$

avec α, β deux réels, $\alpha > 0$, $T > 0$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

Q. 1 *a. Que signifie l'abréviation E.D.P.?*

b. Quelles sont les données du problème (3.8) à (3.11)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)

c. Quelles sont les inconnues du problème (3.8) à (3.11)? (préciser le type)

d. Quelles sont les conditions initiales?

e. Quelles sont les conditions aux limites?

f. Ecrire la(les) condition(s) de compatibilité.

□

R. 1 a. Equations aux Dérivées Partielles

b. Les données sont

- $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.
- $T \in \mathbb{R}^{+*}$,
- α, β deux réels, $\alpha > 0$,
- $f : [0, T] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$,
- $g_0 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$,
- $g_a : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$,
- $g_b : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$.

c. $u : [0, T] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

d. (3.9).

e. (3.10) et (3.11).

f. $g_a(0) = g_0(a)$ et $g_b(0) = g_0(b)$.

On note t^n, $n \in [\![0, N_t]\!]$ et x_i, $i \in [\![0, N_x]\!]$ les discrétisations régulières des intervalles $[0; T]$ et $[a; b]$ avec N_t pas de discrétisation en temps et N_x pas de discrétisation en espace.

Q. 2 *Donner explicitement les formules permettant de calculer l'ensemble des* t^n *et des* x_i. □

R. 2

$$\begin{aligned} t^n &= n\Delta t, & \forall n \in [\![0, N_t]\!] && \text{avec } \Delta t = T/N_t, \\ x_i &= a + i\Delta x, & \forall i \in [\![0, N_x]\!] && \text{avec } \Delta x = (b-a)/N_x. \end{aligned}$$

On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide du schéma numérique

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \beta \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = f_i^n. \tag{3.12}$$

Q. 3 a. *Expliquer comment le schéma* (3.12) *a été obtenu à partir de* (3.8) *et préciser ce que représentent les valeurs* u_i^n, f_i^n, Δt *et* Δx.

b. *Donner une discrétisation (détaillée) du problème* (3.8) *à* (3.11) *en utilisant le schéma* (3.12).

c. *Le schéma est-il explicite ou implicite?*

d. *Le schéma est de quel ordre en temps? en espace?*

e. *Expliquer comment améliorer l'ordre en espace du schéma* (3.12).

□

R. 3 a. L'équation (3.8) entraine

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^n,x_i)-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n,x_i)+\beta\frac{\partial u}{\partial x}(t^n,x_i)=f(t^n,x_i),\ \forall(n,i)\in]\!]0,N_t]\!]\times]\!]0,N_x[\![. \quad (3.13)$$

- étude de $\frac{\partial u}{\partial t}(t^n,x_i)$ pour aboutir à $\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}$.
  En utilisant le développement de Taylor suivant t (à x fixé), on a

  $$u(t+h,x)=u(t,x)+h\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+\mathcal{O}(h^2)$$

  ce qui entraine

  $$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\frac{u(t+h,x)-u(t,x)}{h}+\mathcal{O}(h).$$

  On peut alors utiliser cette equation en $(t,x)=(t^n,x_i)$ et $h=\Delta_t$, pour obtenir

  $$\frac{\partial u}{\partial t}(t^n,x_i)=\frac{u(t^{n+1},x_i)-u(t^n,x_i)}{\Delta_t}+\mathcal{O}(\Delta_t). \quad (3.14)$$

- étude de $\frac{\partial u}{\partial x}(t^n,x_i)$ pour aboutir à $\frac{u_{i+1}^{n}-u_i^n}{\Delta x}$.
  En utilisant le développement de Taylor suivant x (à t fixé), on a

  $$u(t,x+h)=u(t,x)+h\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)+\mathcal{O}(h^2)$$

  ce qui entraine

  $$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)=\frac{u(t,x+h)-u(t,x)}{h}+\mathcal{O}(h).$$

  On peut alors utiliser cette equation en $(t,x)=(t^n,x_i)$ et $h=\Delta_x$, pour obtenir

  $$\frac{\partial u}{\partial x}(t^n,x_i)=\frac{u(t^{n},x_{i+1})-u(t^n,x_i)}{\Delta_x}+\mathcal{O}(\Delta_x). \quad (3.15)$$

