Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2021/10/25

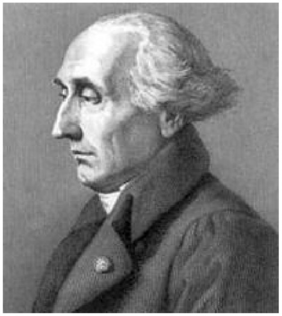
Chapitre V

Interpolation

Plan

1. Interpolation de Lagrange
   - Stabilité
2. Interpolation de Lagrange-Hermite
   - Exercice
   - Résultats

Historique



(a) *Joseph-Louis Lagrange* 1736-1813, mathématicien italien puis français

(b) *Pafnouti Lvovitch Tchebychev* 1821-1894, mathématicien russe

(c) *Charles Hermite* 1822-1901, mathématicien français

(d) *Henri-Léon Lebesgue* 1875-1941, mathématicien français

Exercice 1.1:

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n+1$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q. 1

1. *Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant*

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \ \forall j \in [\![0, n]\!]. \tag{1}$$

2. *Montrer que les $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).*

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x). \tag{2}$$

Q. 2

Montrer que polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $\mathrm{P}_n(x_i) = y_i, \forall i \in [\![1, n]\!]$.

Definition 1.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ avec $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ et les x_i distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, noté P_n, est donné par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \mathrm{L}_i(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

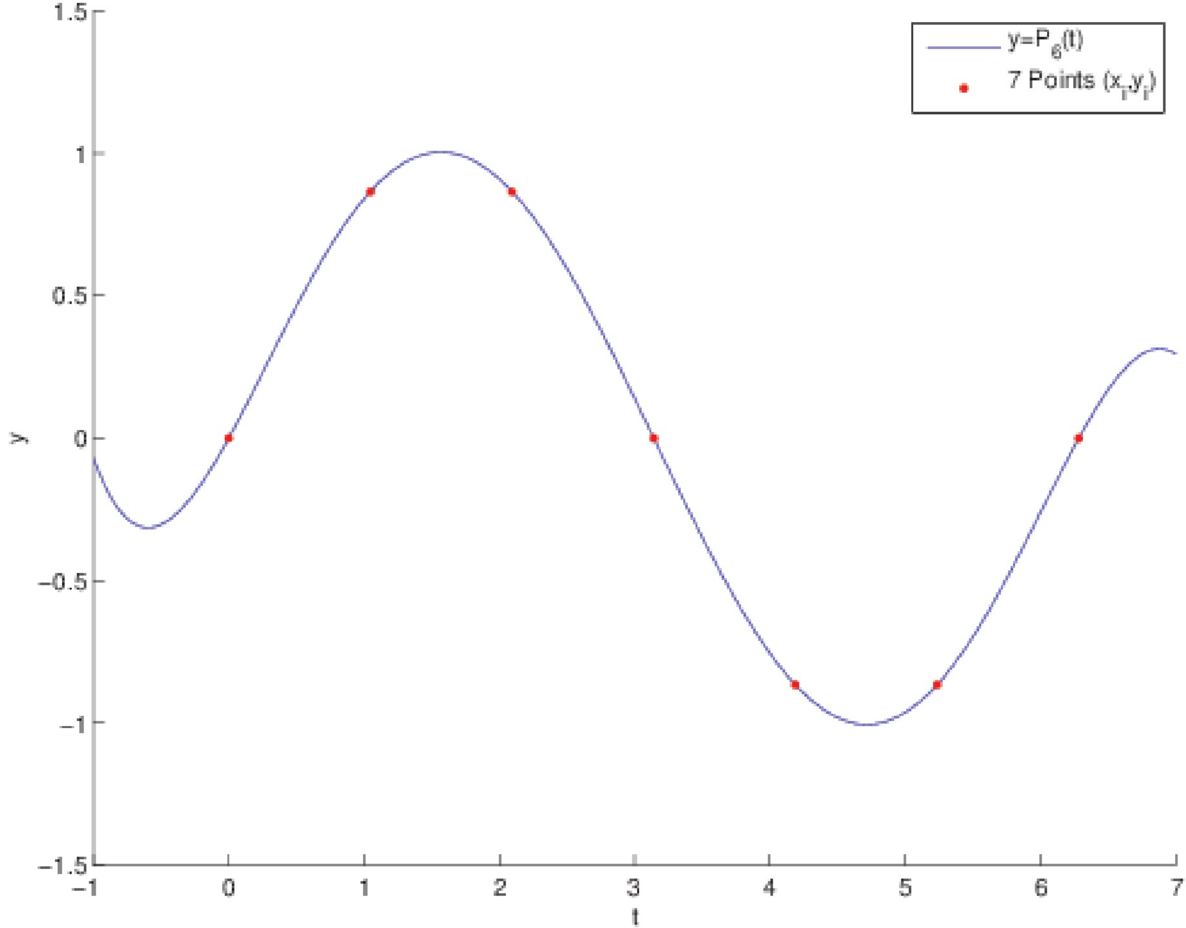
avec

$$\mathrm{L}_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \ \forall i \in [\![0, n]\!], \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Théorème 1.2

Le **polynôme d'interpolation de Lagrange**, $\mathcal{P}_n$, associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, est l'unique polynôme de degré au plus n, vérifiant

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_i, \ \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{5}$$



