

Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS 1ère année & L3 MIM

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2021/10/07

Chapitre IV

Résolution de systèmes non-linéaires

- 1 Recherche des zéros d'une fonction
 - Méthode de dichotomie ou de bisection
 - Points fixes d'une fonction (dimension 1)
 - Points fixes attractifs et répulsifs
 - Algorithme générique du point fixe
 - Points fixes pour la recherche de racines
 - Méthode de la corde
 - La méthode de Newton
 - Méthode de la sécante
- 2 Résolution de systèmes non linéaires
 - Point fixe
 - Méthode de Newton
 - Exemples



Racines/zéros d'un polynôme

- **degré 2** : Babyloniens en 1600 avant J.-C.
- **degré 3** : *Scipio del Ferro* (1465-1526, mathématicien italien) et *Niccolo Fontana* (1499-1557, mathématicien italien)
- **degré 4** : *Ludovico Ferrari* (1522-1565, mathématicien italien)
- **degré 5** : *Paolo Ruffini* (1765-1822, mathématicien italien) en 1799, *Niels Henrick Abel* (1802-1829, mathématicien norvégien) en 1824, montrent qu'il n'existe **pas de solution analytique**.



(a) *Niccolo Fontana*
1499-1557, mathématicien
italien



(b) *Paolo Ruffini*
1765-1822, mathématicien
italien



(c) *Niels Henrick Abel*
1802-1829, mathématicien
norvégien

- 1 Recherche des zéros d'une fonction
 - Méthode de dichotomie ou de bisection
- 2 Résolution de systèmes non linéaires
 - Points fixes d'une fonction (dimension 1)

Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$\alpha \in \mathcal{D} \text{ tels que } f(\alpha) = 0.$$

Soit $I =]a, b[$, $\bar{I} \subset \mathcal{D}$ on suppose $\exists! \alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$.

- 1 Recherche des zéros d'une fonction
 - Méthode de dichotomie ou de bisection
 - Points fixes d'une fonction (dimension 1)
 - Points fixes attractifs et répulsifs
 - Algorithme générique du point fixe
 - Points fixes pour la recherche de racines
 - Méthode de la corde
 - La méthode de Newton
 - Méthode de la sécante
- 2 Résolution de systèmes non linéaires
 - Point fixe
 - Méthode de Newton
 - Exemples



principe de la méthode de dichotomie : Soit I un intervalle contenant un **unique zéro** de la fonction f , on le divise par son milieu en deux intervalles et on détermine lequel des deux contient le zéro. On itère ce processus sur le nouvel intervalle.

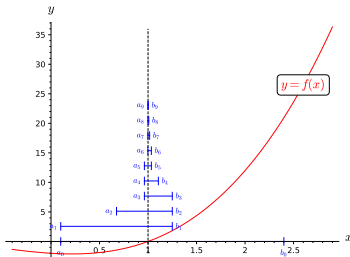


Figure: Méthode de dichotomie: $f(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 1)$



principe de la méthode de dichotomie : Soit I un intervalle contenant un **unique zéro** de la fonction f , on le divise par son milieu en deux intervalles et on détermine lequel des deux contient le zéro. On itère ce processus sur le nouvel intervalle.

- $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$,
- $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k & \text{si } f(b_k)f(x_k) < 0, \\ a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k & \text{sinon (i.e. } f(a_k)f(x_k) < 0.) \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2.$$



Exercice 1.1

On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$, vérifie $f(a)f(b) < 0$ et qu'il existe un unique $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Q.1

- 1 Montrer que les suites (a_k) et (b_k) convergent vers α .
- 2 En déduire que la suite (x_k) converge vers α .

Q.2

- 1 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}$.
- 2 Soit $\epsilon > 0$. En déduire que si $k \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$ alors $|x_k - \alpha| \leq \epsilon$.





Proposition 1.1

Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(a)f(b) < 0$ et admettant $\alpha \in]a, b[$ comme **unique** solution de $f(x) = 0$. Alors la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la méthode de dichotomie converge vers α et

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On a alors $\forall \epsilon > 0, \forall k \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$

$$|x_k - \alpha| \leq \epsilon.$$

- Que cherche-t'on?
- Quelles sont les données du problèmes?

- Que cherche-t'on?

Résultat :

α_ϵ : un réel tel que $|\alpha_\epsilon - \alpha| \leq \epsilon$.

- Quelles sont les données du problèmes?

- Que cherche-t'on?

Résultat :

α_ϵ : un réel tel que $|\alpha_\epsilon - \alpha| \leq \epsilon$.

- Quelles sont les données du problèmes?

Données :

- a, b : deux réels $a < b$,
- f : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses de la proposition ,
- ϵ : un réel strictement positif.

