Proposition

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (5.1), une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ (distincts deux à deux dans $[a,b]$).
On note $x=\varphi(t)=\alpha+\beta t$, $\beta\in\mathbb{R}^*$, le changement de variable affine, $t_i=\varphi^{-1}(x_i)$, $\forall i\in[\![0,n]\!]$, et

$$\mathcal{Q}_n(g,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b))=\left(\varphi^{-1}(b)-\varphi^{-1}(a)\right)\sum_{i=0}^{n}w_i g(t_i). \tag{P-1}$$

Alors $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est de degré d'exactitude k si et seulement si $\mathcal{Q}_n(g,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k.

Proof. On a $\varphi^{-1}(x)=\frac{x-\alpha}{\beta}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est de degré d'exactitude k. Soit $\mathrm{Q}\in\mathbb{R}_k[X]$. On a

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}\mathrm{Q}(t)dt=\frac{1}{\beta}\int_a^b\mathrm{Q}\circ\varphi^{-1}(x)dx.$$

Or φ^{-1} est un polynôme de degré 1 et $\mathrm{Q}\circ\varphi^{-1}$ est la composé de deux polynômes: c'est donc un polynôme de degré le produit des degrés des deux polynômes, i.e. $\mathrm{Q}\circ\varphi^{-1}\in\mathbb{R}_k[X]$. Comme $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est de degré d'exactitude k, on en déduit que

$$\int_a^b\mathrm{Q}\circ\varphi^{-1}(x)dx=\mathcal{Q}_n(\mathrm{Q}\circ\varphi^{-1},a,b)=(b-a)\sum_{i=0}^{n}w_i\mathrm{Q}\circ\varphi^{-1}(x_i)=(b-a)\sum_{i=0}^{n}w_i\mathrm{Q}(t_i).$$

On a alors

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}\mathrm{Q}(t)dt=\frac{b-a}{\beta}\sum_{i=0}^{n}w_i\mathrm{Q}(t_i)$$

or

$$\varphi^{-1}(b)-\varphi^{-1}(a)=\frac{b-\alpha}{\beta}-\frac{a-\alpha}{\beta}=\frac{b-a}{\beta}.$$

On en conclu donc que $\mathcal{Q}_n(g,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_k[X]$. On a

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \beta \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \mathrm{P} \circ \varphi(t)dt.$$

Or φ est un polynôme de degré 1 et $\mathrm{P} \circ \varphi^{-1}$ est la composé de deux polynômes: c'est donc un polynôme de degré le produit des degrés des deux polynômes, i.e. $\mathrm{P} \circ \varphi \in \mathbb{R}_k[X]$. Comme $\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \mathrm{P} \circ \varphi(t)dt &= \mathcal{Q}_n(\mathrm{P} \circ \varphi, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)) \\
&= \left(\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)\right) \sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{P} \circ \varphi(t_i) \\
&= \left(\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)\right) \sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{P}(x_i).
\end{aligned}$$

On a alors

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \beta \left(\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)\right) \sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{P}(x_i)$$

et comme $\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a) = \frac{b-a}{\beta}$, on en déduit que $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k.

$\square$