

# Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications  
Institut Galilée  
Université Paris XIII.

2022/09/07

# Chapitre VI

## Intégration numérique

- 1 Intégration numérique
  - Méthodes de quadrature élémentaires
  - Formules élémentaires de Newton-Cotes
  - Formules élémentaires de Gauss-Legendre
  - Méthodes de quadrature composées
  - Erreurs méthodes composées



On propose de chercher des approximations de

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

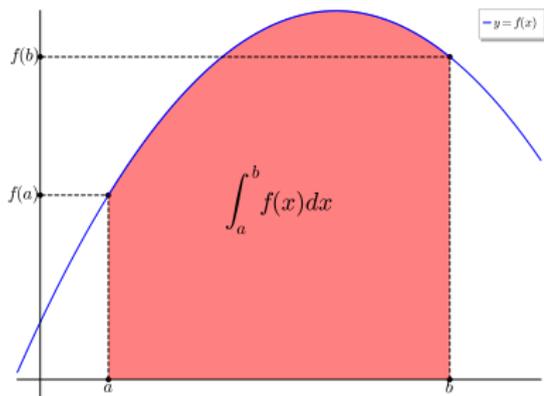


Figure: Représentation de  $\int_a^b f(x) dx$  (aire de la surface colorée)

## ♥ Definition

Soient  $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$  et  $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$  la **formule de quadrature élémentaire** donnée par :

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \quad (1)$$

avec  $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$   $w_j \in \mathbb{R}$  et  $x_j \in [a, b]$  distincts deux à deux. L'erreur associée à cette formule de quadrature, notée  $\mathcal{E}_{a,b}(f)$ , est définie par

$$\mathcal{E}_{a,b}(f) = \int_a^b f(x) dx - \mathcal{Q}_n(f, a, b), \quad \forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \quad (2)$$

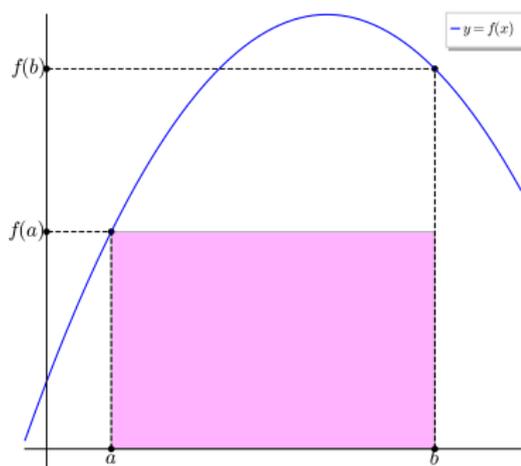
## ♥ Definition

On dit qu'une formule d'intégration (ou formule de quadrature) est d'ordre  $p$  ou a pour **degré d'exactitude**  $p$  si elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à  $p$ .

- 1 Intégration numérique
  - Méthodes de quadrature élémentaires
  - Formules élémentaires de Newton-Cotes
  - Formules élémentaires de Gauss-Legendre
  - Méthodes de quadrature composées
  - Erreurs méthodes composées

# Formule du rectangle à gauche

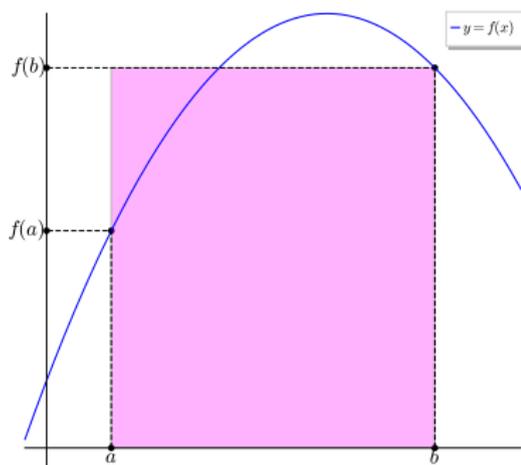
$$f(x) \approx f(a)$$



**Figure:** Formule du rectangle à gauche :  $\int_a^b f(x)dx \approx Q_0(f, a, b) = (b - a)f(a)$  (aire de la surface colorée)

# Formule du rectangle à droite

$$f(x) \approx f(b)$$



**Figure:** Formule du rectangle à droite :  $\int_a^b f(x)dx \approx Q_0(f, a, b) = (b - a)f(b)$  (aire de la surface colorée)

# Formule du point milieu

$$f(x) \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

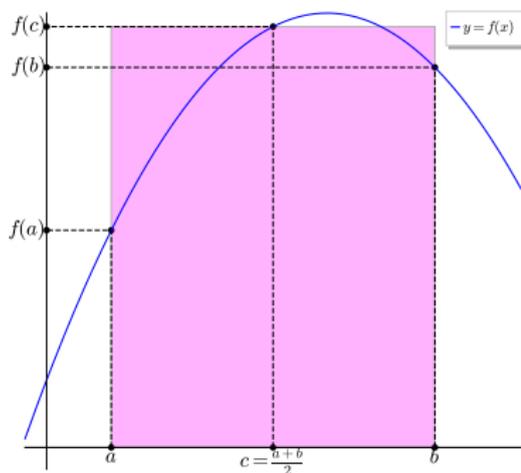


Figure: Formule du point milieu :  $\int_a^b f(x) dx \approx Q_0(f, a, b) = (b - a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  (aire de la surface coloriée)



## Exercice 1.1

Montrer que les formules des rectangles sont de degré d'exactitude 0 et que la formule du point milieu est de degré d'exactitude 1.