Algorithme 1 \mathcal{R}_0

- 1: $k_{\min} \leftarrow \mathbf{E}\left(\frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)}\right)$
- 2: Calcul de la suite $(x_k)_{k=0}^{k_{\min}}$
- 3: $\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

Algorithme 1 \mathcal{R}_1

- 1: $k_{\min} \leftarrow \mathbf{E}\left(\frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)}\right)$
- 2: Initialisation de x_0
- 3: **Pour** $k \leftarrow 0$ à $k_{\min} - 1$ **faire**
- 4: Calcul de x_{k+1}
- 5: **Fin Pour**
- 6: $\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

Algorithme 1 \mathcal{R}_1

- 1: $k_{\min} \leftarrow E\left(\frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)}\right)$
- 2: Initialisation de x_0
- 3: **Pour** $k \leftarrow 0$ à $k_{\min} - 1$ **faire**
- 4: Calcul de la suite (x_{k+1})
- 5: **Fin Pour**
- 6: $\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

Algorithme 1 \mathcal{R}_2

- 1: $k_{\min} \leftarrow E\left(\frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)}\right)$
- 2: $a_0 \leftarrow a, b_0 \leftarrow b$
- 3: $x_0 \leftarrow \frac{a_0+b_0}{2}$
- 4: **Pour** $k \leftarrow 0$ à $k_{\min} - 1$ **faire**
- 5: **Si** $f(x_k) == 0$ **alors**
- 6: $a_{k+1} \leftarrow x_k, b_{k+1} \leftarrow x_k$
- 7: **Sinon Si** $f(x_k)f(b_k) < 0$ **alors**
- 8: $a_{k+1} \leftarrow x_k, b_{k+1} \leftarrow b_k$
- 9: **Sinon**
- 10: $a_{k+1} \leftarrow a_k, b_{k+1} \leftarrow x_k$
- 11: **Fin Si**
- 12: $x_{k+1} \leftarrow \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$
- 13: **Fin Pour**
- 14: $\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

Algorithme 1 Méthode de dichotomie : version 1

Données : a, b : deux réels $a < b$,
 f : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant
les hypothèses de la proposition 1.1,
 eps : un réel strictement positif.
Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leq \text{eps}$.

```
1: Fonction  $x \leftarrow$  DICHOTOMIE1 ( $f, a, b, \text{eps}$ )
2:  $k_{\min} \leftarrow \lceil \log((b - a)/\text{eps}) / \log(2) \rceil$ 
3:  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{k_{\min}+1}$   $\triangleright \mathbf{A}(k+1)$  contiendra  $a_k, \dots$ 
4:  $\mathbf{A}(1) \leftarrow a, \mathbf{B}(1) \leftarrow b, \mathbf{X}(1) \leftarrow (a + b)/2$ 
5: Pour  $k \leftarrow 1$  à  $k_{\min}$  faire
6:   Si  $f(\mathbf{X}(k)) == 0$  alors
7:      $\mathbf{A}(k+1) \leftarrow \mathbf{X}(k), \mathbf{B}(k+1) \leftarrow \mathbf{X}(k)$ 
8:   Sinon Si  $f(\mathbf{B}(k))f(\mathbf{X}(k)) < 0$  alors
9:      $\mathbf{A}(k+1) \leftarrow \mathbf{X}(k), \mathbf{B}(k+1) \leftarrow \mathbf{B}(k)$ 
10:  Sinon
11:     $\mathbf{A}(k+1) \leftarrow \mathbf{A}(k), \mathbf{B}(k+1) \leftarrow \mathbf{X}(k)$ 
12:  Fin Si
13:   $\mathbf{X}(k+1) \leftarrow (\mathbf{A}(k+1) + \mathbf{B}(k+1))/2$ 
14: Fin Pour
15:  $x \leftarrow \mathbf{X}(k_{\min} + 1)$ 
16: Fin Fonction
```

Algorithme : versions 2, 3 et + si affinités

- $A = a, B = b$ et $x_0 = \frac{A+B}{2}$,
- $\forall k \in \llbracket 0, k_{\min} - 1 \rrbracket$,

$$\begin{cases} A = B = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ A = x_k, B \text{ inchangé} & \text{si } f(B)f(x_k) < 0, \\ B = x_k, A \text{ inchangé} & \text{sinon (i.e. } f(A)f(x_k) < 0.) \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = \frac{A + B}{2}$$

Algorithme 2 Méthode de dichotomie : version 2

Données : a, b : deux réels $a < b$,
 f : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant
les hypothèses de la proposition 1.1,
 eps : un réel strictement positif.

Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leq \text{eps}$.

```
1: Fonction  $x \leftarrow$  DICHOTOMIE2 ( $f, a, b, \text{eps}$ )
2:  $k_{\min} \leftarrow \lceil \log((b - a)/\text{eps}) / \log(2) \rceil$ 
3:  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{k_{\min}+1}$   $\triangleright \mathbf{X}(k+1)$  contiendra  $x_k, \dots$ 
4:  $A \leftarrow a, B \leftarrow b, \mathbf{X}(1) \leftarrow (A + B)/2$ 
5: Pour  $k \leftarrow 1$  à  $k_{\min}$  faire
6:   Si  $f(\mathbf{X}(k)) == 0$  alors
7:      $A \leftarrow \mathbf{X}(k), B \leftarrow \mathbf{X}(k)$ 
8:   Sinon Si  $f(A)f(\mathbf{X}(k)) < 0$  alors
9:      $A \leftarrow \mathbf{X}(k)$   $\triangleright B$  inchangé
10:  Sinon
11:     $B \leftarrow \mathbf{X}(k)$   $\triangleright A$  inchangé
12:  Fin Si
13:   $\mathbf{X}(k+1) \leftarrow (A + B)/2$ 
14: Fin Pour
15:  $x \leftarrow \mathbf{X}(k_{\min} + 1)$ 
16: Fin Fonction
```

Algorithme 3 Méthode de dichotomie : version 3

Données : a, b : deux réels $a < b$,
 f : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant
les hypothèses de la proposition 1.1,
 eps : un réel strictement positif.

Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leq \text{eps}$.

```
1: Fonction  $x \leftarrow \text{DICHOTOMIE3} ( f, a, b, \text{eps} )$ 
2:    $\text{kmin} \leftarrow \lceil \log((b - a)/\text{eps}) / \log(2) \rceil$ 
3:    $A, B \in \mathbb{R}$ 
4:    $A \leftarrow a, B \leftarrow b, x \leftarrow (a + b)/2$ 
5:   Pour  $k \leftarrow 1$  à  $\text{kmin}$  faire
6:     Si  $f(x) == 0$  alors
7:        $A \leftarrow x, B \leftarrow x$ 
8:     Sinon Si  $f(B)f(x) < 0$  alors
9:        $A \leftarrow x$  ▷  $B$  inchangé
10:    Sinon
11:       $B \leftarrow x$  ▷  $A$  inchangé
12:    Fin Si
13:     $x \leftarrow (A + B)/2$ 
14:  Fin Pour
15: Fin Fonction
```

Algorithme 4 Méthode de dichotomie : version 4

Données : a, b : deux réels $a < b$,
 f : $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $f(a)f(b) < 0$
 eps : un réel strictement positif.

Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leq \text{eps}$.

```
1: Fonction  $x \leftarrow$  DICHOTOMIE4 (  $f, a, b, \text{eps}$  )
2:    $A, B \in \mathbb{R}$ 
3:    $A \leftarrow a, B \leftarrow b, x \leftarrow (a + b)/2$ 
4:   Tantque  $|x - A| > \text{eps}$  faire
5:     Si  $f(x) == 0$  alors
6:        $A \leftarrow x, B \leftarrow x$ 
7:     Sinon Si  $f(B)f(x) < 0$  alors
8:        $A \leftarrow x$                                      ▷  $B$  inchangé
9:     Sinon
10:       $B \leftarrow x$                                      ▷  $A$  inchangé
11:    Fin Si
12:     $x \leftarrow (A + B)/2$ 
13:  Fin Tantque
14: Fin Fonction
```

Que pensez vous de cet algorithme?

Algorithme 5 Méthode de dichotomie : version 5

Données : a, b : deux réels $a < b$,
 f : $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $f(a)f(b) < 0$.

Résultat : x : un réel tel que $f(x) = 0$.

```
1: Fonction  $x \leftarrow \text{DICHOTOMIE5} ( f, a, b )$ 
2:    $A, B \in \mathbb{R}$ 
3:    $A \leftarrow a, B \leftarrow b, x \leftarrow (a + b)/2, xp \leftarrow a$ 
4:   Tantque  $x \sim xp$  faire
5:     Si  $f(B)f(x) < 0$  alors
6:        $A \leftarrow x$                                 ▷  $B$  inchangé
7:     Sinon
8:        $B \leftarrow x$                                 ▷  $A$  inchangé
9:     Fin Si
10:     $xp \leftarrow x$ 
11:     $x \leftarrow (A + B)/2$ 
12:  Fin Tantque
13: Fin Fonction
```

1 Recherche des zéros d'une fonction

- Méthode de dichotomie ou de bisection
- Points fixes d'une fonction (dimension 1)
- Points fixes attractifs et répulsifs
- Algorithme générique du point fixe

- Points fixes pour la recherche de racines
- Méthode de la corde
- La méthode de Newton
- Méthode de la sécante

2 Résolution de systèmes non linéaires

- Point fixe
- Méthode de Newton
- Exemples

Soit $\Phi : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée. Rechercher un **point fixe** de Φ revient à

Trouver $\alpha \in [a, b]$ tel que

$$\alpha = \Phi(\alpha).$$

L'algorithme de la **méthode du point fixe** consiste en la construction, si elle existe, de la suite

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1)$$

avec $x^{(0)} \in [a, b]$ donné.

