Proposition

Soit $\mathbb{A}$ une matrice régulière. On a les propriétés suivantes

1. $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*$, $\operatorname{cond}(\alpha\mathbb{A}) = \operatorname{cond}(\mathbb{A})$.

2. $\operatorname{cond}_p(\mathbb{A}) \geqslant 1$, $\forall p \in [\![1, +\infty]\!]$.

3. $\operatorname{cond}_2(\mathbb{A}) = 1$ si et seulement si $\mathbb{A} = \alpha\mathbb{Q}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $\mathbb{Q}$ matrice unitaire

Proof. Soit $\mathbb{A}$ une matrice régulière.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{cond}(\alpha\mathbb{A}) &\stackrel{\mathsf{def}}{=} \|\alpha\mathbb{A}\| \left\|(\alpha\mathbb{A})^{-1}\right\| = |\alpha| \, \|\mathbb{A}\| \left\|\frac{1}{\alpha}\mathbb{A}^{-1}\right\| \\
&= |\alpha| \, \|\mathbb{A}\| \frac{1}{|\alpha|} \left\|\mathbb{A}^{-1}\right\| = \|\mathbb{A}\| \left\|\mathbb{A}^{-1}\right\| \\
&= \operatorname{cond}(\mathbb{A})
\end{aligned}$$

2. On a $\mathbb{I} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$. Or pour toute norme subordonnée, on a $\|\mathbb{I}\| = 1$ et donc $1 = \left\|\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}\right\| \leqslant \|\mathbb{A}\| \left\|\mathbb{A}^{-1}\right\| = \operatorname{cond}(\mathbb{A})$.

3. **Admis**. Voir par exemple [**?**] Théorème 2 page 142-143.

$\square$