Exercice 0.0.1

Q. 1 *Déterminer les points* t_0, t_1 *de l'intervalle* $[-1,1]$ *et les poids* w_0, w_1 *tel que la formule de quadrature*

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx 2\sum_{i=0}^{1} w_i g(t_i)$$

soit de degré d'exactitude 3.

Q. 2 *En déduire une formule de quadrature pour le calcul de* $\int_a^b f(x)dx$ *qui soit de degré d'exactitude* 3.

Q. 1

Q. 2 D'après la Proposition 5.9, si t_0 et t_1 sont distincts et dans l'intervalle $[-1,1]$ alors avec

$$w_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{t-t_1}{t_0-t_1}dt \text{ et } w_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{t-t_0}{t_1-t_0}dt$$

la formule de quadrature est de degré d'exactitude 1.

Pour déterminer les points t_0 et t_1, on utilise la Proposition 5.11 (degré maximal d'exactitude) avec $m = n+1 = 2$: la formule de quadrature est de degré $2n+1 = 3$ ssi

$$\int_{-1}^{1} \pi_1(t)Q(t)dt = 0, \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_1[X]$$

avec $\pi_1(t) = (t-t_0)(t-t_1)$. Par linéarité ceci est équivalent à

$$\int_{-1}^{1} \pi_1(t)t^k dt = 0, \forall k \in [\![0,1]\!]$$

c'est à dire

$$\int_{-1}^{1} \pi_1(t)dt = 0 \text{ et } \int_{-1}^{1} \pi_1(t)tdt = 0.$$

Or on a
$$\int_{-1}^{1} \pi_1(t)dt = \int_{-1}^{1} t^2 - (t_0+t_1)t + t_0t_1 dt = \frac{2}{3} + 2t_0t_1$$
et
$$\int_{-1}^{1} \pi_1(t)tdt = \int_{-1}^{1} t^3 - (t_0+t_1)t^2 + t_0t_1 tdt = -\frac{2}{3}(t_0+t_1).$$
On est amené à résoudre le système non linéaire
$$t_0t_1 = -\frac{1}{3} \text{ et } -\frac{2}{3}(t_0+t_1) = 0$$
ce qui donne $t_0 = -\sqrt(3)/3$ et $t_1 = \sqrt(3)/3$.

Il reste à calculer w_0 et w_1. On a
$$w_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{t-\sqrt(3)/3}{-2\sqrt(3)/3}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{-\sqrt(3)/3}{-2\sqrt(3)/3}dt = 1/2$$
et
$$w_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{t+\sqrt(3)/3}{2\sqrt(3)/3}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt(3)/3}{2\sqrt(3)/3}dt = 1/2.$$

La formule de quadrature
$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx g(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + g(\frac{\sqrt{3}}{3})$$
est donc d'ordre 3.

Q. 3 On effectue le changement de variable $x = \varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$ en appliquant la Proposition 5.3 (changement de variable affine) pour obtenir que
$$(b-a)\left(\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_1)\right)$$
est une formule de quadrature approchant $\int_a^b f(x)dx$ avec un degré d'exactitude de 3 où $x_0 = \varphi(t_0)$ et $x_1 = \varphi(t_1)$.