Exercice

Soit $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a,b];\mathbb{R})$. On suppose de plus que, $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $x_i \in [a,b]$, $y_i = f(x_i)$ et $z_i = f'(x_i)$.
On note

$$\pi_n^2(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)^2$$

et H_n le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i\in[\![0,n]\!]}$.

Q. 1 *Montrer que*

$$|f(x) - \mathrm{H}_n(x)| \leqslant \frac{\left\|f^{(2n+2)}\right\|_\infty}{(2n+2)!}\pi_n^2(x). \tag{P-1}$$

Indications : *Etudier les zéros de la fonction* $F(y) = f(y) - \mathrm{H}_n(y) - \dfrac{f(x) - \mathrm{H}_n(x)}{\pi_n^2(x)}\pi_n^2(y)$ *et appliquer le théorème de Rolle.*

Correction Exercice

Q. 1 Soit $i \in [\![1,n]\!]$, on a $f(x_i) - \mathrm{H}_n(x_i) = 0$ et l'inégalité (P-1) est donc vérifiée pour $x = x_i$.
Soit $x \in [a,b]$ tel que $x \neq x_i$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$. On a alors $\pi_n^2(x) \neq 0$. Comme $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a;b];\mathbb{R})$, $\mathrm{H}_n \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ et $\pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on en déduit que

$$F \in \mathcal{C}^{2n+2}([a;b];\mathbb{R}).$$

On note que π_n^2 admet $(x_0, \cdots, x_n)$ comme racines doubles distinctes. Par construction $f - \mathrm{H}_n$ admet les mêmes racines doubles. On en déduit alors que F admet aussi $(x_0, \cdots, x_n)$ comme racines doubles. De plus, on a $F(x) = 0$ (i.e. x est racine simple) et donc

$$F \text{ admet au moins } 2n+3 \text{ racines (comptées avec leurs multiplicités).}$$

Les points $x, x_0, \cdots, x_n$ étant distincts, la fonction F' admet par le théorème de Rolle $n+1$ zeros distincts entre eux et distincts des points $x, x_0, \cdots, x_n$. De plus les points $x_0, \cdots, x_n$ sont racines de F' puisque racines doubles de F. On en déduit alors que

$$F' \text{ admet au moins } 2n+2 \text{ racines distinctes deux à deux.}$$

Par applications successives du théorème de Rolle, on abouti a :

$$F^{(2n+2)} \text{ admet au moins une racine notée } \xi_x \in]a, b[.$$

On a alors

$$F^{(2n+2)}(\xi_x) = 0 = f^{(2n+2)}(\xi_x) - \mathrm{H}_n^{(2n+2)}(\xi_x) - \frac{f(x) - \mathrm{H}_n(x)}{\pi_n^2(x)} \frac{d^{2n+2}\pi_n^2}{dx^{2n+2}}(\xi_x)$$

Comme $\mathrm{H}_n \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ on a $\mathrm{H}_n^{(2n+2)} \equiv 0$. De plus comme $\pi_n^2(x) = \displaystyle\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)^2 \in \mathbb{R}_{2n+2}[X]$ sa dérivée d'ordre $2n+2$ est constante et

$$\frac{d^{2n+2}\pi_n^2}{dx^{2n+2}} = (2n+2)!$$

On en déduit alors

$$f^{(2n+2)}(\xi_x) = \frac{f(x) - \mathrm{H}_n(x)}{\pi_n^2(x)}(2n+2)!$$

On a donc montrer que $\forall x \in [a, b]\ \exists \xi_x \in]a, b[$ tels que

$$f(x) - \mathrm{H}_n(x) = \frac{\pi_n^2(x)}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi_x).$$

Comme $\pi_n^2(x) \geqslant 0$ on obtient bien (P-1).

$\diamond$