La *précision* de ces formules n'est pas bonne!

Comment y remédier?



## Exercice 1.2

Montrer que les formules des rectangles sont de degré d'exactitude 0 et que la formule du point milieu est de degré d'exactitude 1.

La *précision* de ces formules n'est pas bonne!

Comment y remédier?

En approchant la fonction  $f$  par des polynômes d'interpolation de degré  $\geq 1$ .

$$Q_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$



### Proposition:



Soit  $Q_n(f, a, b)$  définie en (1), une formule de quadrature élémentaire à  $n + 1$  points  $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  (distincts deux à deux dans  $[a, b]$ ).

On note  $x = \varphi(t) = \alpha + \beta t$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^*$ , le changement de variable affine,  $t_i = \varphi^{-1}(x_i)$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , et

$$Q_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)) = (\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)) \sum_{i=0}^n w_i g(t_i). \quad (3)$$

Alors  $Q_n(f, a, b)$  est de degré d'exactitude  $k$  si et seulement si  $Q_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b))$  est de degré d'exactitude  $k$ .

$$Q_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$



### Proposition:



La formule de quadrature élémentaire (1) à  $n+1$  points est de degré d'exactitude  $k$  (au moins) si et seulement si

$$(b - a) \sum_{i=0}^n w_i x_i^r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r + 1}, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket. \quad (4)$$

$$Q_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$



### Proposition:



Soient  $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  des points deux à deux distincts de l'intervalle  $[a, b]$  donnés. Il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire (1) à  $n + 1$  points de degré d'exactitude  $n$  au moins.



### Exercice 1.3:



Soient  $(x_i)_{i=0}^n$   $(n+1)$  points donnés et distincts 2 à 2 d'un intervalle  $[a, b]$  ( $a < b$ ). Ecrire une fonction algorithmique **WEIGHTSFROMPOINTS** permettant de déterminer les poids  $(w_i)_{i=0}^n$  de telle sorte que la formule de quadrature élémentaire associée soit de degré d'exactitude  $n$  au moins en s'inspirant de résultats obtenus dans la démonstration de la Proposition **??**. On pourra utiliser la fonction algorithmique  $\mathbf{x} \leftarrow \text{SOLVE}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$  permettant de résoudre le système linéaire  $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

$$(b-a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

$$Q_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$



### Proposition:



Soit  $Q_n(f, a, b)$  définie en (1), une formule de quadrature élémentaire à  $n + 1$  points (distincts deux à deux et ordonnés). On dit qu'elle est **symétrique** si

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a + b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \quad (5)$$

Dans ce cas si cette formule est exacte pour les polynômes de degré  $2m$  alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré  $2m + 1$ .

$$Q_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$



### Proposition:



Soit  $Q_n(f, a, b)$  définie en (1), une formule de quadrature élémentaire à  $n + 1$  points  $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  (distincts deux à deux).

La formule de quadrature est de degré d'exactitude  $n$  au moins si et seulement si pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , les poids  $w_i$  sont donnés par

$$w_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b - a} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} dx, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (6)$$

avec  $t_i = (x_i - a)/(b - a)$ .

Si  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$  alors on a

$$|\mathcal{E}_{a,b}(f)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty} \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx \quad (7)$$



### Exercice 1.4:



Soient  $(x_i)_{i=0}^n$  des points distincts 2 à 2 de l'intervalle  $[a, b]$  vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

On note  $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  les  $(n + 1)$  polynômes de base de Lagrange définis par

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

et vérifiant  $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ ,  $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$

#### Q. 1

Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L_i((a + b) - x) = L_{n-i}(x).$$

#### Q. 2

Soient  $(w_i)_{i=0}^n$  définis par

$$w_i = \frac{1}{b - a} \int_a^b L_i(t) dt, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Montrer que l'on a alors

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad w_i = w_{n-i}$$



## Lemme 1.1

Soient  $(x_i)_{i=0}^n$  des points distincts 2 à 2 de l'intervalle  $[a, b]$  vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Soient  $(w_i)_{i=0}^n$  définis par

$$w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

On a alors

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad w_i = w_{n-i}$$

et la formule de quadrature élémentaire associée est de degré d'exactitude au moins  $n$  si  $n$  est impaire et au moins  $n + 1$  sinon.

$$Q_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$



### Proposition:



Soit  $Q_n(f, a, b)$  défini par (1) une formule de quadrature élémentaire de degré d'exactitude au moins  $n$ . Elle est alors de degré d'exactitude  $n + m$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ , au moins si et seulement si

$$\int_a^b \pi_n(x) Q(x) dx = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \quad (8)$$

où  $\pi_n$  est le polynôme de degré  $n + 1$  défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (9)$$

Le degré maximal d'exactitude d'une formule de quadrature élémentaire à  $n + 1$  points est  $2n + 1$ .

De plus, on a

$$(8) \iff \int_a^b \pi_n(x) x^k dx = 0, \quad \forall k \in \llbracket 0, m - 1 \rrbracket. \quad (10)$$

Avec une **discrétisation régulière** de l'intervalle  $[a, b]$  :

Méthode de Newton-Cotes .