♥ Definition 1.2

Soient (E, d) un **espace métrique** et $(\mathbf{u}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers $\boldsymbol{\alpha} \in E$. On dit que cette suite **converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ avec un ordre $p \geq 1$** si

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \exists C > 0 \text{ tels que } d(\mathbf{u}^{[k+1]}, \boldsymbol{\alpha}) \leq C d(\mathbf{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha})^p, \forall k \geq k_0. \quad (2)$$

où $C < 1$ si $p = 1$.

Exemples de distances:

- $d(x, y) = |x - y|$ dans \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{Z} ou \mathbb{Q}
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ dans \mathbb{R}^n , où $\|\cdot\|$ est l'une quelconque des normes habituelles.



Théorème 2: Théorème du point fixe dans \mathbb{R}



Soient $[a, b]$ un intervalle non vide de \mathbb{R} et Φ une application continue de $[a, b]$ dans lui-même. Alors, il existe **au moins** un point $\alpha \in [a, b]$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction Φ** .

De plus, si Φ est contractante (lipschitzienne de rapport $L \in [0, 1[$), c'est à dire

$$\exists L < 1 \text{ t.q. } |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y| \quad \forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad (3)$$

alors Φ admet un **unique** point fixe $\alpha \in [a, b]$.

Pour tout $x_0 \in [a, b]$, la suite

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (4)$$

est bien définie et elle converge vers α avec un ordre 1 au moins.

On a les deux estimations suivantes :

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|, \quad \forall k \geq 0, \quad (5)$$

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}|, \quad \forall k \geq 0, \quad (6)$$



Théorème 3: Convergence globale, méthode du point fixe



Soit $\Phi \in \mathcal{C}^1([a, b])$ vérifiant $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$ et

$$\exists L < 1 \text{ tel que } \forall x \in [a, b], |\Phi'(x)| \leq L, \quad (7)$$

Soit $x_0 \in [a, b]$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. On a alors

- 1 la fonction Φ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$,
- 2 $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \in [a, b]$,
- 3 la suite (x_k) converge vers α avec un ordre 1 au moins.
- 4 Si $x_0 \neq \alpha$, alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \quad (8)$$



Théorème 4: Convergence locale du point fixe



Soit α un point fixe d'une fonction Φ de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de α . Si $|\Phi'(\alpha)| < 1$, alors il existe $\delta > 0$ pour lequel x_k converge vers α pour tout x_0 tel que $|x_0 - \alpha| \leq \delta$. De plus, si $x_0 \neq \alpha$, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \quad (9)$$



Exercice 4.1:



Soit α un point fixe d'une fonction Φ de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de α et vérifiant $\Phi'(\alpha) = 0$.

Q.1 Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x_0 \in]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ converge vers α .

On suppose de plus que Φ' est dérivable sur $] \alpha - \delta, \alpha + \delta [$ et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta] |\Phi''(x)| \leq M$$

Q.2

1 Montrer que

$$\forall x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta], |x_k - \alpha| \leq \frac{2}{M} \left(\frac{1}{2} M |x_0 - \alpha| \right)^{2^k}$$

2 Quel est l'ordre de convergence dans ce cas.

Q.3 A quelle condition a-t'on

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{2}{M} 10^{-2^k}.$$



Proposition 4.1:



Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $\Phi \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{V})$ pour un certain voisinage \mathcal{V} de α point fixe de Φ . Si $\Phi^{(i)}(\alpha) = 0$, pour $1 \leq i \leq p$ et si $\Phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, alors la méthode de point fixe associée à la fonction Φ est d'ordre $p + 1$ et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\Phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \quad (10)$$

- 1 Recherche des zéros d'une fonction
 - Méthode de dichotomie ou de bisection
 - Points fixes d'une fonction (dimension 1)
 - **Points fixes attractifs et répulsifs**
 - Algorithme générique du point fixe
- 2 Résolution de systèmes non linéaires
 - Points fixes pour la recherche de racines
 - Méthode de la corde
 - La méthode de Newton
 - Méthode de la sécante

Soit $\Phi : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une application de classe \mathcal{C}^1 admettant un point fixe $\alpha \in [a, b]$.

- Si $|\Phi'(\alpha)| < 1$ alors α est un point fixe attractif,
- Si $|\Phi'(\alpha)| > 1$ alors α est un point fixe répulsif.

On s'intéresse ici au point fixe $\alpha = 1$ de la fonction $\Phi : x \mapsto x^2$.

