

### Exercice: Méthode de Gauss, écriture algébrique

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  inversible.

**Q. 1** Montrer qu'il existe une matrice  $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $|\det(G)| = 1$  et  $GA\mathbf{e}_1 = \alpha\mathbf{e}_1$  avec  $\alpha \neq 0$  et  $\mathbf{e}_1$  premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ .

**Q. 2** 1. Montrer par récurrence sur l'ordre des matrices que pour toute matrice  $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  inversible, il existe une matrice  $S_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $|\det S_n| = 1$  et  $S_n A_n = U_n$  avec  $U_n$  matrice triangulaire supérieure inversible.

2. Soit  $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ . En supposant connue la décomposition précédente  $S_n A_n = U_n$ , expliquer comment résoudre le système  $A_n \mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

**Q. 3** Que peut-on dire si  $A$  est non inversible?

### Correction Exercice 3.1.3

**Q. 1** D'après le Lemme 3.3, si  $A_{1,1} \neq 0$  le résultat est immédiat. Dans l'énoncé rien ne vient corroborer cette hypothèse. Toutefois, comme la matrice  $A$  est inversible, il existe au moins un  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $A_{p,1} \neq 0$ . On peut même choisir le premier indice  $p$  tel que  $|A_{p,1}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |A_{i,1}| > 0$  (pivot de l'algorithme de Gauss-Jordan). On note  $P = P_n^{[1,p]}$  la matrice de permutation des lignes 1 et  $p$  (voir exercice 3.1.4, page 67). De plus on a

$$|\det P| = 1 \quad \text{et} \quad P^{-1} = P.$$

Par construction  $(PA)_{1,1} = A_{p,1} \neq 0$ , et on peut alors appliquer le Lemme 3.3 à la matrice  $(PA)$  pour obtenir l'existence d'une matrice  $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifiant  $\det E = 1$  et telle que

$$E(PA)\mathbf{e}_1 = A_{p,1}\mathbf{e}_1.$$

En posant  $G = EP$  et  $\alpha = A_{p,1}$ , on obtient bien  $GA\mathbf{e}_1 = \alpha\mathbf{e}_1$ . De plus, on a

$$|\det G| = |\det(EP)| = |\det E \times \det P| = 1.$$

**Remarque 0.1** La matrice  $\mathbb{G}$  étant inversible, on a

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbb{G}\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbb{G}\mathbf{b}$$

ce qui correspond à la première *permutation/élimination* de l'algorithme de Gauss-Jordan.

**Q. 2** 1. On veut démontrer par récurrence la propriété  $(\mathcal{P}_n)$ ,

$$(\mathcal{P}_n) \quad \begin{cases} \forall \mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \text{ inversible } \exists \mathbb{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), |\det \mathbb{S}_n| = 1, \text{ tel que} \\ \text{la matrice } \mathbb{U}_n = \mathbb{S}_n \mathbb{A} \text{ soit une triangulaire supérieure inversible} \end{cases}$$

**Initialisation :** Pour  $n = 2$ . Soit  $\mathbb{A}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  inversible. En utilisant la question précédente il existe  $\mathbb{G}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  telle que  $|\det \mathbb{G}_2| = 1$  et  $\mathbb{G}_2 \mathbb{A}_2 \mathbf{e}_1 = \alpha \mathbf{e}_1$  avec  $\alpha \neq 0$  et  $\mathbf{e}_1$  premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{C}^2$ . On note  $\mathbb{U}_2 = \mathbb{G}_2 \mathbb{A}_2$ . Cette matrice s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{U}_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \bullet \\ 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

et elle est triangulaire supérieure. Les matrices  $\mathbb{G}_2$  et  $\mathbb{A}_2$  étant inversibles, leur produit  $\mathbb{U}_2$  l'est aussi. La proposition  $(\mathcal{P}_2)$  est donc vérifiée avec  $\mathbb{S}_2 = \mathbb{G}_2$ .

