

Proposition

Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ défini par (5.1) une formule de quadrature élémentaire de degré d'exactitude au moins n . Elle est alors de degré d'exactitude $n + m$, $m \in \mathbb{N}^*$, au moins si et seulement si

$$\int_a^b \pi_n(x) Q(x) dx = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \quad (\text{P-1})$$

où π_n est le polynôme de degré $n + 1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (\text{P-2})$$

Le degré maximal d'exactitude d'une formule de quadrature élémentaire à $n + 1$ points est $2n + 1$.
De plus, on a

$$(\text{P-1}) \iff \int_a^b \pi_n(x) x^k dx = 0, \quad \forall k \in \llbracket 0, m - 1 \rrbracket. \quad (\text{P-3})$$

Proof. On a par définition

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) = (b - a) \sum_{j=1}^n w_j f(x_j)$$

où les $n + 1$ points x_j sont distincts deux à deux dans l'intervalle $[a, b]$.

La formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré $n + m$ si et seulement si

$$\int_a^b P(x) dx = \mathcal{Q}_n(P, a, b), \quad \forall P \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$$

Soit $P \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$, on peut effectuer la division euclidienne de P par $\pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$. Il existe donc $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ (quotient) et $R \in \mathbb{R}_n[X]$ (reste) tels que

$$P = Q\pi_n + R.$$

On a alors par linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b P(x)dx = \int_a^b Q(x)\pi_n(x)dx + \int_a^b R(x)dx$$

et par linéarité de \mathcal{Q}_n

$$\mathcal{Q}_n(P, a, b) = \mathcal{Q}_n(Q\pi_n, a, b) + \mathcal{Q}_n(R, a, b).$$

Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude n et comme $R \in \mathbb{R}_n[X]$ on obtient

$$\int_a^b R(x)dx = \mathcal{Q}_n(R, a, b).$$

On en déduit alors que

$$\int_a^b P(x)dx - \mathcal{Q}_n(P, a, b) = \int_a^b Q(x)\pi_n(x)dx - \mathcal{Q}_n(Q\pi_n, a, b).$$

Par construction $\pi_n(x_j) = 0, \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, ce qui donne

$$\mathcal{Q}_n(Q\pi_n, a, b) = (b - a) \sum_{j=0}^n w_j Q(x_j) \pi_n(x_j) = 0$$

et donc

$$\int_a^b P(x)dx - \mathcal{Q}_n(P, a, b) = \int_a^b Q(x)\pi_n(x)dx. \quad (\text{P-4})$$

$\boxed{\Leftarrow}$ si (P-1) est vérifié alors,

$$\int_a^b P(x)dx - \mathcal{Q}_n(P, a, b) = 0.$$

La formule de quadrature est donc de degré d'exactitude $n + m$.

\Rightarrow si la formule de quadrature est de degré d'exactitude $n + m$ alors pour tout $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$, le polynôme $P = Q\pi_n \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$ et donc

$$\int_a^b P(x)dx - \mathcal{Q}_n(P, a, b) = 0.$$

En utilisant (P-4), on obtient alors

$$\int_a^b Q(x)\pi_n(x)dx = 0.$$

- La plus grande valeur que puisse prendre m est $n + 1$ (i.e. $m + n = 2n + 1$). En effet si $m = n + 2$ alors $Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ dans (P-1). Or $\pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et en prenant $Q = \pi_n$ on obtient

$$\int_a^b \pi_n(x)Q(x)dx = \int_a^b Q^2(x)dx > 0.$$

- Dans l'équivalence (P-3), \Rightarrow est immédiat car $x \mapsto x^k \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.
Pour établir l'implication \Leftarrow , on utilise la linéarité de l'intégrale. En effet, soit $P \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$, il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k x^k.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x)\pi_n(x)dx &= \int_a^b \pi_n(x) \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k x^k dx \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \int_a^b \pi_n(x) x^k dx \\ &\stackrel{\text{hyp}}{=} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \times 0 = 0. \end{aligned}$$