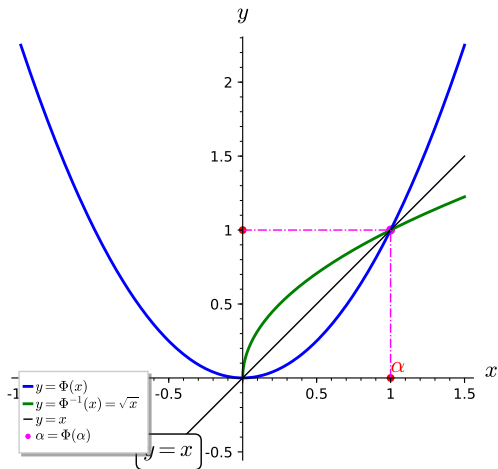
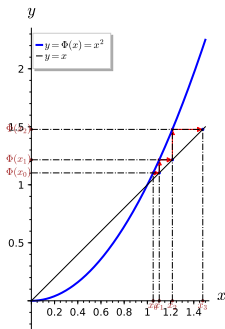
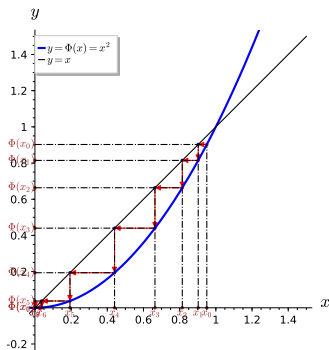


Figure: fonction x^2 et sa fonction réciproque \sqrt{x} sur $[0, +\infty[$

$\Phi'(\alpha) = 2$: point fixe répulsif



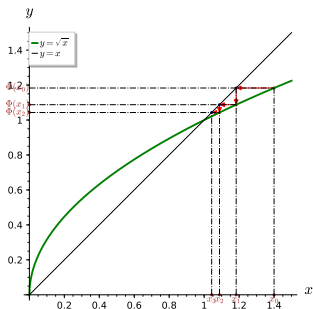
(a) $x_0 = 1.05$



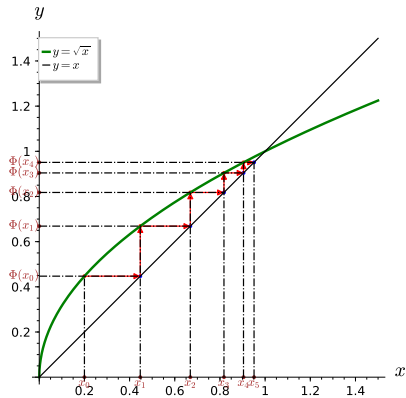
(b) $x_0 = 0.950$

Figure: $\alpha = 1$, point fixe répulsif de $x \mapsto x^2$

$(\Phi^{-1})'(1) = 1/2 < 1$, : **point fixe attractif**



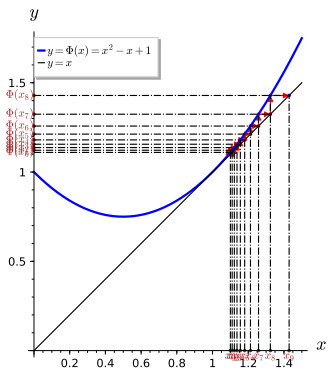
(a) $x_0 = 1.40$



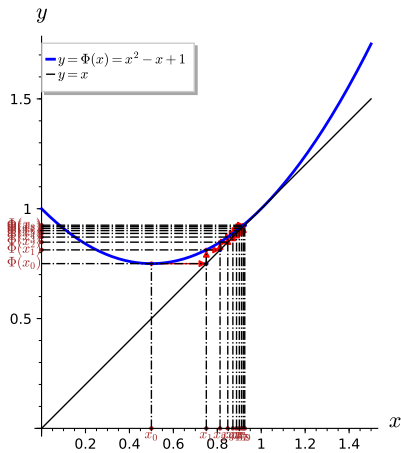
(b) $x_0 = 0.200$

Figure: $\alpha = 1$, point fixe attractif de $\Phi^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$

fonction $\Phi : x \mapsto x^2 - x + 1$: point fixe $\alpha = 1$, $\Phi'(\alpha) = 1$.

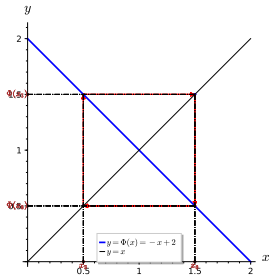


(a) $x_0 = 1.1$, α point répulsif

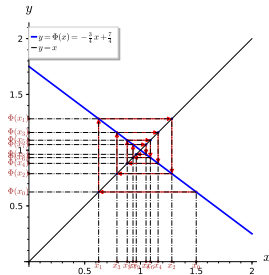


(b) $x_0 = 0.50$, α point attractif

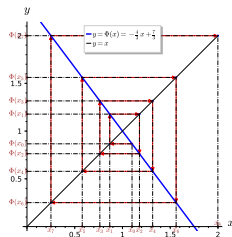
Figure: $\alpha = 1$, point fixe attractif ou répulsif de $x \mapsto x^2 - x + 1$