Polynôme d'interpolation de Lagrange avec 7 points donnés

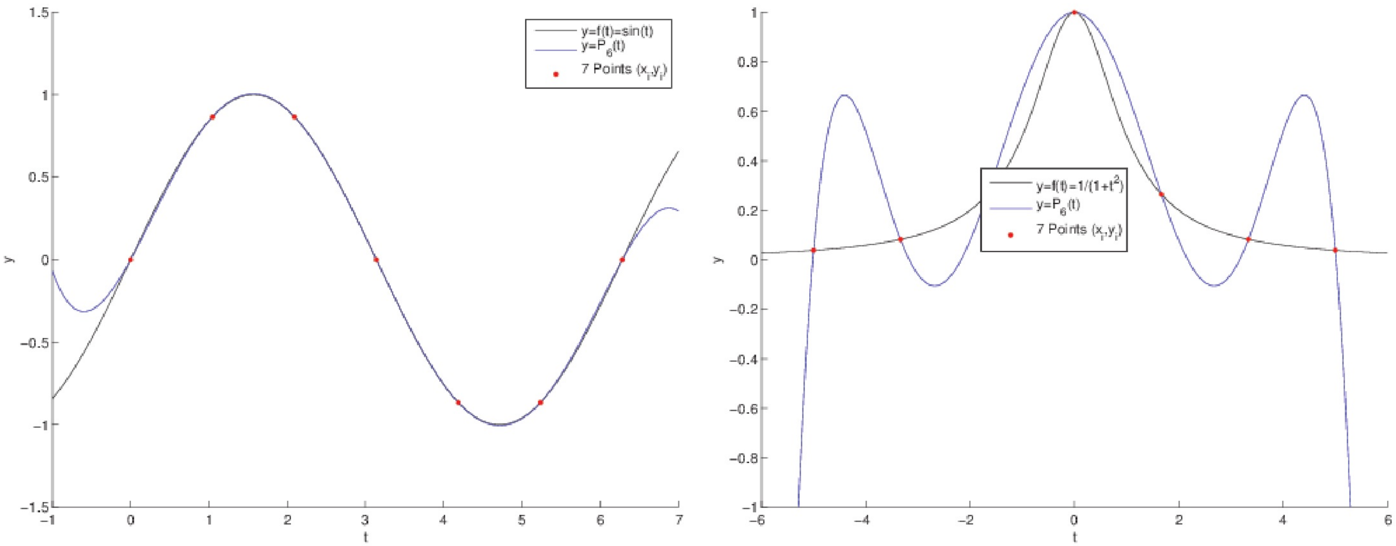
Exercice 1.2:

Ecrire la fonction LAGRANGE permettant de calculer $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$) au point $t \in \mathbb{R}$.

Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{6}$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(t) - \mathcal{P}_n(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

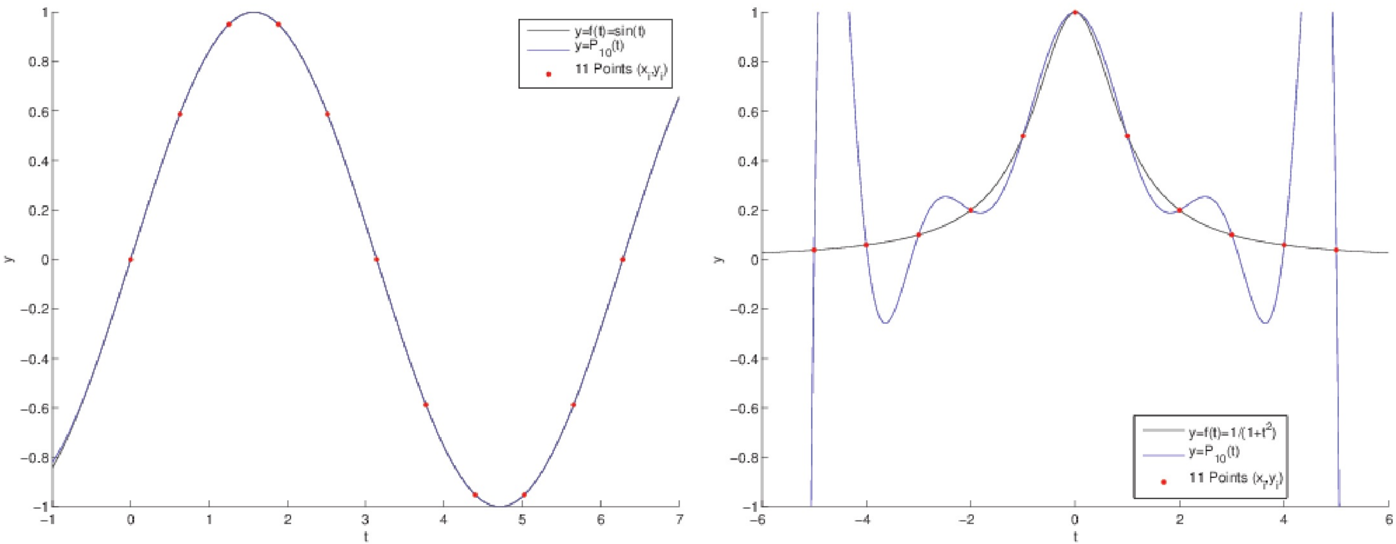


Polynômes d'interpolation de lagrange avec $n = 6$ (7 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction $f : t \longrightarrow sin(t)$ avec $x_0 = 0$, $x_6 = 2\pi$ et à droite pour la fonction $f : t \longrightarrow 1/(1+t^2)$ avec $x_0 = -5$, $x_6 = 5$.

Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{6}$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(t) - \mathcal{P}_n(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

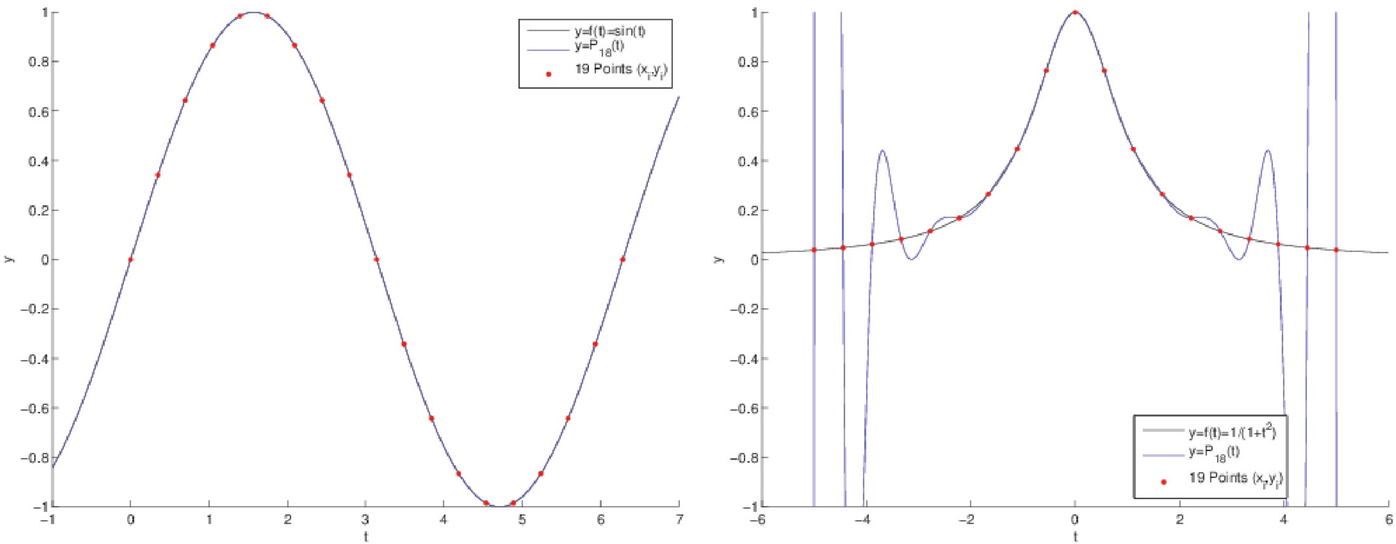


Polynômes d'interpolation de lagrange avec $n = 10$ (11 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction $f : t \longrightarrow sin(t)$ avec $x_0 = 0$, $x_{10} = 2\pi$ et à droite pour la fonction $f : t \longrightarrow 1/(1 + t^2)$ avec $x_0 = -5$, $x_{10} = 5$.

Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{6}$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(t) - \mathcal{P}_n(t)$, $\forall t \in [a, b]$.



Polynômes d'interpolation de lagrange avec $n = 18$ (19 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction $f : t \longrightarrow sin(t)$ avec $x_0 = 0$, $x_{18} = 2\pi$ et à droite pour la fonction $f : t \longrightarrow 1/(1 + t^2)$ avec $x_0 = -5$, $x_{18} = 5$.

exo15

Exercice 1.3:

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n+1$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux et $y_i = f(x_i)$.
On note par P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ et π_n le polynôme de degré $n+1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \tag{7}$$

Q. 1

Montrer que, $\forall x \in [a;b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle fermé contenant $x, x_0, \ldots, x_n$ tel que

$$f(x) - \mathrm{P}_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \tag{8}$$

Indication : *Etudier les zéros de la fonction* $F(t) = f(t) - \mathrm{P}_n(t) - \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t)$.

Théorème 1.3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \cdots, x_n$ $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$ et $\mathcal{P}_n$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n passant par $(x_i, f(x_i))$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$. Alors,
$\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in (min(x_i, x), max(x_i, x))$,

$$f(x) - \mathcal{P}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{9}$$

Comment "minimiser" $f(x) - \mathrm{P}_n(x)$?

Théorème 1.4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \cdots, x_n$ $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$ et $\mathcal{P}_n$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n passant par $(x_i, f(x_i))$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$. Alors,
$\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in (min(x_i, x), max(x_i, x))$,

$$f(x) - \mathcal{P}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{9}$$

Comment "minimiser" $f(x) - \mathrm{P}_n(x)$?

"jouer" sur le choix des points x_i

Trouver $(\bar{x}_i)_{i=0}^n$, $\bar{x}_i \in [a, b]$, distincts deux à deux, tels que
$\forall (x_i)_{i=0}^n$, $x_i \in [a, b]$, distincts 2 à 2

$$\max_{t\in[a,b]} \prod_{i=0}^{n} |t - \bar{x}_i| \leqslant \max_{t\in[a,b]} \prod_{i=0}^{n} |t - x_i|, \tag{10}$$

On a alors le résultat suivant

Théorème 1.5: admis

Les points réalisant (10) sont les points de Chebyshev donnés par

$$\bar{x}_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right), \ \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{11}$$

