

Proposition

Soient $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ des points deux à deux distincts de l'intervalle $[a, b]$ donnés. Il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire (5.1) à $n + 1$ points de degré d'exactitude n au moins.

Proof. En fixant les points $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ deux à deux distincts, pour obtenir explicitement la formule de quadrature de type (5.1) il faut déterminer les $n + 1$ poids $(w_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$. Or, de (5.4), en prenant $k = n$, on obtient exactement $n + 1$ équations linéaires en les (w_i) s'écrivant matriciellement sous la forme :

$$(b - a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a \\ \frac{b^2 - a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

La matrice intervenant dans le système précédent s'appelle **la matrice de Vandermonde** et elle est inversible (car les (x_i) sont deux à deux distincts, voir Exercice B.3.13). Ceci établit donc l'existence et l'unicité de poids $(w_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ tels que la formule de quadrature élémentaire (5.1) soit d'ordre (au moins) n .

Il est aussi possible de démontrer l'unicité classiquement. Supposons qu'il existe $(w_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ et $(\tilde{w}_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on ait

$$\int_a^b P(x) dx = (b - a) \sum_{i=0}^n w_i P(x_i) = (b - a) \sum_{i=0}^n \tilde{w}_i P(x_i).$$

On a alors $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\sum_{i=0}^n (w_i - \tilde{w}_i) P(x_i) = 0. \quad (\text{P-1})$$

On rappelle que les fonctions de base de Lagrange associées aux $(n + 1)$ points $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ définies en (4.5), notées L_i , sont dans $\mathbb{R}_n[X]$ et vérifient

$$L_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En choisissant $P = L_j$ dans (P-1), on obtient

$$0 = \sum_{i=0}^n (w_i - \tilde{w}_i) L_j(x_i) = (w_j - \tilde{w}_j)$$

ce qui prouve l'unicité. □

