Corollaire

Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$ avec $a_1 \neq 0$ et $\exists j \in [\![2, n]\!]$ tel que $a_j \neq 0$. Soient $\theta = \arg a_1$ et

$$\boldsymbol{u}_{\pm} = \frac{\boldsymbol{a} \pm \|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath\theta} \boldsymbol{e}_1}{\left\|\boldsymbol{a} \pm \|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath\theta} \boldsymbol{e}_1\right\|}$$

Alors

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_{\pm})\boldsymbol{a} = \mp \|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath\theta} \boldsymbol{e}_1 \tag{P-1}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ désigne le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Proof. On va utiliser le Théorème 3.20.

On pose $\alpha = \pm \|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath\theta}$ et $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1$. Comme $\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) = \arg \overline{a_1} = -\arg a_1 = -\theta$, on a $\arg \alpha = \theta \; [\pi] = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) \; [\pi]$.

Les autres hypothèses du Théorème 3.20 sont vérifiées puisque le vecteur $\boldsymbol{a}$ n'est pas colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$ et que $\|\boldsymbol{e}_1\|_2 = 1$. On a donc

$$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} \pm \|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath\theta} \boldsymbol{e}_1}{\left\|\boldsymbol{a} \pm \|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath\theta} \boldsymbol{e}_1\right\|}\right)\boldsymbol{a} = \mp \|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath\theta} \boldsymbol{e}_1.$$

$\square$