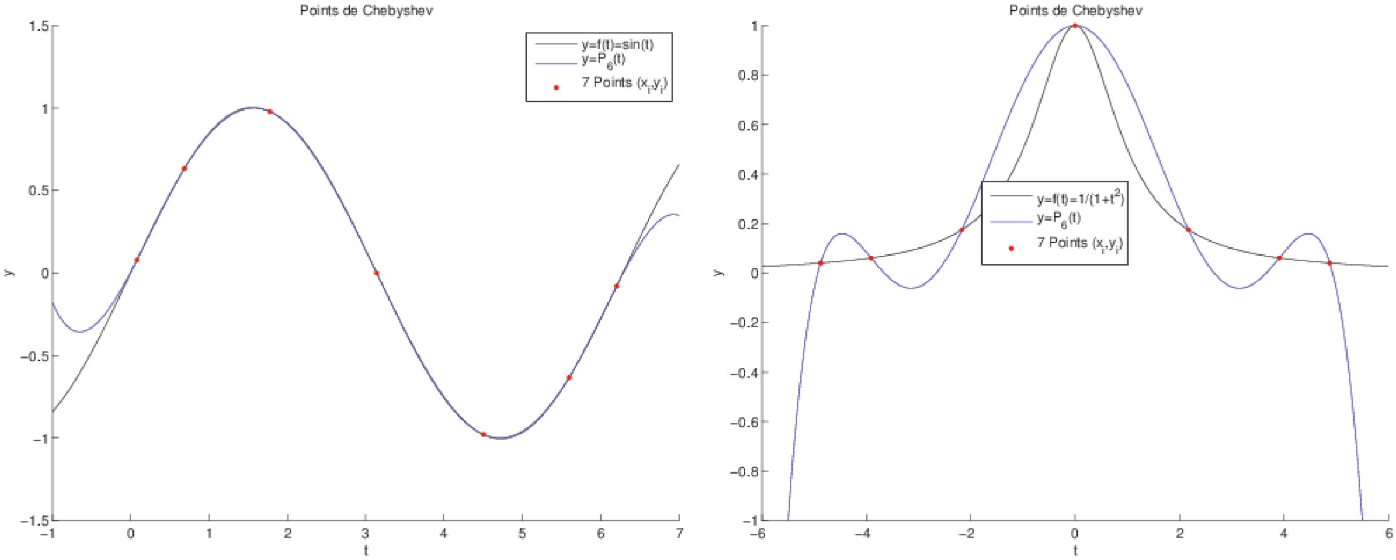


Figure: Erreurs d'interpolation avec $n = 6$

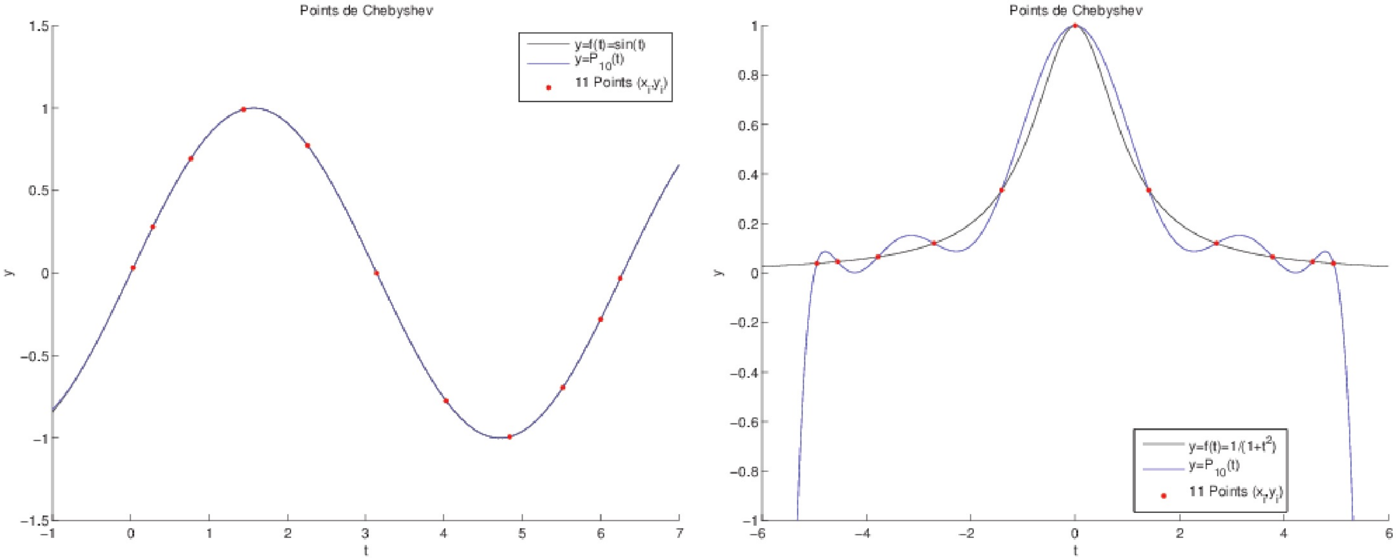


Figure: Erreurs d'interpolation avec $n = 10$

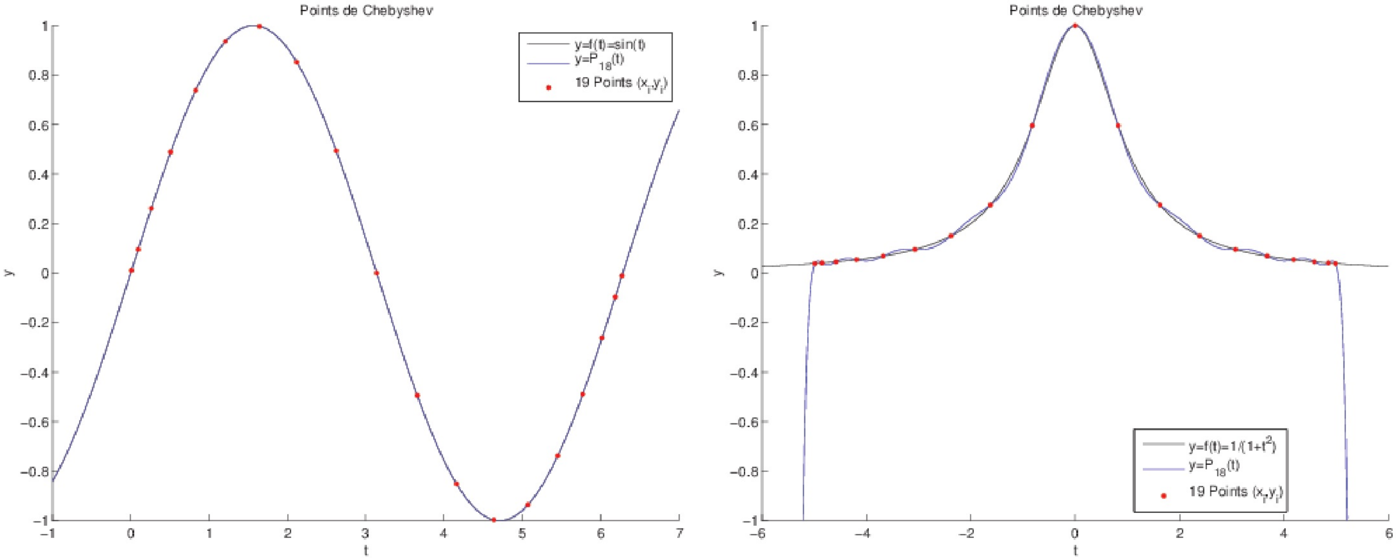


Figure: Erreurs d'interpolation avec $n = 18$

Plan

On commet des erreurs sur les données

$$f_i \approx f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]$$

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathrm{L}_i(x) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathrm{P}}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i\mathrm{L}_i(x)$$

$$\begin{aligned}
|\widehat{\mathrm{P}}_n(x) - \mathrm{P}_n(x)| &= \Big|\sum_{i=0}^{n}(f_i - f(x_i))\mathrm{L}_i(x)\Big| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n} |f_i - f(x_i)||\mathrm{L}_i(x)| \\
&\leqslant \max_{i\in[\![0,n]\!]} |f_i - f(x_i)| \sum_{i=0}^{n} |\mathrm{L}_i(x)|.
\end{aligned}$$

Constante de Lebesgue : $\Lambda_n = \max_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^{n} |\mathrm{L}_i(x)|$.

$$\left\|\widehat{\mathrm{P}}_n - \mathrm{P}_n\right\|_\infty \leqslant \Lambda_n \max_{i\in[\![0,n]\!]} |f_i - f(x_i)|.$$

Proposition:

Soient $n \in N^*$ et $x_0, \cdots, x_n$ des points distincts de $[a, b]$. L'application $\mathcal{L}_n$: $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ qui a toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ donne le polynôme d'interpolation de Lagrange P_n associés aux couples de $(x_i, f(x_i))_{i \in [\![0,n]\!]}$ est bien définie et linéaire. De plus on a

$$\|\mathcal{L}_n\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \Lambda_n. \tag{12}$$

Théorème 1.6:

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, on a

$$\|f - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leqslant (1 + \Lambda_n) \inf_{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - \mathrm{Q}\|_\infty \tag{13}$$

- Pour les **points équidistants** $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$ et $h = (b-a)/n$,

$$\Lambda_n \geqslant \frac{2^n}{4n^2} \tag{14}$$

et le comportement asymptotique

$$\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{e.n\ln(n)} \text{ quand } n \to +\infty \tag{15}$$

- Pour les **points de Tchebychev**,

$$\Lambda_n \leqslant C\ln(n), \quad \text{avec} \quad C > 0 \tag{16}$$

