Proposition

La formule de quadrature élémentaire (5.1) à $n+1$ points est de degré d'exactitude k (au moins) si et seulement si

$$(b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^r = \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}, \quad \forall r \in [\![0,k]\!]. \tag{P-1}$$

Proof.

- $\boxed{\Rightarrow}$ Si la formule (5.1) est de degré d'exactitude k, elle est donc exacte pour tout polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$ et plus particulièrement pour tous les monômes $1, X, X^2, \ldots, X^k$. Soit $r \in [\![0,k]\!]$. En prenant $f(x) = x^r$, la formule (5.1) étant exacte par hypothèse, on obtient

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^r \overset{\text{hyp}}{=} \int_a^b x^r dx = \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}$$

- $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que l'on a (P-1). Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_k[X]$. On va montrer que la formule de quadrature (5.1) est alors exacte.
  Le polynôme P peut s'écrire comme combinaison linéaire des monômes de $\{1, X, X^2, \ldots, X^k\}$, base de $\mathbb{R}_k[X]$.
  1ère démonstration: On a donc

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

  En prenant $f = \mathrm{P}$, la formule de quadrature (5.1) donne

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{P}(x_i) = (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_i^j$$

  De plus, par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \int_a^b x^j dx = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \frac{b^{j+1}-a^{j+1}}{j+1}$$

et en utilisant (P-1) on obtient

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = (b-a)\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^j$$

Ce qui donne

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{P}(x_i).$$

La formule de quadrature est donc de degré d'exactitude k.
2ème démonstration: On a donc

$$\mathrm{P} = \sum_{j=0}^{k}\alpha_j X^j$$

et par linéarité de l'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$ (voir Proposition 5.4) on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_n(\mathrm{P},a,b) &= \mathcal{Q}_n(\sum_{j=0}^{k}\alpha_j X^j, a, b)\\ &= \sum_{j=0}^{k}\alpha_j \mathcal{Q}_n(X^j,a,b).\end{aligned}$$

Par hypothèse, on a (P-1) et, comme par définition X^j est le polynôme $x \mapsto x^j$, on obtient

$$\forall j \in [\![0,k]\!],\ \mathcal{Q}_n(X^j,a,b) \stackrel{\mathsf{hyp}}{=} \int_a^b X^j(x)dx = \int_a^b x^j dx = \frac{b^{j+1}-a^{j+1}}{j+1}.$$

De plus, par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \sum_{j=0}^{k}\alpha_j\int_a^b x^j dx = \sum_{j=0}^{k}\alpha_j\frac{b^{j+1}-a^{j+1}}{j+1}$$

et donc
$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \mathcal{Q}_n(X^j, a, b) = \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b).$$

$\square$