(a) $x_0 = 1.50$



(b) $x_0 = 1.50$



(c) $x_0 = 1.10$

Figure: $\alpha = 1$, point fixe de fonctions affines particulières

- 1 Recherche des zéros d'une fonction
 - Méthode de dichotomie ou de bisection
 - Points fixes d'une fonction (dimension 1)
 - Points fixes attractifs et répulsifs
 - **Algorithme générique du point fixe**
- 2 Résolution de systèmes non linéaires
 - Points fixes pour la recherche de racines
 - Méthode de la corde
 - La méthode de Newton
 - Méthode de la sécante

Algorithme générique du point fixe

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \text{ avec } x^{(0)} \in [a, b] \text{ donné.}$$

Algorithme 6 Méthode de point fixe
: version **Tantque** *formel*

- 1: $k \leftarrow 0$
 - 2: **Tantque** non convergence **faire**
 - 3: $x_{k+1} \leftarrow \Phi(x_k)$
 - 4: $k \leftarrow k + 1$
 - 5: **Fin Tantque**
 - 6: $\alpha_\epsilon \leftarrow x_k \quad \triangleright$ le dernier calculé.
-

Algorithme 7 Méthode de point fixe
: version **Répéter** *formel*

- 1: $k \leftarrow 0$
 - 2: **Répéter**
 - 3: $k \leftarrow k + 1$
 - 4: $x_k \leftarrow \Phi(x_{k-1})$
 - 5: **jusqu'à** convergence
 - 6: $\alpha_\epsilon \leftarrow x_k \quad \triangleright$ le dernier calculé.
-

Critères d'arrêt?

- On n'est pas sûr de converger \implies kmax nb maximum d'itérations
- Si on converge, on s'arrête dès que $|\Phi(x_k) - x_k| = |x_{k+1} - x_k| \leq \text{tol}$

Algorithme générique du point fixe

Algorithme 8 Méthode de point fixe : version **Tantque** formel avec critères d'arrêt

```
1:  $k \leftarrow 0$ 
2:  $err \leftarrow |\Phi(x_0) - x_0|$  ▷ ou  $\frac{|\Phi(x_0) - x_0|}{|x_0| + 1}$ 
3: Tantque  $err > \epsilon$  et  $k \leq k_{max}$  faire
4:    $k \leftarrow k + 1$ 
5:    $x_k \leftarrow \Phi(x_{k-1})$ 
6:    $err \leftarrow |\Phi(x_k) - x_k|$  ▷ ou  $\frac{|\Phi(x_k) - x_k|}{|x_k| + 1}$ 
7: Fin Tantque
8: Si  $err \leq tol$  alors ▷ Convergence
9:    $\alpha_{tol} \leftarrow x_k$  ▷  $|\Phi(\alpha_{tol}) - \alpha_{tol}| \leq tol$ 
10: Fin Si
```

Algorithme 9 Méthode de point fixe : version **Répéter** formel avec critères d'arrêt

```
1:  $k \leftarrow 0$ 
2: Répéter
3:    $err \leftarrow |\Phi(x_k) - x_k|$  ▷ ou  $\frac{|\Phi(x_k) - x_k|}{|x_k| + 1}$ 
4:    $x_{k+1} \leftarrow \Phi(x_k)$ 
5:    $k \leftarrow k + 1$ 
6: jusqu'à  $err \leq tol$  ou  $k > k_{max}$ 
7: Si  $err \leq tol$  alors ▷ Convergence
8:    $\alpha_{tol} \leftarrow x_k$  ▷  $|\Phi(\alpha_{tol}) - \alpha_{tol}| \leq tol$ 
9: Fin Si
```

Algorithme générique du point fixe

Algorithme 10 Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

- 1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXE}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$
- 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$
- 3: $x \leftarrow x_0, \text{fx} \leftarrow \Phi(x_0)$,
- 4: $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x|$ \triangleright ou $\frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$
- 5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ **faire**
- 6: $k \leftarrow k + 1$
- 7: $x \leftarrow \text{fx}$
- 8: $\text{fx} \leftarrow \Phi(x)$
- 9: $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x|$ \triangleright ou $\frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$
- 10: **Fin Tantque**
- 11: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors** \triangleright Convergence
- 12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$
- 13: **Fin Si**
- 14: **Fin Fonction**

Algorithme 11 Méthode de point fixe : version **Répéter** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

- 1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXE}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$
- 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$
- 3: $x \leftarrow x_0$
- 4: **Répéter**
- 5: $x_p \leftarrow x$
- 6: $x \leftarrow \Phi(x_p)$
- 7: $\text{err} \leftarrow |x - x_p|$ \triangleright ou $\frac{|x - x_p|}{|x_p| + 1}$
- 8: $k \leftarrow k + 1$
- 9: **jusqu'à** $\text{err} \leq \text{tol}$ ou $k > \text{kmax}$
- 10: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors** \triangleright Convergence
- 11: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$
- 12: **Fin Si**
- 13: **Fin Fonction**

