Proposition

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (5.1), une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ (distincts deux à deux) . La formule de quadrature est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, les poids w_i sont donnés par

$$w_i = \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}dx, \quad \forall i \in [\![0,n]\!] \tag{P-1}$$

avec $t_i = (x_i - a)/(b-a)$.
Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$ alors on a

$$|\mathcal{E}_{a,b}(f)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \int_a^b |\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)|dx \tag{P-2}$$

Proof. Par le changement de variables $s : t \longrightarrow a+(b-a)t$ on obtient

$$\int_a^b L_i(x)dx = (b-a)\int_0^1 L_i \circ s(t)dt$$

et l'on a $x_i = s(t_i) = a + (b-a)t_i$ où $t_i = (x_i-a)/(b-a)$. On en déduit

$$\begin{aligned}\int_0^1 L_i \circ s(t)dt &= \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{s(t)-s(t_j)}{s(t_i)-s(t_j)}dt = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{(b-a)(t-t_j)}{(b-a)(t_i-t_j)}dt \\ &= \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}dt\end{aligned}$$

On note $\mathcal{L}_n(f)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associés aux points $(x_i, f(x_i))_{i\in[\![0,n]\!]}$:

$$\mathcal{L}_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)f(x_i) \text{ avec } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

On a alors

$$\int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b L_i(x)dx.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que la formule de quadrature est de degré d'exactitude n. Soit $i \in [\![0, n]\!]$, $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ et on en déduit alors

$$\mathcal{Q}_n(L_i, a, b) = \int_a^b L_i(x)dx.$$

Or comme $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i, a, b) = (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j L_i(x_j) = (b-a)w_i.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose les poids $(w_i)_{i=0}^{n}$ donnés par (P-1). La formule de quadrature s'écrit alors

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b L_i(x)dx.$$

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[X]$. Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a $\mathrm{P} = \mathcal{L}_n(P)$ et

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathrm{P}(x)dx &= \int_a^b \mathcal{L}_n(P)(x)dx \\
&= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\mathrm{P}(x_i)dx \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(x_i) \int_a^b L_i(x)dx \\
&= (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{P}(x_i) = \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b).
\end{aligned}$$

Comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$, pour démontrer l'inégalité (P-2) on peut appliquer le théorème 4.4 pour obtenir

$$\forall x \in [a,b],\ \exists \xi_x \in [a,b],\quad f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

En intégrant cette équation sur l'intervalle $[a,b]$, on aboutit à

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x)dx = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi_x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)dx.$$

et donc

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x)dx\right| \leqslant \frac{\left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty}{(n+1)!}\int_a^b \left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|dx.$$

$\square$