Bien d'autres méthodes peuvent être obtenues (avec d'autres points), certaines permettant le calcul d'intégrales avec poids de la forme  $\int_a^b w(x)f(x)dx$  :

- méthode de Newton-Cotes ouvertes,
- méthode de Gauss-Legendre ,
- méthode de Gauss-Jacobi,
- méthode de Gauss-Tchebychev,
- méthode de Gauss-Laguerre,
- méthode de Gauss-Hermitte,
- méthode de Gauss-Lobatto,
- méthode de Romberg...

- 1 Intégration numérique
  - Méthodes de quadrature élémentaires
  - Formules élémentaires de Newton-Cotes
  - Formules élémentaires de Gauss-Legendre
  - Méthodes de quadrature composées
  - Erreurs méthodes composées

## Proposition

Soient  $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$  et  $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  une discrétisation régulière de l'intervalle  $[a, b]$ :  $x_i = a + ih$  avec  $h = (b - a)/n$ . Les formules de quadrature élémentaires de Newton-Cotes s'écrivent sous la forme

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

où les poids  $(w_i)_{i=0}^n$  sont donnés par (6).

Elles sont symétriques et leur degré d'exactitude (d.e. dans le tableau suivant) est égal  $n$  si  $n$  est impair et  $n + 1$  sinon.

$n$	d.e.	$w_i$ (poids)									nom	
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$									trapèze
2	3	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$								Simpson
3	3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$							Newton
4	5	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$						Villarceau
5	5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$					?
6	7	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$				Weddle
7	7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$			?
8	9	$\frac{989}{28350}$	$\frac{2944}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{454}{2835}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{2944}{14175}$	$\frac{989}{28350}$		?

Table: Méthodes de Newton-Cotes

Par exemple, la formule de Simpson ( $n = 2$ ) est

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (11)$$

Calcul des coefficients  $w_i$ ? :

Par exemple, la formule de Simpson ( $n = 2$ ) est

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (11)$$

Calcul des coefficients  $w_i$ ? : **Méthode 1 :**

Formule doit être exacte pour les monômes  $1, X, X^2$  : on résoud le système

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 & = 1, & (f \\ aw_0 + (a+h)w_1 + (a+2h)w_2 & = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = a+h, & (f \\ a^2w_0 + (a+h)^2w_1 + (a+2h)^2w_2 & = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(3a^2 + 6ah + 4h^2), & (f \end{cases}$$

Mais il y a plus simple ...

Par exemple, la formule de Simpson ( $n = 2$ ) est

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (11)$$

Calcul des coefficients  $w_i$ ? : **Méthode 2 :**

Formule doit être exacte pour les monômes  $1, X, X^2$  et les  $w_i$  ne dépendent pas de l'intervalle  $[a, b]$  : on peut les calculer sur l'intervalle  $[0, 1]$  en résolvant le système

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 & = & 1, & (f(x) = 1) \\ 0 \times w_0 + \frac{1}{2} w_1 + 1 \times w_2 & = & \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, & (f(x) = x) \\ 0^2 \times w_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times w_1 + (1)^2 \times w_2 & = & \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, & (f(x) = x^2). \end{cases}$$

Par exemple, la formule de Simpson ( $n = 2$ ) est

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (11)$$

Calcul des coefficients  $w_i$ ? :

**Méthode 3 :**  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$w_i = \int_0^1 L_i(t) dx, \quad \text{avec } L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{nt - j}{i - j}$$

$$L_0(t) = \frac{2t-1}{-1} \frac{2t-2}{-2} = (2t-1)(t-1)$$

$$L_1(t) = \frac{2t}{1} \frac{2t-2}{-1} = -4(t-1)t$$

$$L_2(t) = \frac{2t}{2} \frac{2t-1}{1} = (2t-1)t$$

Par exemple, la formule de Simpson ( $n = 2$ ) est

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (11)$$

**Degré d'exactitude 3** : au moins ordre 3

$$\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{6} \left( 0^4 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 1^4 \right) = \frac{5}{24}$$



## Exercice 1.5:



### Q. 1

*Ecrire une fonction algorithmique **WEIGHTSPOINTSNC** retournant les  $(n + 1)$  points et les  $(n + 1)$  poids de la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à  $(n + 1)$  points.*

### Q. 2

*Ecrire une fonction algorithmique **QUADELEMNC** retournant la valeur de  $Q_n(f, a, b)$  correspondant à la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à  $(n + 1)$  points.*

```
sage: %paste
var('t')
def BaseLagrange(n,i):
    L=1
    for j in range(n+1):
        if i!=j:
            L=L*(n*t-j)/(i-j)
    return L

def NewtonCotes(n):
    W=[];
    for i in range(n+1):
        W.append(integrate(BaseLagrange(n,i),t,0,1))
    return W

## -- End pasted text --
t
sage: NewtonCotes(3)
[1/8, 3/8, 3/8, 1/8]
sage: NewtonCotes(4)
[7/90, 16/45, 2/15, 16/45, 7/90]
sage: █
```

Problème lorsque  $n$  devient grand! : illustration sur un exemple simple.

Soit  $f(x) = 3x + 2$ ,  $a = 0$  et  $b = 1$ .

- Les formules de Newton-Cotes à  $n + 1$  points,  $n \geq 1$ , sont exactes car  $f$  est un polynôme de degré 1.
- les poids  $(w_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  peuvent être calculés sous forme fractionnaire.

