Exercice 0.0.1

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible décomposée en $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ où $\mathbb{M}$ est inversible. On note $\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$.

Q. 1 *Montrer que la matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne.*

On suppose maintenant que $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est définie positive.

Q. 2 *Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$ et $\boldsymbol{y} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}$.*

1. *Montrer que*

$$\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \mathbb{A}\boldsymbol{y}\rangle = \left\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle + \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle - \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle \tag{1}$$

et

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}. \tag{2}$$

2. *En déduire que*

$$\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \mathbb{A}\boldsymbol{y}\rangle = \langle (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\rangle. \tag{3}$$

Q. 3 *Montrer que si $\mathbb{A}$ est définie positive alors $\rho(\mathbb{B}) < 1$.*

Q. 4 *Démontrer par l'absurde que si $\rho(\mathbb{B}) < 1$ alors $\mathbb{A}$ est définie positive.*

Q. 1 On a

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{M}^* + \mathbb{N}\right)^* &= \mathbb{M} + \mathbb{N}^* \\
&= \mathbb{A} + \mathbb{N} + \mathbb{N}^* = \mathbb{A}^* + \mathbb{N} + \mathbb{N}^* \quad \text{car } \mathbb{A} \text{ est hermitienne} \\
&= \mathbb{M}^* + \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

La matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est donc hermitienne.

Q. 2 1. On a $\boldsymbol{y} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}$ avec $\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$ ce qui donne

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \mathbb{B}\boldsymbol{x} = \left(\mathbb{I} - \mathbb{B}\right)\boldsymbol{x} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}.$$

L'équation (2) est donc démontrée. Pour prouver (1), on note que

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{y}, \mathbb{A}\boldsymbol{y}\rangle &= \left\langle \boldsymbol{x} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\left(\boldsymbol{x} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right)\right\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle - \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle - \left\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle + \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle.
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement (1).

2. En utilisant (2), on obtient

$$\begin{aligned}
\left\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \left(\mathbb{M}^* + \mathbb{N}\right)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\right\rangle &= \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \left(\mathbb{M}^* + \mathbb{N}\right)\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle \\
&= \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \left(\mathbb{M} + \mathbb{N}^*\right)\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle \quad \text{car } \mathbb{M}^* + \mathbb{N} \text{ hermitienne} \\
&= \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \left(\mathbb{M} + \mathbb{M}^* - \mathbb{A}^*\right)\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle \quad \text{car } \mathbb{N} = \mathbb{M} - \mathbb{A} \\
&= \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle + \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle - \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle \quad \text{car } \mathbb{A} \text{ hermitienne}
\end{aligned}$$

Or, par propriété du produit scalaire, on a

$$\left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle = \left\langle \mathbb{M}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle = \left\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle = \left\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle.$$

Comme $\mathbb{A}$ est hermitienne, on obtient

$$\left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle = \left\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle.$$

On abouti alors à

$$\left\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \left(\mathbb{M}^{*}+\mathbb{N}\right)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right\rangle = \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle + \left\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle - \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle.$$

L'équation (3) est obtenue en utilisant (1).

Q. 3 On veut démontrer que sous les hypothèses $\mathbb{A}$ hermitienne définie positive et $\mathbb{M}^{*}+\mathbb{N}$ (hermitienne) définie positive on a $\rho(\mathbb{B})<1$, c'est à dire que pour tout élément propre $(\lambda, \boldsymbol{u})$ de $\mathbb{B}$ alors $|\lambda|<1$.

Soit $(\lambda, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^{n}\backslash\{0\}$ un élément propre de $\mathbb{B}$. On a $\mathbb{B}\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$. En prenant $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}$ dans **Q**.2, on a $\boldsymbol{y}=\mathbb{B}\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$ et donc $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=(1-\lambda)\boldsymbol{u}$. De (3) on obtient

$$\langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}\boldsymbol{u}\rangle - \langle \lambda\boldsymbol{u}, \lambda\mathbb{A}\boldsymbol{u}\rangle = \langle (1-\lambda)\boldsymbol{u}, (\mathbb{M}^{*}+\mathbb{N})((1-\lambda)\boldsymbol{u})\rangle$$

c'est à dire

$$(1-|\lambda|^{2})\langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}\boldsymbol{u}\rangle = |1-\lambda|^{2}\langle \boldsymbol{u}, (\mathbb{M}^{*}+\mathbb{N})\boldsymbol{u}\rangle. \tag{4}$$

