Exercice

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n+1$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux et $y_i = f(x_i)$.
On note par P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ et π_n le polynôme de degré $n+1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \tag{P-1}$$

Q. 1 *Montrer que, $\forall x \in [a;b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle fermé contenant $x, x_0, \dots, x_n$ tel que*

$$f(x) - \mathrm{P}_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \tag{P-2}$$

Indication : *Etudier les zéros de la fonction $F(t) = f(t) - \mathrm{P}_n(t) - \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t)$.*

Correction Exercice

Q. 1 S'il existe $i \in [\![0,n]\!]$ tel que $x = x_i$ alors l'équation (P-2) est immédiatement vérifiée.
Soit $x \in [a,b]$ distinct de tous les x_i. Comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$, $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on en déduit que la fonction F est dans $\mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$. La fonction F admet aussi $n+2$ zéros : $x, x_0, \cdots, x_n$. On note $\xi_{x,1}^{[0]}, \cdots, \xi_{x,n+2}^{[0]}$ ces $n+2$ zéros ordonnés $\xi_{x,1}^{[0]} < \cdots < \xi_{x,n+2}^{[0]}$. La fonction F étant continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, le théorème de Rolle dit qu'entre deux zéros consécutifs de F, il existe au moins un zéro de $F' = F^{(1)}$. Plus précisemment on a

$$\forall i \in [\![1, n+1]\!], \quad \exists \xi_{x,i}^{[1]} \in]\xi_{x,i}^{[0]}, \xi_{x,i+1}^{[0]}[\ \text{ tels que } \ F^{(1)}(\xi_{x,i}^{[1]}) = 0$$

et on en déduit que la fonction $F^{(1)}$ admet $n+1$ zéros $\xi_{x,1}^{[1]}, \cdots, \xi_{x,n+1}^{[1]}$ et l'on a $\xi_{x,1}^{[0]} < \xi_{x,1}^{[1]} < \cdots < \xi_{x,n+1}^{[1]} < \xi_{x,n+2}^{[0]}$. Il faut noter la dépendance en x des zéros de F' d'où la notation un peu "lourde".

Montrons par récurrence finie que $(\mathcal{P}_k)$ est vraie pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$

$$(\mathcal{P}_k) \ : \ \exists \xi_{x,i}^{[k]}, \ i \in [\![1, n+2-k]\!], \ \xi_{x,1}^{[0]} < \xi_{x,1}^{[k]} < \cdots < \xi_{x,n+2-k}^{[k]} < \xi_{x,n+2}^{[0]} \ \text{ tels que } \ F^{(k)}(\xi_{x,i}^{[k]}) = 0$$

Initialisation : Pour $k = 1$, la preuve a déjà été faites.

Hérédité : Soit $1 < k-1 < n+1$, on suppose $(\mathcal{P}_{k-1})$ vérifiée. La fonction $F^{(k-1)}$ étant continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, le théorème de Rolle dit qu'entre deux zéros consécutifs de $F^{(k-1)}$, il existe au moins un zéro de $F^{(k)}$. Par hypothèse $F^{(k-1)}$ admet $n + 2 - (k - 1)$ zéros vérifiant

$$\xi_{x,1}^{[0]} < \xi_{x,1}^{[k-1]} < \cdots < \xi_{x,n+2-(k-1)}^{[k-1]} < \xi_{x,n+2}^{[0]}$$

La fonction $F^{(k-1)}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ puisque $F \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$. Par application du théorème de Rolle, entre deux zéros de $F^{(k-1)}$, il existe au moins un zéro de $F^{(k)}$. Plus précisemment pour tout $i \in [\![1, n + 2 - k]\!]$ on a

$$\exists \xi_{x,i}^{[k]} \in]\xi_{x,i}^{[k-1]}, \xi_{x,i+1}^{[k-1]}[, \quad F^{(k)}(\xi_{x,i}^{[k]}) = 0$$

De plus, par construction, $\xi_{x,1}^{[0]} < \xi_{x,1}^{[k]} < \cdots < \xi_{x,n+2-k}^{[k]} < \xi_{x,n+2}^{[0]}$. et donc $(\mathcal{P}_k)$ est vraie.

Avec $k = n + 1$ on obtient

$$(\mathcal{P}_{n+1}) \ : \ \exists \xi_{x,1}^{[n+1]} \in]\xi_{x,1}^{[0]}, \xi_{x,n+2}^{[0]}[\ \text{ tel que } \ F^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) = 0$$

et donc

$$0 = F^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) = f^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) - \mathrm{P}_n^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) - \frac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]})$$

Comme $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\mathrm{P}_n^{(n+1)} = 0$. De plus $\pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, et comme $\pi_n(x) = x^{n+1} + Q(x)$ avec $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ (i.e. son monône de puissance $n + 1$ à pour coefficient 1) on obtient $\pi_n^{(n+1)}(x) = (n + 1)!$ On a alors

$$f^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) = \frac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)} (n + 1)!$$

$\diamond$