

Proposition

Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie en (5.1), une formule de quadrature élémentaire à $n + 1$ points $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ (distincts deux à deux).

La formule de quadrature est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, les poids w_i sont donnés par

$$w_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} dt, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (\text{P-1})$$

avec $t_i = (x_i - a)/(b - a)$.

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$ alors on a

$$|\mathcal{E}_{a,b}(f)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty} \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx \quad (\text{P-2})$$

Proof. Montrons tout d'abord que l'on a l'égalité suivante

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} dt.$$

Par le changement de variables $s : t \longrightarrow a + (b - a)t$ on obtient

$$\int_a^b L_i(x) dx = (b - a) \int_0^1 L_i \circ s(t) dt$$

et l'on a $x_i = s(t_i) = a + (b - a)t_i$ où $t_i = (x_i - a)/(b - a)$. On en déduit

$$\begin{aligned} \int_0^1 L_i \circ s(t) dt &= \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{s(t) - s(t_j)}{s(t_i) - s(t_j)} dt = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(b-a)(t - t_j)}{(b-a)(t_i - t_j)} dt \\ &= \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} dt \end{aligned}$$

L'égalité est donc démontré.

Pour démontrer la proposition, on note $\mathcal{L}_n(f)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associés aux points $(x_i, f(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$:

$$\mathcal{L}_n(f)(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \quad \text{avec} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

On a alors

$$\int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx.$$

\Rightarrow On suppose que la formule de quadrature est de degré d'exactitude n . Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ et on a alors par hypothèse

$$\mathcal{Q}_n(L_i, a, b) \stackrel{\text{hyp}}{=} \int_a^b L_i(x) dx.$$

Or comme $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i, a, b) = (b - a) \sum_{j=0}^n w_j L_i(x_j) = (b - a) w_i.$$

On obtient donc

$$w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(x) dx.$$

⇐ On suppose les poids $(w_i)_{i=0}^n$ donnés par (P-1). La formule de quadrature s'écrit alors

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{hyp}}{=} \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx.$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a $P = \mathcal{L}_n(P)$ et

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x) dx &= \int_a^b \mathcal{L}_n(P)(x) dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^n L_i(x) P(x_i) dx \\ &= \sum_{i=0}^n P(x_i) \int_a^b L_i(x) dx \\ &= (b-a) \sum_{i=0}^n w_i P(x_i) = \mathcal{Q}_n(P, a, b). \end{aligned}$$

La formule de quadrature est donc exacte pour tout les polynômes de degré n au moins.

Comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$, Pour démontrer l'inégalité (P-2), comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$, on peut appliquer le théorème 4.4 pour obtenir

$$\forall x \in [a, b], \exists \xi_x \in [a, b], \quad f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

En intégrant cette équation sur l'intervalle $[a, b]$, on aboutit à

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x) dx = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx.$$

et donc

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x) dx \right| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx.$$

□