Or  $x_i$  et  $w_i$  sont approchés à  $\approx 1e - 16$  près sur ordinateur

$$x_i = i/n \approx \tilde{x}_i \quad \text{et} \quad w_i \approx \tilde{w}_i$$

- **Newton-Cotes exacte** :  $\sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$
- **Newton-Cotes approchée** :  $\sum_{i=0}^n \tilde{w}_i f(\tilde{x}_i)$

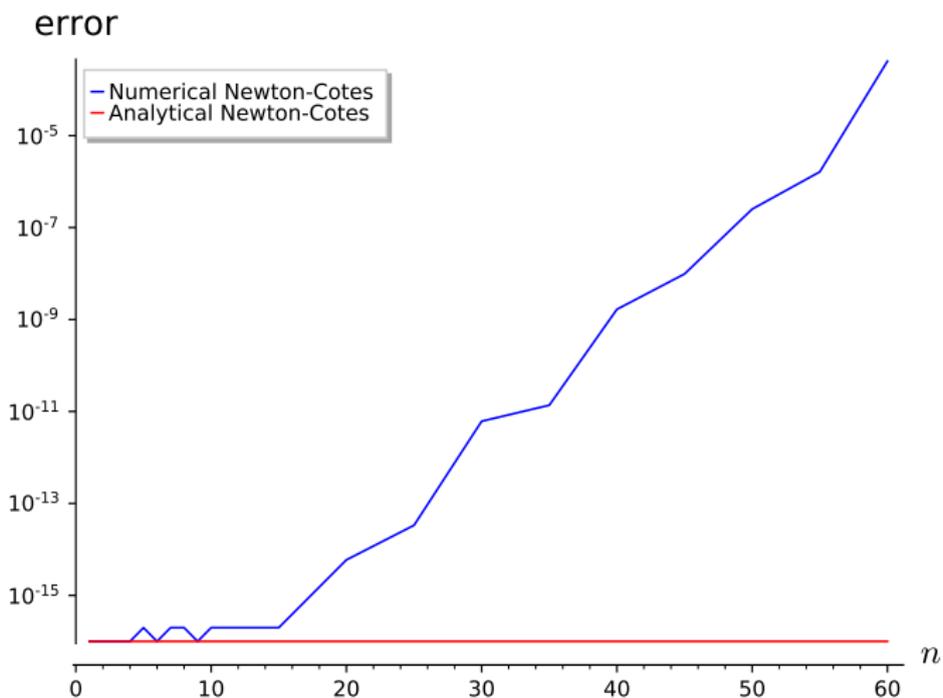


Figure: Instabilité des méthodes de Newton-Cotes élémentaires

## Remarque 1.2

Pour les méthode de Newton-Cotes, il ne faut pas trop "monter" en ordre car le phénomène de Runge (forte oscillation possible du polynôme d'interpolation sur les bords de l'intervalle) peut conduire à de très grandes erreurs. Au delà de  $n = 7$ , des poids négatifs apparaissent dans les formules et les rendent beaucoup plus sensibles aux erreurs d'arrondis.

Que faire pour pallier ce problème : Sortir couvert!<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Traduction : utiliser la relation de Chasles

- 1 Intégration numérique
  - Méthodes de quadrature élémentaires
  - Formules élémentaires de Newton-Cotes
  - Formules élémentaires de Gauss-Legendre
  - Méthodes de quadrature composées
  - Erreurs méthodes composées

$$Q_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Peut-on avoir une formule de quadrature de degré d'exactitude  $2n + 1$ ?

Pour cela il faut déterminer les points  $(x_i)_{i=0}^n$  appartenant à  $[a, b]$  distincts 2 à 2.



## Exercice 1.6:



### Q. 1

Déterminer les points  $t_0, t_1$  de l'intervalle  $[-1, 1]$  et les poids  $w_0, w_1$  tel que la formule de quadrature

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx 2 \sum_{i=0}^1 w_i g(t_i)$$

soit de degré d'exactitude 3.

### Q. 2

En déduire une formule de quadrature pour le calcul de  $\int_a^b f(x) dx$  qui soit de degré d'exactitude 3.

$$Q_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Peut-on avoir une formule de quadrature de degré d'exactitude  $2n + 1$ ?

Oui pour  $n = 1$ ! Et pour  $n > 1$ ?

Pour cela il faut déterminer les points  $(x_i)_{i=0}^n$  appartenant à  $[a, b]$  distincts 2 à 2. Les **polynômes de Legendre** vont être d'une grande utilité!

Les polynômes de Legendre peuvent être définis par la formule de récurrence de Bonnet

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t), \quad \forall n \geq 1 \quad (12)$$

avec  $P_0(t) = 1$  et  $P_1(t) = t$ .

On a les propriétés suivantes:

**prop.1** le polynôme de Legendre  $P_n$  est de degré  $n$ ,

**prop.2** la famille  $\{P_k\}_{k=0}^n$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ ,

**prop.3** pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ , on a

$$\int_{-1}^1 P_m(t)P_n(t)dt = \frac{2}{2n+1} \delta_{m,n}, \quad (13)$$

ce qui correspond à l'orthogonalité des polynômes de Legendre pour le produit scalaire

$$\langle P_m, P_n \rangle = \int_{-1}^1 P_m(t)P_n(t)dt.$$

**prop.4** Pour  $n \geq 1$ ,  $P_n$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  et ses  $n$  racines sont simples dans  $] -1, 1[$ , c'est à dire

$$P_n(t) = C \prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i), \quad C \in \mathbb{R}^*$$

où les  $t_i$  sont 2 à 2 distincts (et ordonnés). Les  $(n+1)$  racines simples de  $P_{n+1}$  sont alors chacune dans l'un des  $(n+1)$  intervalles  $] -1, t_0[$ ,  $]t_0, t_1[$ ,  $\dots$ ,  $]t_{n-2}, t_{n-1}[$ ,  $]t_{n-1}, 1[$ .