- 1 Recherche des zéros d'une fonction
 - Méthode de dichotomie ou de bisection
 - Points fixes d'une fonction (dimension 1)
 - Points fixes attractifs et répulsifs
 - Algorithme générique du point fixe
- 2 Points fixes pour la recherche de racines
 - Méthode de la corde
 - La méthode de Newton
 - Méthode de la sécante
- 2 Résolution de systèmes non linéaires
 - Point fixe
 - Méthode de Newton
 - Exemples

$$f(x) = 0 \iff \Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} x + f(x) = x.$$

si $\mathcal{F} \in \mathcal{C}^0$ tel que $\mathcal{F}(0) = 0$ alors

$$f(x) = 0 \iff \Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} x + \mathcal{F}(f(x)) = x.$$

Objectif : Construire une suite x_{k+1} tel que $|x_{k+1} - \alpha| \leq |x_k - \alpha|$.

formule de Taylor :

$$f(\alpha) = 0 = f(x_k) + hf'(\xi) \text{ avec } h = \alpha - x_k.$$

Soit $q_k \approx f'(\xi)$ et \tilde{h} solution de

$$f(x_k) + \tilde{h}q_k = 0$$

Si $q_k \neq 0$, on obtient la suite itérative $x_{k+1} = x_k + \tilde{h}$ i.e.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{11}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

x_{k+1} : intersection droite de pente q_k passant par $((x_k), f(x_k))$ avec (Ox)

- **Méthode de la corde :**

$$q_k = q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- **Méthode de la sécante :**

$$q_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

où x_{-1} et x_0 sont données,

- **Méthode de Newton :** en supposant f' connu, on prend

$$q_k = f'(x_k).$$

- 1 Recherche des zéros d'une fonction
 - Méthode de dichotomie ou de bisection
 - Points fixes d'une fonction (dimension 1)
 - Points fixes attractifs et répulsifs
 - Algorithme générique du point fixe
 - Points fixes pour la recherche de racines
 - **Méthode de la corde**
 - La méthode de Newton
 - Méthode de la sécante
- 2 Résolution de systèmes non linéaires
 - Point fixe
 - Méthode de Newton
 - Exemples



Exercice 4.2:



Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ vérifiant $f(a)f(b) < 0$. et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Soit $x_0 \in [a, b]$ donné. La suite obtenue par la méthode de la corde est donnée par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On note $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda}$.

Q.1 Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leq f(x) \leq \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \quad (12)$$

alors $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$.

Q.2 Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \quad (13)$$

alors $|\Phi'(x)| < 1$.

Q.3 En déduire que sous les deux conditions précédentes la méthode de la corde converge vers l'unique solution $\alpha \in [a, b]$ de $f(x) = 0$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On pose $\Phi(x) = x - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x)$, alors $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.



Proposition 4.2: convergence, méthode de la corde

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$ et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On note $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 \in [a, b]$ et pour tout $k \geq 0$


$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}. \quad (14)$$

On suppose de plus que $\forall x \in [a, b]$

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leq f(x) \leq \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \quad (15)$$

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \quad (16)$$

alors la suite (x_k) converge vers l'unique racine $\alpha \in [a, b]$ de f .

 **Proposition 4.3: ordre de convergence de la méthode de la corde**



Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$. Si la suite (x_k) définie par la méthode de la corde en (14) converge vers $\alpha \in]a, b[$ alors la convergence est au moins d'ordre 1.

De plus, si f est de classe \mathcal{C}^2 sur un certain voisinage \mathcal{V} de α et si $f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ alors la convergence est au moins d'ordre 2.

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
 tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
 kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

- 1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXE}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$
- 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$
- 3: $x \leftarrow x_0$,
- 4: $\text{err} \leftarrow \text{tol} + 1$
- 5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ **faire**
- 6: $k \leftarrow k + 1$
- 7: $x_p \leftarrow x$
- 8: $x \leftarrow \Phi(x_p)$
- 9: $\text{err} \leftarrow |x - x_p|$ \triangleright ou $\frac{|x_p - x|}{|x| + 1}$
- 10: **Fin Tantque**
- 11: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors** \triangleright Convergence
- 12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$
- 13: **Fin Si**
- 14: **Fin Fonction**

