Exercice

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n+1$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q. 1 *1. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant*

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \ \forall j \in [\![0,n]\!]. \tag{P-1}$$

2. Montrer que les $(L_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x). \tag{P-2}$$

Q. 2 *Montrer que polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $\mathrm{P}_n(x_i) = y_i$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$.*

Correction Exercice

Q. 1 1. De (P-1), on déduit que les n points distincts x_j pour $j \in [\![0,n]\!]\backslash\{i\}$ sont les n zéros du polynôme L_i de degré n : il s'écrit donc sous la forme

$$L_i(x) = C \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x - x_j) \ \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer la constante C, on utilise (P-1) avec $j = i$

$$L_i(x_i) = 1 = C \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)$$

Les points x_i sont distincts deux à deux, on a $\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x_i - x_j) \neq 0$ et donc

$$C = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)}$$

d'où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{P-3}$$

Il reste à démontrer l'unicité. On suppose qu'il existe L_i et U_i deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant (P-1). Alors $Q_i = L_i - U_i$ est polynôme de degré n (au plus) admettant $n+1$ zéros distincts, c'est donc le polynôme nul et on a nécessairement $L_i = U_i$.

2. On sait que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$. Pour que les $\{L_i\}_{i\in[\![0,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ il suffit de démontrer qu'ils sont linéairement indépendants.
   Soit $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ $n+1$ scalaires. Montrons pour celà que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0 \implies \lambda_i = 0,\ \forall i \in [\![0, n]\!]$$

   Noter que la première égalité est dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ et donc le 0 est pris au sens polynôme nul.
   On a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

   Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En choisissant $x = x_k$, on a par (P-1) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(x_k) = \lambda_k$ et donc

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0 \implies \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(x_k) = 0,\ \forall k \in [\![0, n]\!] \iff \lambda_k = 0,\ \forall k \in [\![0, n]\!].$$

   Les $\{L_i\}_{i\in[\![0,n]\!]}$ sont donc linéairement indépendants.

Q. 2 Par construction $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et on a, $\forall j \in [\![0, n]\!]$[1],

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_n(x_j) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n} y_i \delta_{i,j} \text{ par (P-1)} \\
&= y_j.
\end{aligned}$$

Pour demontrer l'unicité, on propose ici deux méthodes

- On note P_a et P_b deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant (P-1). Le polynôme $\mathrm{Q} = \mathrm{P}_a - \mathrm{P}_b$ appartient aussi à $\mathbb{R}_n[X]$ et il vérifie, $\forall i \in [\![0, n]\!]$,

  $$\mathrm{Q}(x_i) = \mathrm{P}_a(x_i) - \mathrm{P}_b(x_i) = 0.$$

  Les $n+1$ points x_i étant distincts, ce sont donc $n+1$ racines distinctes du polynôme Q. Or tout polynôme de degré n admet au plus n racines disctinctes[2]. On en déduit que le seul polynôme de degré au plus n admettant $n+1$ racines distinctes est le polynôme nulle et donc $\mathrm{P}_a = \mathrm{P}_b$.

- c'est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant (P-2) car la décomposition dans la base $\{L_i\}_{i \in [\![0,n]\!]}$ est unique.

$\diamond$

[1] A noter le choix de l'indice j. Que doit-on faire dans ce qui suit si l'on choisi i comme indice?

[2] Le théorème de d'Alembert-Gauss affirme que tout polynôme à coefficients complexes de degré n admet n racines complexes qui ne sont pas nécessairement distinctes