et le comportement asymptotique

$$\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi}\ln(n) \text{ quand } n \to +\infty \tag{17}$$

Proposition: admis

Pour toute famille de points d'interpolation, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ telle que la suite des polynômes d'interpolation associés ne converge pas uniformément.

Proposition: admis

Soit f une fonction lipschitzienne sur $[a,b]$ à valeurs réelles, i.e. il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que $\forall (x,y) \in [a,b]^2$, on ait $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|$. Soient $n \in N^*$ et $x_0, \cdots, x_n$ les points de Tchebychev $[a,b]$. On note $\mathcal{L}_n(f)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associés aux couples de $(x_i, f(x_i))_{i \in [\![0,n]\!]}$.
Alors la suite $(\mathcal{L}_n(f))_{n \geqslant 1}$ des polynômes d'interpolation converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Conclusion

L'interpolation de Lagrange en des points équidistants n'est à utiliser qu'avec un nombre de points assez faible : des phénomènes d'instabilités pouvant apparaître.

Plan

exo17

Exercice 2.1: Interpolation de Lagrange-Hermite

Soient $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ $n+1$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$. Le polynôme d'interpolation de **Lagrange-Hermite**, noté H_n, associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, est défini par

$$\mathrm{H}_n(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad \mathrm{H}'_n(x_i) = z_i, \ \forall i \in [\![0, n]\!] \tag{18}$$

$y_i = f(x_i)$, $z_i = f'(x_i)$

Q. 1

Quel est a priori le degré de H_n?

$2(n+1) = 2n+2$ equations $\Rightarrow$ $d^\circ\ 2n+1$

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x) \tag{19}$$

avec, pour $i \in [\![0, n]\!]$, A_i et B_i polynômes de degré au plus $2n+1$ indépendants des valeurs y_i et z_i.

Q. 2

1. *Déterminer des conditions suffisantes sur A_i et B_i pour que P_n vérifie* (18).
2. *En déduire les expressions de A_i et B_i en fonction de L_i et de $L'_i(x_i)$ où*

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Q. 3

Démontrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite de degré au plus $2n+1$ défini par (18).

