Exercice

Ecrire la fonction LAGRANGE permettant de calculer $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$) au point $t \in \mathbb{R}$.

Correction Exercice

But : Calculer le polynôme $\mathcal{P}_n(t)$ définit par (4.4)

Données : $\boldsymbol{X}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $X(i) = x_{i-1}$ $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$ et $X(i) \neq X(j)$ pour $i \neq j$,
$\boldsymbol{Y}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $Y(i) = y_{i-1}$ $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$,
t : un réel.

Résultat : y : le réel $y = \mathcal{P}_n(t)$.

Algorithme 1 $\mathcal{R}_0$

```
Calcul de y = P_n(t) = sum_{i=1}^{n+1} Y(i) L_{i-1}(t)
```

$$\boxed{\text{Calcul de } y = \mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=1}^{n+1} Y(i) L_{i-1}(t)}$$

Algorithme 1 $\mathcal{R}_1$

$y \leftarrow 0$
Pour $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
  $y \leftarrow y + Y(i) * L_{i-1}(t)$
Fin Pour

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

$y \leftarrow 0$
Pour $i \leftarrow 1$ $n+1$ **faire**
  $\boxed{y \leftarrow y + Y(i) * L_{i-1}(t)}$
Fin Pour

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

$y \leftarrow 0$
Pour $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**

$$\left\{\begin{array}{l} L \leftarrow \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{t - X(j)}{X(i) - X(j)} \\ y \leftarrow y + Y(i) * L \end{array}\right.$$

Fin Pour

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

$y \leftarrow 0$
Pour $i \leftarrow 1$ $n+1$ **faire**

$$\boxed{L \leftarrow \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{t - X(j)}{X(i) - X(j)}}$$

  $y \leftarrow y + Y(i) * L$
Fin Pour

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_3}$

$y \leftarrow 0$
Pour $i \leftarrow 1$ $n+1$ **faire**

$$\left\{\begin{array}{l} L \leftarrow 1 \\ \textbf{Pour } j \leftarrow 1 \textbf{ à } n+1,\ (j \sim= i) \textbf{ faire} \\ \quad L \leftarrow L * (t - X(j))/(X(i) - X(j)) \\ \textbf{Fin Pour} \end{array}\right.$$

  $y \leftarrow y + Y(i) * L$
Fin Pour

On obtient alors l'algorithme final

Algorithme 1 Fonction LAGRANGE permettant de calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{P}_n(x)$ définit par (4.4)

Données : $\boldsymbol{X}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $X(i) = x_{i-1}$ $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$ et $X(i) \neq X(j)$ pour $i \neq j$,
$\boldsymbol{Y}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $Y(i) = y_{i-1}$ $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$,
t : un réel.

Résultat : y : le réel $y = \mathcal{P}_n(t)$.

Fonction $y \leftarrow$ LAGRANGE (t, X, Y)
    $y \leftarrow 0$
    Pour $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
        $L \leftarrow 1$
        Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n+1$, $(j \sim= i)$ **faire**
            $L \leftarrow L * (t - X(j))/(X(i) - X(j))$
        Fin Pour
        $y \leftarrow y + Y(i) * L$
    Fin Pour
    return y
Fin Fonction

$\diamond$