Comme par hypothèse, la matrice $\mathbb{M}^{*}+\mathbb{N}$ (hermitienne) est définie positive et $\boldsymbol{u}\neq 0$, on obtient

$$\langle \boldsymbol{u}, (\mathbb{M}^{*}+\mathbb{N})\boldsymbol{u}\rangle > 0$$

et donc on déduit de (4) que

$$(1-|\lambda|^{2})\langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}\boldsymbol{u}\rangle \geqslant 0.$$

Comme $\mathbb{A}$ hermitienne définie positive et $\boldsymbol{u}\neq 0$, on déduit de (4) que $1-|\lambda|^{2}\geqslant 0$ et donc $|\lambda|\leqslant 1$.

On va démontrer par l'absurde que $|\lambda|\neq 1$. On suppose $|\lambda|=1$, de (4) on déduit

$$|1-\lambda|^{2}\langle \boldsymbol{u}, (\mathbb{M}^{*}+\mathbb{N})\boldsymbol{u}\rangle = 0.$$

Comme par hypothèse, la matrice $\mathbb{M}^{*}+\mathbb{N}$ (hermitienne) est définie positive et $\boldsymbol{u}\neq 0$, on obtient $|1-\lambda|^{2}=0$, c'est à dire $\lambda=1$. Or dans ce cas on a

$$\boldsymbol{y}=\mathbb{B}\boldsymbol{x}=\mathbb{B}\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}.$$

L'équation (2) donne alors

$$0=\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{u}.$$

Comme $\boldsymbol{u}\neq 0$, et que $\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$ est inversible, l'équation ci-dessus est impossible, donc $|\lambda|\neq 1$.

Q. 4 On veut démontrer par l'absurde que, sous les hypothèses $\mathbb{M}^{*}+\mathbb{N}$ (hermitienne) définie positive, $\mathbb{A}$ hermitienne inversible et $\rho(\mathbb{B})<1$, on a $\mathbb{A}$ définie positive.

On suppose que $\mathbb{A}$ n'est pas définie positive. Alors il existe $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^{n}\backslash\{0\}$ tel que $\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle \notin \mathbb{R}^{+*}$.

Pour une matrice quelconque que $\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle\in\mathbb{C}$, or comme $\mathbb{A}$ est hermitienne on a $\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle\in\mathbb{R}$. En effet, par propriété du produit scalaire on a

$$\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{A}^{*}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \overline{\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle}.$$

On note $\boldsymbol{x}^{[0]}=\boldsymbol{x}$ et $\alpha_0=\left\langle \boldsymbol{x}^{[0]}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}^{[0]}\right\rangle$ le nombre réel négatif ou nul ($\alpha_0\leqslant 0$). On défini alors pour les suites

$$\boldsymbol{x}^{[k]}=\mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k-1]} \quad\text{et}\quad \alpha_k=\left\langle \boldsymbol{x}^{[k]}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}^{[k]}\right\rangle.$$

On a alors

$$\boldsymbol{x}^{[k]}=\mathbb{B}^{k}\boldsymbol{x}^{[0]},\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

D'après le théorème du cours (Théorème B.72 page 195),

$$\rho(\mathbb{B})<1 \iff \lim_{k\to+\infty}\mathbb{B}^{k}\boldsymbol{v},\ \forall\boldsymbol{v}.$$

On a donc

$$\lim_{k\to+\infty}\boldsymbol{x}^{[k]}=0 \quad\text{et}\quad \lim_{k\to+\infty}\alpha_k=0$$

On utilise maintenant l'égalité (3) avec $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{[k-1]}$ et $\boldsymbol{y}=\mathbb{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{[k]}$

$$\left\langle \boldsymbol{x}^{[k-1]}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}^{[k-1]}\right\rangle - \left\langle \boldsymbol{x}^{[k]}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}^{[k]}\right\rangle = \left\langle (\boldsymbol{x}^{[k-1]}-\boldsymbol{x}^{[k]}), (\mathbb{M}^{*}+\mathbb{N})(\boldsymbol{x}^{[k-1]}-\boldsymbol{x}^{[k]})\right\rangle$$