$\mathrm{H}_n(x_i) = y_i$ et $\mathrm{H}'_n(x_i) = z_i, \ \forall i \in [\![0, n]\!]$

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x)$$

$P_n(x_i) = y_i \quad P'_n(x_i) = z_i$

soit $j \in [\![0,n]\!]$

- $P_n(x_j) = y_j$
  $= \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x_j) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x_j)$

$$\begin{cases} B_i(x_j) = 0 & \forall i \in [\![0,n]\!] \\ A_i(x_j) = 0 & \forall i \in [\![0,n]\!]\setminus\{j\} \\ \quad = 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

- $P'_n(x_j) = z_j$
  $P'_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i A'_i(x_j) + \sum_{i=0}^{n} z_i B'_i(x_j)$

$$\begin{cases} A'_i(x_j) = 0 & \forall i \in [\![0,n]\!] \\ B'_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

i fixé $i \in [\![0,n]\!]$

- A_i ? $\in \mathbb{R}_{2n+1}[x]$

$A_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$A'_i(x_j) = 0$

$x_j \quad j \in [\![0,n]\!]\setminus\{i\}$

$A_i(x_j) = 0 = A'_i(x_j)$

$A_i(x) = C(x) \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x - x_j)^2 = K(x)\, L_i^2(x)$ $\quad d^\circ\ 2n$

$C \in \mathbb{R}_1[X]$

$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = C \prod_{j=0}^{n} x - x_j \qquad L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

$A_i(x_i) = 1$ et $A'_i(x_i) = 0 \rightarrow A'_i(x) = 2K(x) L_i(x) L'_i(x) + K'(x) L_i^2(x)$

$\Downarrow$

$K(x_i) L_i^2(x_i) = 1 \Rightarrow K(x_i) = 1$

$\Rightarrow 2\underbrace{K(x_i)}_{=1} L'_i(x_i) + K'_i(x_i) = 0$

$K'_i(x_i) = -2 L'_i(x_i)$

$K(x) = ax + b = -2L'_i(x_i)x + b$

$K(x_i) = 1 = -2L'_i(x_i)x_i + b$

$K(x) = 1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i)$

$A_i(x) = \left(1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i)\right) L_i^2(x)$

- $B_i(x_j) = 0 \quad \forall j \in [\![0,n]\!]$

$B'_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

x_i racine simple

et x_j $j \neq i$ racine double

$B_i(x) = D\, (x - x_i) L_i^2(x)$

$B'_i(x_i) = 1 \qquad B'(x) = D\left(L_i^2(x) + (x - x_i)\, 2L'_i(x) L_i(x)\right)$

$1 = D(1 + 0) \Rightarrow D = 1$

Plan

1. Interpolation de Lagrange
   - Stabilité

2. Interpolation de Lagrange-Hermite
   - Exercice
   - Résultats

Definition 2.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ $n+1$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, noté H_n, associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, est défini par

$$\mathrm{H}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x) \tag{20}$$

avec

$$A_i(x) = (1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i))L_i^2(x) \quad \text{et} \quad B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x) \tag{21}$$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Théorème 2.2

Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, H_n, associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, est l'unique polynôme de degré au plus $2n+1$, vérifiant

$$\mathrm{H}_n(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad \mathrm{H}'_n(x_i) = z_i, \ \forall i \in [\![0, n]\!] \tag{22}$$

ex 18

Exercice 2.2: Interpolation de Lagrange-Hermite

Soit $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a,b];\mathbb{R})$. On suppose de plus que, $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $x_i \in [a,b]$, $y_i = f(x_i)$ et $z_i = f'(x_i)$. On note

$$\pi_n^2(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2 \quad = x^{2n+2} + Q(x)$$

et H_n le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i\in[\![0,n]\!]}$.

Q. 1

Montrer que

$$|f(x) - \mathrm{H}_n(x)| \leqslant \frac{\left\|f^{(2n+2)}\right\|_\infty}{(2n+2)!}\pi_n^2(x). \qquad (23)$$

Indications : *Etudier les zéros de la fonction* $F(y) = f(y) - \mathrm{H}_n(y) - \dfrac{f(x)-\mathrm{H}_n(x)}{\pi_n^2(x)}\pi_n^2(y)$ *et appliquer le théorème de Rolle.*

$$F^{(2n+2)}(\zeta) = 0 = f^{(2n+2)}(\zeta) - \frac{f(x)-\mathrm{H}_n(x)}{\pi_n^2(x)}(2n+2)! \qquad \pi_n^2(y) \in \mathbb{R}_{2n+2}[X]$$

$f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a,b];\mathbb{R})$

$\forall i \in [\![0,n]\!]$, $x_i \in [a,b]$, $y_i = f(x_i)$ et $z_i = f'(x_i)$.

$\mathrm{H}_n(x_i) = y_i$ et $\mathrm{H}_n'(x_i) = z_i$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$ $\qquad d^\circ \mathrm{H}_n = 2n+1$

$\pi_n^2(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2 \qquad d^\circ \pi_n^2 = 2(n+1)$

$$F(y) = f(y) - \mathrm{H}_n(y) - \frac{f(x)-\mathrm{H}_n(x)}{\pi_n^2(x)}\pi_n^2(y)$$

Montrer que F' admet au moins $2n+2$ racines distinctes 2 à 2 dans $[a,b]$ en étudiant les racines de F.

x, x_i $i \in [\![0,n]\!]$ racine de F

$n+2$ pts distincts 2 à 2 dans $[a,b]$ $\qquad f(a) = f(b)$

$\exists c \in]a,b[\quad f'(c) = 0$

En appliquant $n+1$ fois Th. Rolle entre 2 pts consécutifs :

$\exists$ $(n+1)$ racines distinctes 2 à 2 de F' et les sont distinctes des $x, x_0, \ldots, x_n$