## Proposition:



Soit  $(t_i)_{i=0}^n$  les  $n + 1$  racines distinctes du polynôme de Legendre de degré  $(n + 1)$ . On note  $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $w_i$  les poids donnés par (6). La formule de quadrature élémentaire

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

est appelée la formule de quadrature de Gauss-Legendre. C'est l'unique formule de quadrature élémentaire à  $(n + 1)$  points ayant pour degré d'exactitude  $2n + 1$ .

$n$	exactitude	$w_i$ (poids)	$t_i$ (points)
0	1	1	0
1	3	1/2, 1/2	$-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}$
2	5	5/18, 8/18, 5/18	$-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5}$

Table: Méthodes de Gauss-Legendre sur  $[-1, 1]$



## Théorème:



Soient  $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$  et  $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$  la formule de quadrature de Gauss-Legendre définie dans la Proposition ???. Alors on a

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \mathcal{Q}_n(f, a, b) \right| \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_\infty}{(2n+2)!} \int_a^b \pi_n(x)^2 dx \quad (14)$$

où  $\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ , les  $x_i$  étant les points de la formule de quadrature.

L'objectif de cet exercice est de calculer les points et les poids de la formule de quadrature de Gauss-Legendre à  $(n + 1)$  points. La formule de quadrature de Gauss-Legendre à  $(n + 1)$  points sur  $[-1, 1]$  est donnée par

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx 2 \sum_{i=0}^n w_i g(t_i)$$

où les  $(t_i)_{i=0}^n$  sont les  $n + 1$  racines du polynôme de Legendre  $P_{n+1}(t)$ . Cette formule a pour degré d'exactitude  $2n + 1$ .

Soient  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$  le produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$  et  $\|P\| = \langle P, P \rangle^{1/2}$  la norme associée.

Soit  $M_n$  le polynôme de Legendre normalisé de degré  $(n + 1)$ ,  $M_n = \frac{P_{n+1}}{\|P_{n+1}\|}$ . On utilisera les résultats sur les polynômes de Legendre rappelés en cours.

Q. 1

Montrer que

$$c_{n+1}M_{n+1}(t) = tM_n(t) - c_nM_{n-1}(t), \quad n > 1 \tag{1}$$

avec

$$M_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad M_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t \quad \text{et} \quad c_n = \sqrt{\frac{n^2}{4n^2 - 1}}$$

On définit le vecteur  $\mathbf{M}(t)$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  par

$$\mathbf{M}(t) = (M_0(t), \dots, M_n(t))^t.$$

Q. 2

Montrer que l'on a

$$t\mathbf{M}(t) = \Delta\mathbf{M}(t) + c_{n+1}M_{n+1}(t)\mathbf{e}_{n+1} \tag{2}$$

où l'on explicitera la matrice tridiagonale  $\Delta \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  en fonction des coefficients  $c_1, \dots, c_n$ . Le vecteur  $\mathbf{e}_{n+1}$  étant le  $(n + 1)$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Q. 3

En déduire que les  $(n + 1)$  racines distinctes de  $M_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$  sont les  $(n + 1)$  valeurs propres de  $\Delta$ .

Q. 4

Montrer que

$$\sum_{k=0}^n w_k M_i(t_k) M_j(t_k) = \delta_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in [0, n]^2 \tag{3}$$

où  $\delta_{i,j} = 0$ , si  $i \neq j$  et  $\delta_{i,i} = 1$ .

On note  $W \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  la matrice diagonale, de diagonale  $(w_0, \dots, w_n)$  et  $P \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  la matrice définie par  $P_{i+1,j+1} = M_j(t_i)$ ,  $\forall (i, j) \in [0, n]^2$ .

Q. 5

- Montrer que  $2P^t W P = I$ .
- En déduire que  $W^{-1} = 2P P^t$ .
- En déduire que  $\frac{1}{w_i} = 2 \sum_{k=0}^n (M_k(t_i))^2$ ,  $\forall i \in [0, n]$ .

On suppose que l'on dispose de la fonction **algorithmique** `ERG(A)` retournant l'ensemble des valeurs propres d'une matrice symétrique  $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  dans l'ordre croissant sous la forme d'un vecteur de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Q. 6

- Ecrire la fonction `[t, w] ← GAUSSLEGENDRE(n)` retournant le tableau des points  $\mathbf{t}$  et le tableau des poids  $\mathbf{w}$  en utilisant les résultats obtenus dans cet exercice.
- Ecrire la fonction `l ← QUADELEMENTGAUSSLEGENDRE(f, a, b, n)` retournant une approximation de  $\int_a^b f(x) dx$  en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre à  $(n + 1)$  points sur l'intervalle  $[a, b]$ .