- étude de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n,x_i)$ pour aboutir à $\frac{u_{i+1}^{n}-2u_i^n+u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$.
  On va utiliser, classiquement, deux formules de Taylor à l'ordre 3 suivant x (t fixé), l'une en $x+h$ et l'autre en $x-h$. On a alors

  $$u(t,x+h)=u(t,x)+h\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)+\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,x)+\mathcal{O}(h^4), \quad (3.16)$$

  $$u(t,x-h)=u(t,x)-h\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)-\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,x)+\mathcal{O}(h^4). \quad (3.17)$$

  En effectuant la somme entre (3.16) et (3.17), on obtient

  $$u(t,x+h)+u(t,x-h)=2u(t,x)+h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)+\mathcal{O}(h^4)$$

et on en déduit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \frac{u(t,x+h) - 2u(t,x) + u(t,x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

On peut alors utiliser cette equation en $(t,x) = (t^n, x_i)$ et $h = \Delta_x$, pour obtenir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n,x_i) = \frac{u(t^n,x_{i+1}) - 2u(t^n,x_i) + u(t^n,x_{i-1})}{\Delta_x^2} + \mathcal{O}(\Delta_x^2). \tag{3.18}$$

En utilisant (3.14), (3.15) et (3.18), l'équation (3.13) s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{u(t^{n+1},x_i) - u(t^n,x_i)}{\Delta_t} + \mathcal{O}(\Delta_t) - \alpha\left(\frac{u(t^n,x_{i+1}) - 2u(t^n,x_i) + u(t^n,x_{i-1})}{\Delta_x^2} + \mathcal{O}(\Delta_x^2)\right)& \\ + \beta\left(\frac{u(t^n,x_{i+1}) - u(t^n,x_i)}{\Delta_x} + \mathcal{O}(\Delta_x)\right)& \\ = f(t^n,x_i)&\end{aligned}$$

En négligeant les termes $\mathcal{O}(\Delta_t)$, $\mathcal{O}(\Delta_x)$ et $\mathcal{O}(\Delta_x^2)$, et en notant $u_i^n \approx u(t^n,x_i)$, on obtient l'équation approchée (3.12) avec $f_i^n = f(t^n,x_i)$.

b. Le schéma détaillé est:

$$\begin{cases} (3.12) & \forall n \in [\![0, N_t - 1]\!],\ \forall i \in [\![1, N_x - 1]\!], \\ u_i^0 = g_0(x_i) & \forall i \in [\![0, N_x]\!], \\ u_0^n = g_a(t^n) & \forall n \in [\![0, N_t]\!], \\ u_{N_x}^n = g_b(t^n) & \forall n \in [\![0, N_t]\!]. \end{cases}$$

c. Le schéma est explicite (car on peut exprimer explicitement u_i^{n+1} en fonction de l'ensemble des $(u_j^n)_{j=0}^{N_x}$)

d. Le schéma est d'ordre 1 en temps et d'ordre 1 en espace (car les termes prépondérants, dans les termes négligés $\mathcal{O}(\Delta_t)$, $\mathcal{O}(\Delta_x)$ et $\mathcal{O}(\Delta_x^2)$ précédemment, sont $\mathcal{O}(\Delta_t)$ et $\mathcal{O}(\Delta_x)$)

e. Il faudrait établir une formule d'ordre 2 de $\frac{\partial u}{\partial x}(t^n,x_i)$, en utilisant deux formules de Taylor, l'une en $x_i + \Delta_x$ et l'autre en $x_i - \Delta_x$. On aurait alors

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t^n,x_i) = \frac{u(t^n,x_{i+1}) - u(t^n,x_{i-1})}{2\Delta_x} + \mathcal{O}(\Delta_x^2).$$

On note $\boldsymbol{U}^n$ les vecteurs de dimension N_x+1, de composantes $\boldsymbol{U}_i^n = u_{i-1}^n$, $\forall i \in [\![1, N_x+1]\!]$.

Q. 4 *a. Comment initialiser le vecteur $\boldsymbol{U}^0$?*

b. En supposant le vecteur $\boldsymbol{U}^n$ déjà calculé, décrire le calcul du vecteur $\boldsymbol{U}^{n+1}$.

