Théorème

Soient $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a,b];\mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ la formule de quadrature de Gauss-Legendre définie dans la Proposition 5.14. Alors on a

$$|\int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f,a,b)| \leqslant \frac{\left\| f^{(2n+2)} \right\|_\infty}{(2n+2)!} \int_a^b \pi_n(x)^2 dx \tag{P-1}$$

où $\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, les x_i étant les points de la formule de quadrature.

Proof. On va utiliser H_n, le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite aux $(n+1)$ points de la quadrature. D'après le Théorème 4.11, c'est l'unique polynôme de degré au plus $2n+1$ vérifiant

$$\mathrm{H}_n(x_i) = f(x_i) \text{ et } \mathrm{H}_n'(x_i) = f'(x_i),\ \forall i \in [\![0,n]\!].$$

La fonction f étant dans $\mathcal{C}^{2n+2}([a,b];\mathbb{R})$, on peut appliquer le Théorème 4.12 et pour tout $x \in [a,b]$, $\exists \xi_x \in]a,b[$ tel que

$$f(x) - \mathrm{H}_n(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2.$$

Ensuite on intégre cette relation:

$$\int_a^b (f(x) - \mathrm{H}_n(x))dx = \int_a^b \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 dx.$$

Le polynôme H_n étant de degré $2n+1$, la formule de quadrature est donc exacte et on a:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathrm{H}_n(x)dx &= \mathcal{Q}_n(\mathrm{H}_n, a, b) \\
&= (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{H}_n(x_i) \\
&= (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \\
&= \mathcal{Q}_n(f, a, b).
\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f,a,b) = \int_a^b \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!}(\pi_n(x))^2 dx.$$

Ce qui donne

$$|\int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f,a,b)| \leqslant \frac{\left\| f^{(2n+2)} \right\|_\infty}{(2n+2)!} \int_a^b \pi_n(x)^2 dx.$$

$\square$