## 1 Intégration numérique

- Méthodes de quadrature élémentaires
- Formules élémentaires de Newton-Cotes
- Formules élémentaires de Gauss-Legendre
- Méthodes de quadrature composées
- Erreurs méthodes composées

### ♥ Definition 1.3

Soit  $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket}$  une subdivision de l'intervalle  $[\alpha, \beta]$ :

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = \beta.$$

On a alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x) dx. \quad (15)$$

Soit  $Q_n(g, a, b)$  la formule de quadrature élémentaire à  $n + 1$  points d'ordre  $p$  donnée par

$$Q_n(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j g(x_j) \approx \int_a^b g(x) dx.$$

La **méthode de quadrature composée associée à  $Q_n$** , notée  $Q_{k,n}^{\text{comp}}$ , est donnée par

$$Q_{k,n}^{\text{comp}}(f, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^k Q_n(f, \alpha_{i-1}, \alpha_i) \approx \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \quad (16)$$

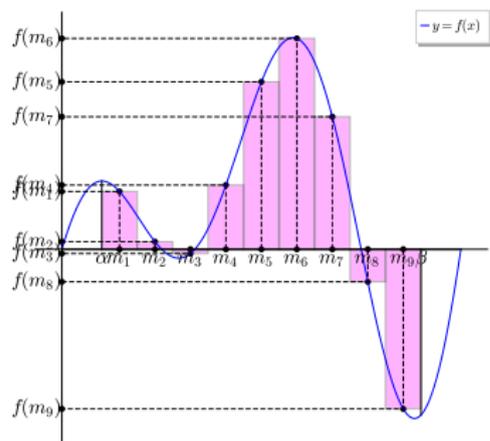
$$Q_n \text{ ordre } p \Rightarrow Q_{k,n}^{\text{comp}} \text{ ordre } p$$

# Formule composite des points milieux

$$Q_0(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a)g\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

$m_j$  milieu de l'intervalle  $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ ,

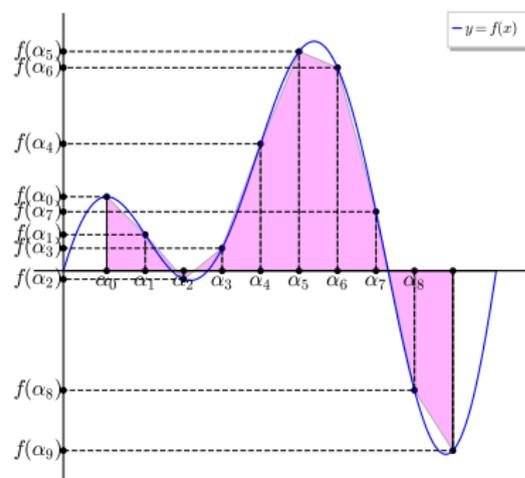
$$m_j = \frac{\alpha_{j-1} + \alpha_j}{2}$$



$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{j=1}^k \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^k Q_0(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) = h \sum_{j=1}^k f(m_j)$$

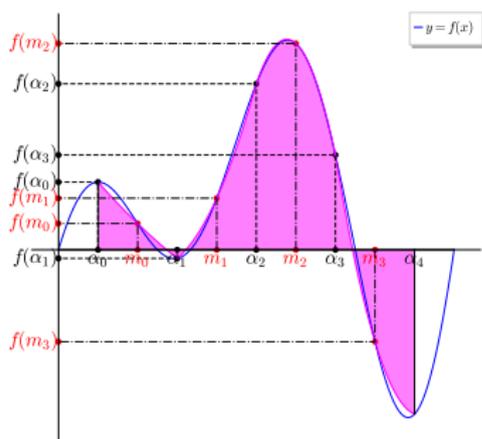
# Formule composite des trapèzes

$$Q_1(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-a}{2}(g(a) + g(b))$$



$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= \sum_{j=1}^k \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^k Q_0(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) \\ &\approx \frac{h}{2} \sum_{j=1}^k (f(\alpha_{j-1}) + f(\alpha_j)) \end{aligned}$$

# Formule composite de Simpson



$$Q_2(g, a, b)$$

def

$$\frac{b-a}{6} (g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b))$$

$m_j$  milieu de l'intervalle  $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ ,

$$m_j = \frac{\alpha_{j-1} + \alpha_j}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= \sum_{j=1}^k \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^k Q_2(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) \\ &\approx \frac{h}{6} \sum_{j=1}^k (f(\alpha_{j-1}) + 4f(m_j) + f(\alpha_j)) \end{aligned}$$



## Exercice 1.8:



Ecrire une fonction algorithmique `QUADSIMPSON` retournant une approximation de l'intégrale d'une fonction  $f$  sur l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  utilisant la méthode de quadrature composée de Simpson en **minimisant** le nombre d'appels à la fonction  $f$ . On rappelle que la formule élémentaire de Simpson est donnée par

$$Q_2(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-a}{6} (g(a) + 4g(\frac{a+b}{2}) + g(b)).$$

## 1 Integration numérique

- Méthodes de quadrature élémentaires
- Formules élémentaires de Newton-Cotes
- Formules élémentaires de Gauss-Legendre
- Méthodes de quadrature composées
- Erreurs méthodes composées

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{\text{comp}}(f) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(f, \alpha, \beta). \quad (17)$$