$F'(y) = f'(y) - \mathrm{H}_n'(y) - \text{———} \; 2\pi_n'(y)\pi_n(y)$

$y = x_i \qquad f'(x_i) - \mathrm{H}_n'(x_i) \qquad \pi_n(x_i) = 0$

$f'(x_i) = z_i$, $\mathrm{H}_n'(x_i) = z_i$

$\Rightarrow F'(x_i) = 0 \quad \forall i \in [\![0,n]\!]$

$\Rightarrow 2n+2$ racines distinctes 2 à 2 $\quad F'$

$F \in \mathcal{C}^{2n+2}([a,b];\mathbb{R})$

$\Rightarrow 2n+1$ ——— 2 à 2 $\quad F^{(2)}$

$\Rightarrow 1$ . . $\quad F^{(2n+2)}$

$\exists \zeta \in [a,b]$ tq $F^{(2n+2)}(\zeta) = 0$

Théorème 2.3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \cdots, x_n$, $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a; b]; \mathbb{R})$ et H_n le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n+1$ triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i \in [\![0,n]\!]}$. On a alors $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$, tels que

$$f(x) - \mathrm{H}_n(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2 \tag{24}$$

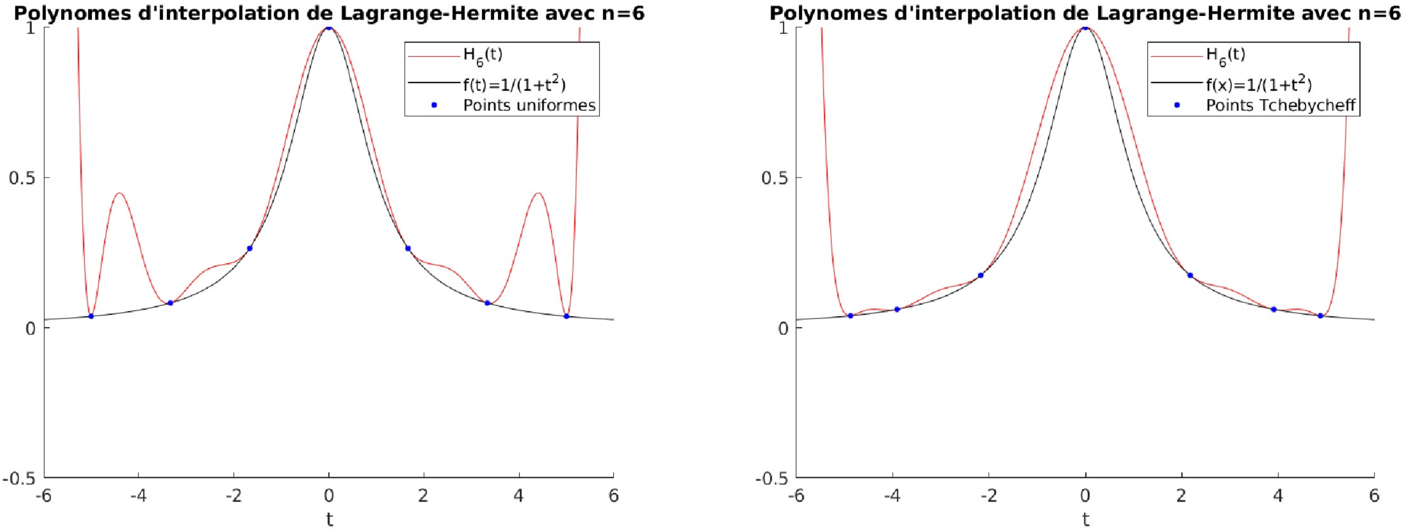


Figure: Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec $n = 6$ (7 points) pour la fonction $f : x \longrightarrow 1/(1 + 25x^2)$. A gauche avec des points uniforméments répartis et à droite avec des points de Tchebychev

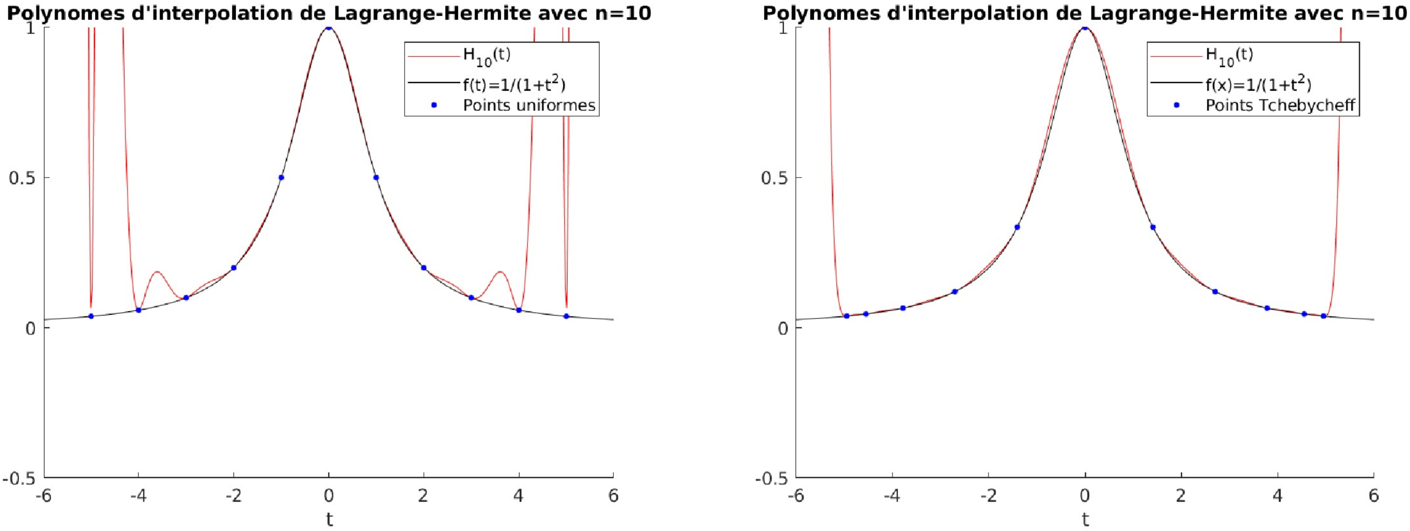
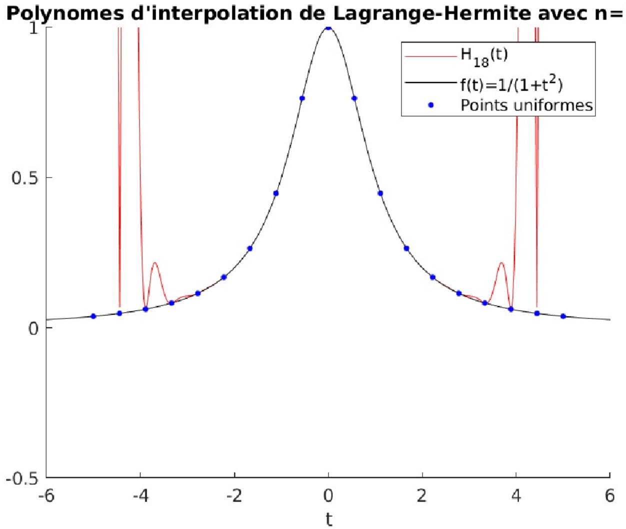