On peut noter que $\boldsymbol{x}^{[k-1]} - \boldsymbol{x}^{[k]} \neq 0$, car sinon $\boldsymbol{x}^{[k-1]} = \boldsymbol{x}^{[k]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k-1]}$ et $\lambda = 1$ serait valeur propre de $\mathbb{B}$. il faudrait montrer que $\boldsymbol{x}^{[k-1]} \neq 0$

Dans ce cas, comme $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est définie positive, on obtient

$$\left\langle \boldsymbol{x}^{[k-1]}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}^{[k-1]} \right\rangle - \left\langle \boldsymbol{x}^{[k]}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}^{[k]} \right\rangle = \alpha_{k-1} - \alpha_k > 0.$$

La suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante de premier terme $\alpha_0 \leqslant 0$: elle ne peut converger vers 0.

Montrons par récurrence forte que $\boldsymbol{x}^{[k]} \neq 0$, $\boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k-1]} \neq 0$, et $0 \geqslant \alpha_{k-1} > \alpha_k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

- **Initialisation :** On a $\boldsymbol{x}^{[0]} \neq 0$ et $\boldsymbol{x}^{[1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[0]}$.
  On montre par l'absurde que $\boldsymbol{x}^{[1]} \neq 0$. Supposons $\boldsymbol{x}^{[1]} = 0$, alors $\alpha_1 = 0$ et $\boldsymbol{x}^{[0]} - \boldsymbol{x}^{[1]} = \boldsymbol{x}^{[0]} \neq 0$. Comme $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne définie positive on obtient

  $$\alpha_0 - \alpha_1 = \left\langle (\boldsymbol{x}^{[0]} - \boldsymbol{x}^{[1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\boldsymbol{x}^{[0]} - \boldsymbol{x}^{[1]}) \right\rangle > 0$$

  et contradiction avec $\alpha_0 \leqslant 0$.
  On montre ensuite par l'absurde que $\boldsymbol{x}^{[0]} \neq \boldsymbol{x}^{[1]}$. Supposons $\boldsymbol{x}^{[1]} = \boldsymbol{x}^{[0]}$. Par construction $\boldsymbol{x}^{[1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[0]}$, et dans ce cas, comme $\boldsymbol{x}^{[0]} \neq 0$, $(1, \boldsymbol{x}^{[0]})$ serait un élément propre de $\mathbb{B}$: contradiction avec $\rho(\mathbb{B}) < 1$.
  Comme $\boldsymbol{x}^{[0]} - \boldsymbol{x}^{[1]} \neq 0$, on a

  $$\alpha_0 - \alpha_1 = \left\langle (\boldsymbol{x}^{[0]} - \boldsymbol{x}^{[1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\boldsymbol{x}^{[0]} - \boldsymbol{x}^{[1]}) \right\rangle > 0$$

  et donc $0 \geqslant \alpha_0 > \alpha_1$.

- **Hérédité :** On suppose la propriété vraie jusqu'au rang k. On a alors $\boldsymbol{x}^{[k]} \neq 0$, $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]}$ et $\alpha_k \leqslant 0$.
  On montre par l'absurde que $\boldsymbol{x}^{[k+1]} \neq 0$. Supposons $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = 0$, alors $\alpha_{k+1} = 0$ et $\boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{x}^{[k]} \neq 0$. Comme $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne définie positive on obtient

  $$\alpha_k - \alpha_{k+1} = \left\langle (\boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k+1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k+1]}) \right\rangle > 0$$

  et contradiction avec $\alpha_k \leqslant 0$.
  On montre ensuite par l'absurde que $\boldsymbol{x}^{[k]} \neq \boldsymbol{x}^{[k+1]}$. Supposons $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{x}^{[k]}$. Par construction $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]}$, et dans ce cas, comme $\boldsymbol{x}^{[k]} \neq 0$, $(1, \boldsymbol{x}^{[k]})$ serait un élément propre de $\mathbb{B}$: contradiction avec $\rho(\mathbb{B}) < 1$.
  Comme $\boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k+1]} \neq 0$, on a

  $$\alpha_k - \alpha_{k+1} = \left\langle (\boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k+1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k+1]}) \right\rangle > 0$$

  et donc $0 \geqslant \alpha_k > \alpha_{k+1}$.