

Proposition

Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie en (5.1), une formule de quadrature élémentaire à $n + 1$ points (distincts deux à deux et ordonnés). On dit qu'elle est **symétrique** si

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \quad (\text{P-1})$$

Dans ce cas si cette formule est exacte pour les polynômes de degré $2m$ alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré $2m + 1$.

Proof. Soit $P \in \mathbb{R}_{2m+1}[X]$. Il peut alors s'écrire sous la forme

$$P(x) = C \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} + R(x)$$

avec C une constante réelle et $R \in \mathbb{R}_{2m}[X]$. On a alors

$$\int_a^b P(x) dx = C \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} dx + \int_a^b R(x) dx$$

et en appliquant la formule de quadrature au polynôme P on obtient

$$\sum_{i=0}^n w_i P(x_i) = C \sum_{i=0}^n w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} + \sum_{i=0}^n w_i R(x_i)$$

On veut donc démontrer que

$$\int_a^b P(x) dx = (b-a) \sum_{i=0}^n w_i P(x_i)$$

c'est à dire

$$C \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} dx + \int_a^b R(x) dx = (b-a) C \sum_{i=0}^n w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} + (b-a) \sum_{i=0}^n w_i R(x_i)$$

Comme la formule de quadrature est supposée exacte pour les polynôme de degré $2m$, on a

$$\int_a^b R(x)dx = (b-a) \sum_{i=0}^n w_i R(x_i).$$

Il reste donc à démontrer que

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} dx = (b-a) \sum_{i=0}^n w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1}.$$

Or en effectuant le changement de variable $t \mapsto \frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}$ on obtient

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 t^{2m+1} dt = 0.$$

Des propriétés de symétrie de la formule, on déduit

$$x_i + x_{n-i} = a+b \Leftrightarrow x_i - \frac{a+b}{2} = -\left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2}\right)$$

- Si $n = 2k$, (n paire), on a alors un nombre **impair** de points avec nécessairement $x_k = x_{n-k} = \frac{a+b}{2}$ et

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} + 0 \times w_k + \sum_{i=k+1}^{2k} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} - \sum_{i=k+1}^{2k} w_{n-i} \left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} - \sum_{j=0}^{k-1} w_j \left(x_j - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Si $n = 2k - 1$, (n impaire), on alors un nombre **pair** de points (avec $x_i \neq \frac{a+b}{2}, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$) et

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} + \sum_{i=k}^{2k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} - \sum_{i=k}^{2k-1} w_{n-i} \left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} - \sum_{j=0}^{k-1} w_j \left(x_j - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

