Tache 3 : algorithme vu en TD11 Q1

Cas de base : Si $|A| = 1$, retourner l'unique personne dans A.

Étape récursive :

- Coupez A en deux listes de taille égale A_1 et A_2.
- Calculez récursivement une personne honnête p_1 dans A_1.
- Calculez récursivement une personne honnête p_2 dans A_2.
- Avec une boucle, vérifiez si p_1 ou p_2 est honnête dans A (en posant $n-1$ questions pour chacun), et retournez la première personne honnête trouvée.

TP9 -> def computeHonestPerson_MEDIUM_RECURSIVE

Tache 4 : algorithme vu en TD11 Q2

(a) Ajoutez la personne `A[0]` à une nouvelle liste `B`.

(b) Pour chaque personne suivante `A[i]` avec $i = 1$ à $n-1$:

- Si `B` est vide, ajoutez `A[i]` à `B` et passez à l'itération suivante.
- Sinon, interrogez `A[i]` à propos de `B[-1]` (la dernière personne de `B`).
- Si `A[i]` répond que `B[-1]` est honnête, ajoutez `A[i]` à la fin de `B`.
- Si `A[i]` répond que `B[-1]` est malhonnête, retirez `B[-1]` de `B` (et n'ajoutez pas `A[i]`).

(c) Après avoir traité `A[n-1]`, retournez `B[0]` (le premier élément de `B`).

TP9 -> def computeHonestPerson_FAST_CHAIN

Tache 5 : algorithme vu en TD11 Q3

Solution (French). Si n est impair, on retire une personne quelconque p de A et on la met de côté, de sorte que notre entrée peut être considérée comme

$$\mathsf{A} \quad + \quad \underbrace{\{p\}}_{\text{existe seulement si } n \text{ est impair}}$$

Comme le nombre de personnes honnêtes dans l'entrée est supérieur au nombre de personnes malhonnêtes, nous avons trois cas :

- si n est pair, alors il n'y a pas de personne p, et le nombre de personnes honnêtes dans A est strictement supérieur au nombre de personnes malhonnêtes dans A.
- Si n est impair et p est honnête, alors le nombre de personnes honnêtes dans A est au moins égal au nombre de personnes malhonnêtes dans A.
- Si n est impair et p est malhonnête, alors le nombre de personnes honnêtes dans A est au moins 2 de plus que le nombre de personnes malhonnêtes dans A.

Considérons la procédure suivante sur A :

> Pairer les personnes dans A en exactement $n/2$ groupes de deux personnes chacun.
>
> Pour chaque groupe, demander à la première personne son avis sur la seconde.
>
> Si la réponse est « Malhonnête », alors éliminer *les deux* personnes de ce groupe.
>
> **Soit B l'ensemble des personnes restantes**

Nous avons ce qui suit.

Assertion 1 : Si une personne p_1 dit qu'une personne p_2 est malhonnête, alors au moins l'une de p_1 ou p_2 *doit* être malhonnête.

Cela signifie que si A a strictement plus de personnes honnêtes que de malhonnêtes, il en va de même pour B. De même, si A a au moins autant de personnes honnêtes que de malhonnêtes, il en va de même pour B.

B est divisé en groupes où, dans chaque groupe, la première personne a déclaré que la seconde était honnête. Les groupes dans B peuvent être de trois types :

(a) les groupes où les deux personnes sont honnêtes,
(b) les groupes où les deux personnes sont malhonnêtes, et
(c) les groupes où la première personne est malhonnête et la seconde est honnête.

Nous avons ce qui suit.

Assertion 2 : Si B a strictement plus de personnes honnêtes que de malhonnêtes, alors le nombre de groupes où les deux personnes sont honnêtes est strictement supérieur au nombre de groupes où les deux personnes sont malhonnêtes.

Assertion 3 : Si B a au moins autant de personnes honnêtes que de malhonnêtes, alors le nombre de groupes où les deux personnes sont honnêtes est au moins égal au nombre de groupes où les deux personnes sont malhonnêtes.

