Exo Factorisation QR

Sous les hypothèses et notations de la proposition :

Proposition B.19: Procédé de Gram-Schmidt

Soit $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i\in[1,n]}$ une base de $\mathbb{K}^n$. On construit successivement les vecteurs $\boldsymbol{u}_i$

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}_k}(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_i\rangle}{\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_k\rangle}\boldsymbol{u}_k, \ \forall i \in [\![1,n]\!].$$

Ils forment une **base orthogonale** de $\mathbb{K}^n$ et $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_i) = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_i)$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$ (voir Exercice B.3.5 page 197).
Pour construire une **base orthonormale** $\{\boldsymbol{z}_i\}_{i\in[1,n]}$, il suffit de normaliser les vecteurs de la base orthogonale:

$$\boldsymbol{z}_i = \frac{\boldsymbol{u}_i}{\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i\rangle^{1/2}}, \quad \forall i \in [\![1,n]\!].$$

Q1 Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, montrer que $\langle \vec{z}_j, \vec{v}_i\rangle = 0$ si $j > i$

On note $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\mathbb{Q} = \left(\vec{z}_1 \,\vdots\, \vec{z}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \vec{z}_n\right)$

Q2 Calculer $\mathbb{Q}^*\mathbb{Q}$. Que peut-on en conclure ?

On note $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\mathbb{A} = \left(\vec{v}_1 \,\vdots\, \vec{v}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \vec{v}_n\right)$

Q3 a. Montrer que $\mathbb{A}$ est régulière

b. Déterminer $\mathbb{R} = \mathbb{Q}^*\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs colonnes de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{A}$

c. Que peut-on en conclure ?