

Exercice

Ecrire une fonction algorithmique **HERMITE** permettant de calculer H_n (polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n + 1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$) en $t \in \mathbb{R}$.

Correction Exercice

But : Calculer le polynôme $H_n(t)$ défini par (4.26)

Données : \mathbf{X} : vecteur/tableau de \mathbb{R}^{n+1} , $X(i) = x_{i-1} \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et $X(i) \neq X(j)$ pour $i \neq j$,

\mathbf{Y} : vecteur/tableau de \mathbb{R}^{n+1} , $Y(i) = y_{i-1} \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$,

\mathbf{Z} : vecteur/tableau de \mathbb{R}^{n+1} , $Z(i) = z_{i-1} \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$,

t : un réel.

Résultat : pH : le réel $\text{pH} = H_n(t)$.

D'après la Définition 4.10, on a

$$H_n(t) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(t) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(t) = \sum_{i=0}^n (y_i A_i(t) + z_i B_i(t))$$

avec

$$A_i(t) = (1 - 2L'_i(x_i)(t - x_i))L_i^2(t) \quad \text{et} \quad B_i(t) = (t - x_i)L_i^2(t)$$

où

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - x_j}{x_i - x_j}.$$

Pour rendre effectif le calcul de $H_n(t)$, il reste à déterminer $L'_i(x_i)$. On a

$$L'_i(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i \\ j \neq k}}^n \frac{t - x_j}{x_i - x_j}$$

d'où

$$L'_i(x_i) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k}. \quad (\text{P-1})$$

La fonction que l'on va écrire use (et certains diront abuse) de fonctions.

Algorithme 1 Fonction **HERMITE** permettant de calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite $H_n(t)$ défini par (4.26)

```
1: Fonction pH ← HERMITE ( X, Y, Z, t )
2:   pH ← 0
3:   Pour i ← 0 à n faire
4:     pH ← pH + POLYA(i, X, t) * Y(i + 1) + POLYB(i, X, t) * Z(i + 1)
5:   Fin Pour
6: Fin Fonction
```

Les différentes fonctions utilisées pour la fonction **HERMITE** (directement ou indirectement) sont les suivantes :

POLYA : calcul du polynôme A_i en t , (données i, X, t)

POLYB : calcul du polynôme B_i en t , (données i, X, t)

POLYL : calcul du polynôme L_i en t , (données i, X, t)

POLYLP : calcul de $L'_i(x_i)$, (données i, X)

Algorithme 2 Fonction **POLYA** permettant de calculer le polynôme A_i en $t \in \mathbb{R}$ donné par $A_i(t) = (1 - 2L'_i(x_i)(t - x_i))L_i^2(t)$

```
1: Fonction y ← POLYA ( i, X, t )
2:   y ← (1 - 2 * POLYLP(i, X) * (t - X(i + 1))) * (POLYL(i, X, t))2
3: Fin Fonction
```

Algorithme 3 Fonction **POLYB** permettant de calculer le polynôme B_i en $t \in \mathbb{R}$ donné par $B_i(t) = (t - x_i)L_i^2(t)$

```
1: Fonction y ← POLYB ( i, X, t )
2:   y ← (t - X(i + 1)) * (POLYL(i, X, t))2
3: Fin Fonction
```

Algorithme 4 Fonction **POLYL** permettant de calculer le polynôme L_i en $t \in \mathbb{R}$

donné par
$$L_i(t) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{t - x_j}{x_i - x_j}$$

1: **Fonction** $y \leftarrow$ **POLYL** (i, \mathbf{X}, t)
2: $y \leftarrow 1$
3: **Pour** $j \leftarrow 0$ à n , ($j \sim = i$) **faire**
4: $y \leftarrow y * (t - X(j + 1)) / (X(i + 1) - X(j + 1))$
5: **Fin Pour**
6: **Fin Fonction**

Algorithme 5 Fonction **POLYLP** permettant de calculer $L'_i(x_i) = \sum_{k=0, k \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_k}$

1: **Fonction** $y \leftarrow$ **POLYLP** (i, \mathbf{X})
2: $y \leftarrow 0$
3: **Pour** $k \leftarrow 0$ à n , ($k \sim = i$) **faire**
4: $y \leftarrow y + 1 / (X(i + 1) - X(k + 1))$
5: **Fin Pour**
6: **Fin Fonction**

Bien évidemment une telle écriture est loin d'être optimale mais elle a l'avantage d'être facile à programmer et facile à lire car elle "colle" aux formules mathématiques.

On laisse le soin au lecteur d'écrire des fonctions plus performantes...

◇