> Maintenant, pour chaque groupe dans B, éliminer la première personne (celle qui a posé la question), et ne garder que la seconde.
>
> **Soit C l'ensemble des personnes restantes.**

En utilisant les Assertions 2 et 3, nous obtenons la propriété suivante.

Assertion 4 : S'il y avait au moins autant de personnes honnêtes que de malhonnêtes dans B, alors dans C, il y a au moins autant de personnes honnêtes que de malhonnêtes.

S'il y avait au moins 1 personne honnête de plus que de malhonnêtes dans B, alors dans C, il y a au moins 1 personne honnête de plus que de malhonnêtes.

S'il y avait au moins 3 personnes honnêtes de plus que de malhonnêtes dans B, alors dans C, il y a au moins 2 personnes honnêtes de plus que de malhonnêtes.

Si n est pair, alors par l'Assertion 4, l'ensemble C a plus de personnes honnêtes que de malhonnêtes. On peut donc trouver récursivement une personne honnête dans C, où len(C) $\leq$ len(A)$/2$.

Il reste à considérer le cas où n est impair, et donc la personne p existe.

Cas : il y a au moins 2 personnes honnêtes de plus que de malhonnêtes dans $A + \{p\}$. Alors si p était honnête, B a au moins 1 personne honnête de plus que de malhonnêtes, et donc par l'Assertion 4, C contient plus de personnes honnêtes que de malhonnêtes. Que l'on récurse sur C ou sur $C + \{p\}$, dans les deux cas on récurse avec plus de personnes honnêtes. De même, si p était malhonnête, alors B a au moins 3 personnes honnêtes de plus que de malhonnêtes, et donc par l'Assertion 4, C contient au moins 2 personnes honnêtes de plus que de malhonnêtes. Que l'on récurse sur C ou sur $C + \{p\}$, dans les deux cas on récurse avec plus de personnes honnêtes.

Cas : il y a exactement 1 personne honnête de plus que de malhonnêtes dans $A + \{p\}$, et p est honnête. Si C a strictement plus de personnes honnêtes, alors l'argument précédent s'applique et on peut récurser sur C ou sur $C + \{p\}$. Le mauvais cas est celui où C a un nombre égal de personnes honnêtes et de malhonnêtes. Mais cela ne peut se produire que si dans B, chaque groupe était composé soit de deux personnes honnêtes, soit de deux personnes malhonnêtes, et qu'il y avait un nombre égal, disons t, de tels groupes. Dans ce cas, $|B| = 4t$.

> Si nous constatons que B est divisible par 4, nous récursons sur $C + \{p\}$.

Cas : il y a exactement 1 personne honnête de plus que de malhonnêtes dans $A + \{p\}$, et p est malhonnête. Si B a au moins 3 personnes honnêtes de plus que de malhonnêtes, alors C a au moins 2 personnes honnêtes de plus que de malhonnêtes, et nous pouvons récurser sur C ou sur $C + \{p\}$.
Le mauvais cas est celui où B a exactement 2 personnes honnêtes de plus que de malhonnêtes, et C n'a que 1 personne honnête de plus que de malhonnêtes. Mais cela ne peut se produire que si dans B, chaque groupe était composé de personnes honnêtes ou malhonnêtes, et qu'il y avait t groupes de deux personnes malhonnêtes, et $t + 1$ groupes de deux personnes honnêtes. Dans ce cas, $|B| = 4t + 2$.

> Si nous constatons que B n'est pas divisible par 4, nous récursons sur C.

Pour le nombre total de questions, observons qu'à chaque question posée, nous éliminons au moins une personne (soit la première seulement quand la réponse est "honnête", soit les deux quand la réponse est "malhonnête"). Comme nous commençons avec n personnes et terminons avec 1 personne (le résultat), nous posons au plus $n - 1$ questions.