□

R. 4 a. Le vecteur $\boldsymbol{U}^0$ va être initialisé à l'aide de la condition initiale (3.9):

$$\boldsymbol{U}_i^0 = g_0(x_{i-1}),\ \forall i \in [\![1, N_x+1]\!].$$

b. L'équation (3.12) peut se réécrire sous la forme

$$u_i^{n+1} = Au_{i+1}^n + Bu_i^n + Cu_{i-1}^n + \Delta_t f_i^n$$

avec

$$A = -1 - \beta\frac{\Delta_t}{\Delta_x} + \alpha\frac{\Delta_t}{\Delta_x^2},\ B = 1 + \beta\frac{\Delta_t}{\Delta_x} - \alpha\frac{\Delta_t}{\Delta_x^2},\ C = \alpha\frac{\Delta_t}{\Delta_x^2}.$$

Comme on ne peut utiliser cette équation que pour $i \in]\!]0, N_x[\![$, on utilise les condi- titions aux limites (3.10) et (3.11) pour obtenir

$$u_0^{n+1} = g_a(t^{n+1}) \ \text{ et } \ u_{N_x}^{n+1} = g_b(t^{n+1}).$$

Et donc, connaissant $\boldsymbol{U}^n$, on peut déterminer $\boldsymbol{U}^{n+1}$.

Q. 5 *On suppose les données du problème* (3.8) *à* (3.11) *fournies. Ecrire un algorithme complet de résolution du problème* (3.8) *à* (3.11) *en utilisant le schéma* (3.12). □

R. 5 En supposant les données du problème (3.8) à (3.11) fournies, on va stocker l'ensemble des vecteurs $\boldsymbol{U}^n \in \mathbb{R}^{N_x+1}$, $n \in [\![0, N_t]\!]$, dans une matrice $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_{N_x+1,N_t+1}(\mathbb{R})$, le stockage des $\boldsymbol{U}^n$ se faisant colonne par colonne:

$$\mathbb{U}(:, n+1) = \boldsymbol{U}^n, \quad \forall n \in [\![0, N_t]\!].$$

$Nx \leftarrow 50,\ Nt \leftarrow 1000.$ ▷ Nb de pas des discrétisations
$\boldsymbol{x} \leftarrow \text{DisReg}(a, b, Nx)$ ▷ a et b supposés donnés
$\Delta_x \leftarrow (b-a)/N_x$
$\boldsymbol{t} \leftarrow \text{DisReg}(0, T, Nt)$ ▷ T supposé donné
$\Delta_t \leftarrow T/N_t$
$A \leftarrow -1 - \beta * \Delta_t/\Delta_x + \alpha * \Delta_t/\Delta_x^2$
$B \leftarrow 1 + \beta * \Delta_t/\Delta_x - \alpha * \Delta_t/\Delta_x^2$
$C \leftarrow \alpha * \Delta_t/\Delta_x^2$
$\mathbb{U}(:, 1) \leftarrow g_0(\boldsymbol{x})$ ▷ g_0 supposé donné, et vectorisée
Pour $n \leftarrow 1$ **à** N_t **faire** ▷ Calcul de $\mathbb{U}(:, n+1)$
  $\mathbb{U}(1, n+1) \leftarrow g_a(\boldsymbol{t}(n+1))$ ▷ g_a supposé donné
  Pour $i \leftarrow 2$ **à** N_x **faire** ▷ f supposé donné
    $\mathbb{U}(i, n+1) \leftarrow A * \mathbb{U}(i+1, n) + B * \mathbb{U}(i, n) + C * \mathbb{U}(i-1, n) + \Delta_t * f(\boldsymbol{t}(n), \boldsymbol{x}(i))$
  Fin Pour
  $\mathbb{U}(N_x+1, n+1) \leftarrow g_b(\boldsymbol{t}(n+1))$ ▷ g_b supposé donné
Fin Pour

La fonction DisReg étant donnée par:

Algorithme 1 Fonction DisReg : discrétisation régulière de $[a, b]$ avec $(N + 1)$ points, retourne l'ensemble des points $(x_i)_{i=0}^{N}$ tels que $x_i = a + ih$ avec $h = (b - a)/N$.

Données : a, b : deux réels, (a<b)
N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).
Résultat : $\mathbf{X}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$, $\mathbf{X}(i) = x_{i-1},\ \forall i \in [\![1, N+1]\!]$

Fonction $\mathbf{X} \leftarrow$ DisReg(a, b, N)
    $h \leftarrow (b - a)/N$
    Pour $i \leftarrow 1$ **à** $N + 1$ **faire**
        $\mathbf{X}(i) \leftarrow a + (i - 1) * h$
    Fin Pour
Fin Fonction