**Hérédité :** Soit  $n \geq 3$ . On suppose que  $(\mathcal{P}_{n-1})$  est vraie. Montrons que  $(\mathcal{P}_n)$  est vérifiée.

Soit  $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  inversible. En utilisant la question précédente il existe  $\mathbb{G}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $|\det \mathbb{G}_n| = 1$  et  $\mathbb{G}_n \mathbb{A}_n \mathbf{e}_1 = \alpha_n \mathbf{e}_1$  avec  $\alpha_n \neq 0$  et  $\mathbf{e}_1$  premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ . On note  $\mathbb{V}_n = \mathbb{G}_n \mathbb{A}_n$ . Cette matrice s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{V}_n = \left( \begin{array}{c|ccc} \alpha_n & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \dots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \dots & \bullet \end{array} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \begin{array}{c|ccc} \alpha_n & \mathbf{c}_{n-1}^* & & \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{B}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

où  $\mathbf{c}_{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1}$  et  $\mathbb{B}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ . Comme  $\mathbb{G}_n$  et  $\mathbb{A}_n$  sont inversibles,  $\mathbb{V}_n$  l'est aussi. On en déduit donc que  $\mathbb{B}_{n-1}$  est inversible car  $0 \neq \det \mathbb{V}_n = \alpha_n \times \det \mathbb{B}_{n-1}$  et  $\alpha_n \neq 0$ .

On peut donc utiliser la propriété  $(\mathcal{P}_{n-1})$  (hyp. de récurrence) sur la matrice  $\mathbb{B}_{n-1}$  : il existe donc  $\mathbb{S}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ , avec  $|\det \mathbb{S}_{n-1}| = 1$ , tel que la matrice  $\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{S}_{n-1}\mathbb{B}_{n-1}$  soit une triangulaire supérieure inversible. Soit  $\mathbb{Q}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  la matrice définie par

$$\mathbb{Q}_n = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{S}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_n \mathbb{G}_n \mathbb{A}_n &= \mathbb{Q}_n \mathbb{V}_n = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{S}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \alpha_n & \mathbf{c}_{n-1}^* \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{B}_{n-1} \\ 0 & \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} \alpha_n & \mathbf{c}_{n-1}^* \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{S}_{n-1}\mathbb{B}_{n-1} \\ 0 & \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \alpha_n & \mathbf{c}_{n-1}^* \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{U}_{n-1} \\ 0 & \end{array} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{U}_n \end{aligned}$$

La matrice  $\mathbb{U}_n$  est triangulaire supérieure inversible car  $\mathbb{U}_{n-1}$  l'est aussi et  $\alpha_n \neq 0$ .

On pose  $\mathbb{S}_n = \mathbb{Q}_n \mathbb{G}_n$ . On a donc  $\mathbb{S}_n \mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$  et comme  $|\det \mathbb{S}_n| = 1$  car  $|\det \mathbb{G}_n| = 1$  et  $\det \mathbb{G}_n = 1$ , ceci prouve la véracité de la proposition  $(\mathcal{P}_n)$ .

2. Comme  $\mathbb{S}_n$  est inversible, on a en multipliant à gauche le système par  $\mathbb{S}_n$

$$\mathbb{A}_n \mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbb{S}_n \mathbb{A}_n \mathbf{x} = \mathbb{S}_n \mathbf{b} \iff \mathbb{U}_n \mathbf{x} = \mathbb{S}_n \mathbf{b}$$

Pour déterminer le vecteur  $\mathbf{x}$ , on peut alors résoudre le dernier système par l'algorithme de remontée.

**Q. 3** (rapide) Si  $\mathbb{A}$  est non inversible, alors dans la première question nous ne sommes pas assurés d'avoir  $\alpha \neq 0$ . Cependant l'existence de la matrice  $\mathbb{G}$  reste avérée.

Pour la deuxième question, le seul changement vient du fait que la matrice  $\mathbb{U}_n$  n'est plus inversible.

◇