Figure: Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec $n = 10$ (11 points) pour la fonction $f : x \longrightarrow 1/(1 + 25x^2)$. A gauche avec des points uniformément répartis et à droite avec des points de Tchebychev



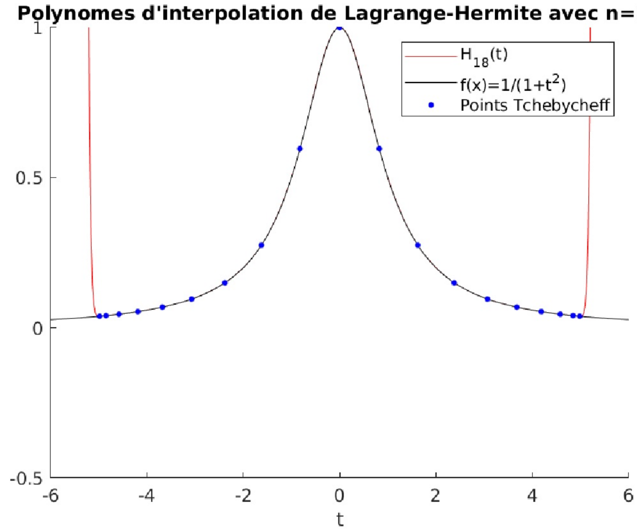


Figure: Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec $n = 18$ (19 points) pour la fonction $f : x \longrightarrow 1/(1 + 25x^2)$. A gauche avec des points uniforméments répartis et à droite avec des points de Tchebychev

$$\mathrm{H}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(t) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(t) = \sum_{i=0}^{n} (y_i A_i(t) + z_i B_i(t))$$

$H_n(x_i) = y_i$

$H_n'(x_i) = z_i$

$$A_i(t) = (1 - 2L_i'(x_i)(t - x_i))L_i^2(t) \quad \text{et} \quad B_i(t) = (t - x_i)L_i^2(t)$$

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t - x_j}{x_i - x_j}.$$

But : calculer $H_n(t)$ Retour : $S \in \mathbb{R}$ $S = H_n(t)$

Données : $t \in \mathbb{R}$

$X \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $X(i+1) = x_i$ $\forall i \in [\![0,n]\!]$

$Y \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $Y(i+1) = y_i$ $\forall i \in [\![0,n]\!]$

$Z \in \mathbb{R}^{n+1}$ — $Z(i+1) = z_i$ "

```
Function S ← LagrangeHermite(t, X, Y, Z)
  S ← 0
  pour i ← 0 : n
    S ← S + polyA(i, t, X)*Y(i+1) + polyB(i, t, X)*Z(i+1)
  fin
fin
```

```
Function Z ← polyB(i, t, X)
  Z ← (t - X(i+1))*polyL(i, t, X)^2
fin
```

$B_i(t) = (t - x_i) L_i^2(t)$

$" \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t - x_j}{x_i - x_j}$

```
function Z ← polyL(i, t, X)
  Z ← 1
  pour j = 0:n, j ≠ i  (ie j = [0 : i-1, i+1 : n])
    Z ← Z * (t - X(j+1)) / (X(i+1) - X(j+1))
  fin
fin
```

exo 16

Exercice 2.3: Interpolation de Lagrange-Hermite

Ecrire une fonction algorithmique HERMITE permettant de calculer H_n (polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$) en $t \in \mathbb{R}$.

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \overbrace{\boxed{\frac{t - x_j}{x_i - x_j}}}^{f_j}$$

Calculer $L_i'(t)$ et en déduire $L_i'(x_i)$

$$(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$$

$$(f_1 f_2 f_3)' = f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3'$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} \left(f_i' \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}} f_k\right) \quad (\Rightarrow \text{dem par récu})$$

raison

$j \in [\![1,n]\!]$ i

$$\left(\prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} f_j\right)' = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} f_j' \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^{n} f_k \Rightarrow L_i'(t) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j \\ k \neq i}}^{n} \frac{t - x_k}{x_i - x_k}$$

$$\boxed{L_i'(x_i) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}}$$

$z = \mathrm{polyLpC}(i, X)$