On a alors

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{\text{comp}}(f) = \sum_{j=1}^k \left( \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) \right) = \sum_{j=1}^k \mathcal{E}_{\alpha_{j-1}, \alpha_j}(f)$$

et on a vu que si  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$

$$|\mathcal{E}_{a,b}(f)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx$$

Si  $x_i$  **discrétisation régulière** de  $[a, b]$ , on peut démontrer (voir [?])

$$\max_{x \in [a,b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \leq C \frac{e^{-n}}{\sqrt{n} \log(n)} (b - a)^{n+1}.$$

En notant  $h_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$ ,  $h = \max_{j \in \llbracket 1, k \rrbracket} h_j$  et  $K_n = C \frac{e^{-n}}{\sqrt{n \log(n)}}$

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_{\alpha, \beta}^{\text{comp}}(f)| &\leq \sum_{j=1}^k |\mathcal{E}_{\alpha_{j-1}, \alpha_j}(f)| \\ &\leq \sum_{j=1}^k \frac{K_n}{(n+1)!} \max_{x \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]} |f^{(n+1)}(x)| h_j^{n+2} \\ &\leq K_n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f^{(n+1)}(x)| \sum_{j=1}^k h_j \\ &\leq K_n (\beta - \alpha) \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty} \end{aligned}$$

Mais majoration non optimale!

On vient de montrer, pour Newton-Cotes composées : si  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$

$$|\mathcal{E}_{\alpha, \beta}^{\text{comp}}(f)| \leq K_n(\beta - \alpha) \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}$$

A l'aide des **noyaux de Peano** :

 **Théorème 2: [?], page 43 (admis)**

Soient  $\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$  une méthode de quadrature composée associée à une méthode de quadrature élémentaire  $\mathcal{Q}_n$  de degré d'exactitude  $p \geq n$  et  $f \in \mathcal{C}^{p+1}([\alpha, \beta]; \mathbb{R})$ . On a alors

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(f, \alpha, \beta) \right| \leq C_p(\beta - \alpha) h^{p+1} \|f^{(p+1)}\|_{\infty} \quad (18)$$

avec  $h = \max_{j \in [1, k]} (\alpha_j - \alpha_{j-1})$  et  $C_p > 0$ . Ceci s'écrit aussi sous la forme

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(f, \alpha, \beta) \right| = \mathcal{O}(h^{p+1}) \quad (19)$$

et son **ordre de convergence** est  $p + 1$ .

## Préressentir l'ordre de convergence? (Trapèze ordre 2 et Simpson ordre 4)

- Pour Simpson:  $E(h) = \mathcal{O}(h^4) = Ch^4$
- Pour Trapèze:  $E(h) = \mathcal{O}(h^2) = Ch^2$

$$E(h) = Ch^p, \implies E(h/10) = C(h/10)^p = \frac{E(h)}{10^p}$$

Listing: : Script Matlab/Octave pour illustrer l'ordre des méthodes des Trapèzes et de Simpson

```
f=@(x) cos(x);  
F=@(x) sin(x);  
a=0;b=pi/2;  
Iex=F(b)-F(a);  
I1=QuadTrapeze(f,a,b,10);  
I2=QuadTrapeze(f,a,b,100);  
fprintf('Erreurs Trapeze: (N=10) %.5e (N=100) %.5e\n',abs(I1-Iex),abs(I2-Iex))  
I1=QuadSimpson(f,a,b,10);  
I2=QuadSimpson(f,a,b,100);  
fprintf('Erreurs Simpson: (N=10) %.5e (N=100) %.5e\n',abs(I1-Iex),abs(I2-Iex))
```

Output

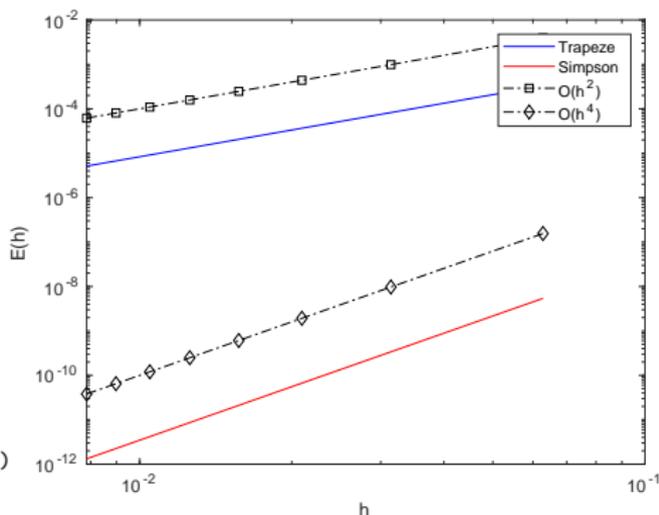
```
Erreurs Trapeze: (N=10) 2.05701e-03 - (N=100) 2.05618e-05  
Erreurs Simpson: (N=10) 2.11547e-07 - (N=100) 2.11391e-11
```

## Représenter graphiquement l'ordre de convergence? (Trapèze ordre 2 et Simpson ordre 4)

$$E(h) = Ch^p, \implies \log(E(h)) = \log(C) + p \log(h)$$

En échelle logarithmique,  $h \mapsto E(h)$  est une droite de pente  $p$

```
f=@(x) cos(x);  
F=@(x) sin(x);  
a=0;b=pi/2;  
Iex=F(b)-F(a);  
LN=25:25:200;  
k=1;  
for N=LN  
    H(k)=(b-a)/N;  
    E1(k)=abs(QuadTrapeze(f,a,b,N)-Iex);  
    E2(k)=abs(QuadSimpson(f,a,b,N)-Iex);  
    k=k+1;  
end  
loglog(H,E1,'b',H,E2,'r',H,H.^2,'k-.s', ...  
        H,0.01*H.^4,'k-.d')  
xlabel('h');ylabel('E(h)')  
legend('Trapeze','Simpson','O(h^2)','O(h^4)')
```



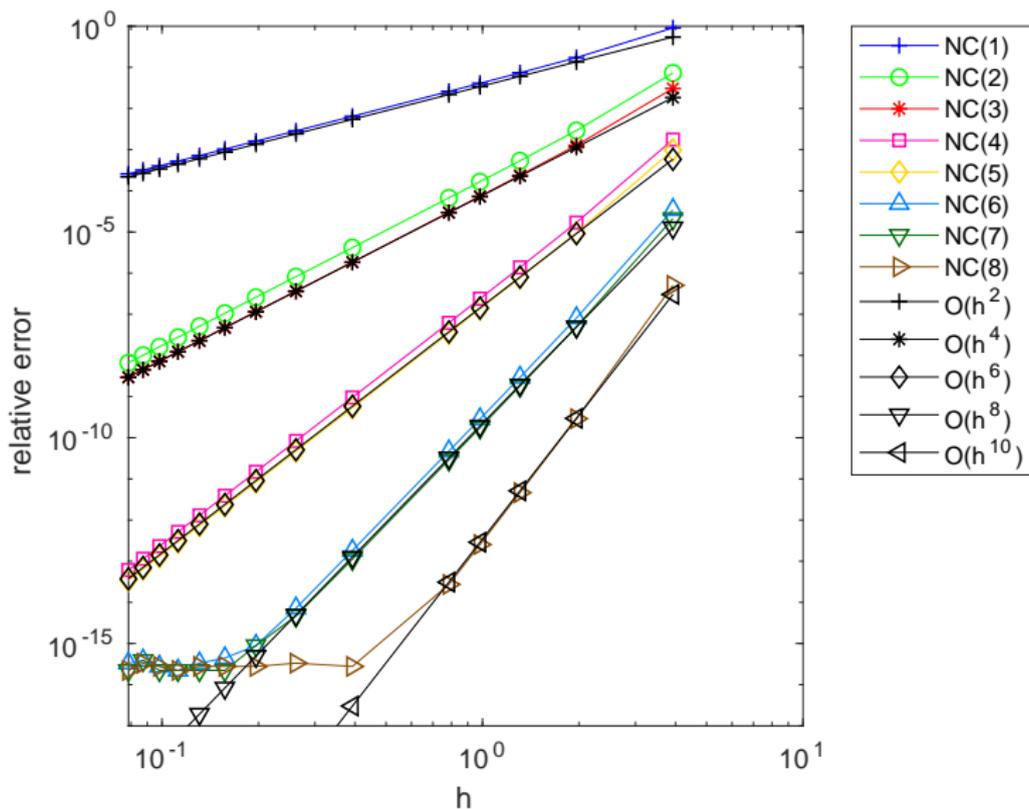


Figure: Erreur des méthodes de Newton-Cotes composées pour le calcul de

$$\int_0^{5\pi/2} \cos(x) dx, \text{ NC}(n) \text{ correspondant à } Q_{k,n}^{\text{comp}} \text{ et } h = \frac{5\pi}{2k}.$$

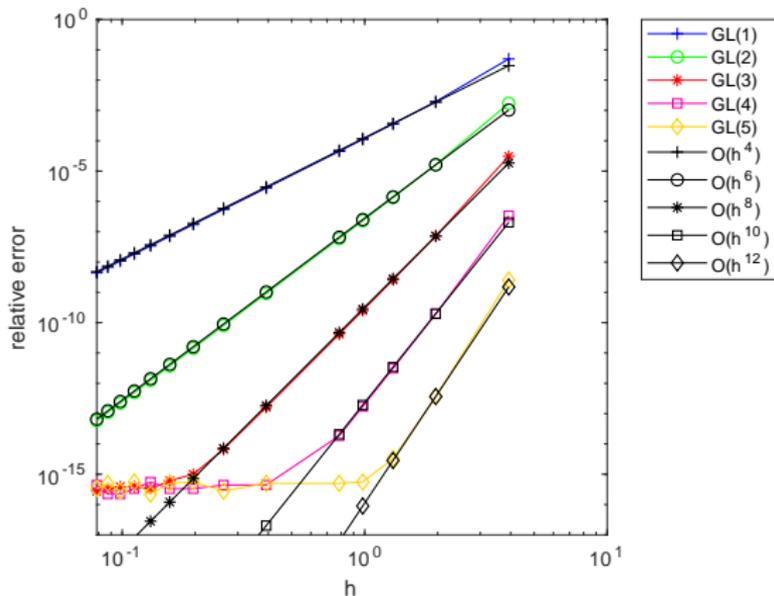


Figure: Erreur des méthodes de Gauss-Legendre composées pour le calcul de

$$\int_0^{5\pi/2} \cos(x) dx, \text{ GL}(n) \text{ correspondant à } Q_{k,n}^{\text{comp}} \text{ et } h = \frac{5\pi}{2k}.$$