Méthode de la corde :

$$\Phi(x) = x - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(x)$$

Méthode de point fixe : version Tantque avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
 tol : la tolérance, $tol \in \mathbb{R}^+$,
 k_{max} : nombre maximum d'itérations, $k_{max} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{tol}) - \alpha_{tol}| \leq tol$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{tol}) - \alpha_{tol}|}{|\alpha_{tol}| + 1} \leq tol$)

```
1: Fonction  $\alpha_{tol} \leftarrow$  PTFIXE (  $\Phi, x_0, tol, k_{max}$  )
2:  $k \leftarrow 0, \alpha_{tol} \leftarrow \emptyset$ 
3:  $x \leftarrow x_0,$ 
4:  $err \leftarrow tol + 1$ 
5: Tantque  $err > tol$  et  $k \leq k_{max}$  faire
6:    $k \leftarrow k + 1$ 
7:    $xp \leftarrow x$ 
8:    $x \leftarrow \Phi(xp)$ 
9:    $err \leftarrow |x - xp|$  ▷ ou  $\frac{|xp - x|}{|x| + 1}$ 
10: Fin Tantque
11: Si  $err \leq tol$  alors ▷ Convergence
12:    $\alpha_{tol} \leftarrow x$ 
13: Fin Si
14: Fin Fonction
```

Algorithme 12 Méthode de la corde

Données :

- f : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 a, b : deux réels tels que $f(a) \neq f(b)$,
 x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
 tol : la tolérance, $tol \in \mathbb{R}^+$,
 k_{max} : nombre maximum d'itérations, $k_{max} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|f(\alpha_{tol})| \leq tol$

```
1: Fonction  $\alpha_{tol} \leftarrow$  CORDE (  $f, a, b, x_0, tol, k_{max}$  )
2:  $k \leftarrow 0, \alpha_{tol} \leftarrow \emptyset$ 
3:  $q \leftarrow \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$ 
4:  $x \leftarrow x_0,$ 
5:  $err \leftarrow tol + 1$ 
6: Tantque  $err > tol$  et  $k \leq k_{max}$  faire
7:    $k \leftarrow k + 1$ 
8:    $xp \leftarrow x$ 
9:    $x \leftarrow xp - q * f(xp)$ 
10:    $err \leftarrow |x - xp|$ 
11: Fin Tantque
12: Si  $err \leq tol$  alors ▷ Convergence
13:    $\alpha_{tol} \leftarrow x$ 
14: Fin Si
15: Fin Fonction
```

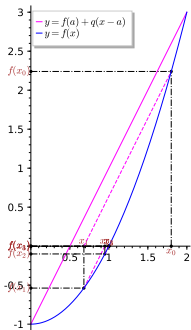
Plus simple, plus court ... ???

$\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$

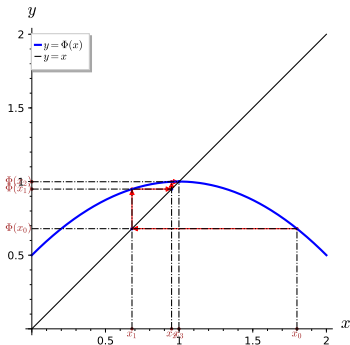
- exemple 1 : $a = 0.000$, $b = 2.000$, $x_0 = 1.800$,
- exemple 2 : $a = 0.5000$, $b = 1.900$, $x_0 = 1.800$.

	exemple 1	exemple 2
k	$ x_k - \alpha $	$ x_k - \alpha $
0	8.0000e-01	8.0000e-01
1	3.2000e-01	1.3333e-01
2	5.1200e-02	2.9630e-02
3	1.3107e-03	5.3041e-03
4	8.5899e-07	8.9573e-04
5	3.6893e-13	1.4962e-04
6	0.0000e+00	2.4947e-05
\vdots	\vdots	\vdots
15	0.0000e+00	2.4756e-12

L'exemple 1 converge beaucoup plus rapidement

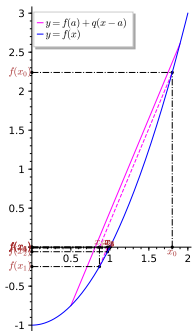


(a) représentation usuelle

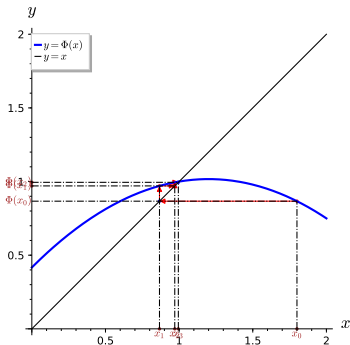


(b) Représentation point fixe

Figure: Exemple 1, méthode de la corde, $\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$ avec $a = 0.00$, $b = 2.00$, $x_0 = 1.80$,

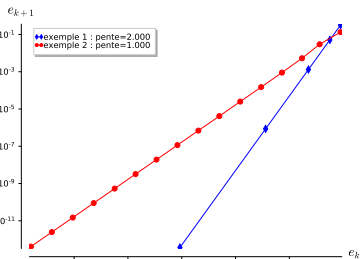
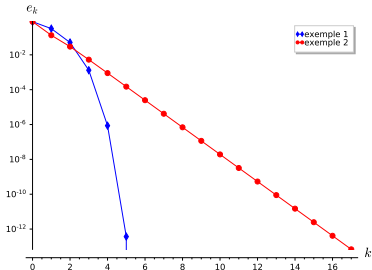


(a) représentation usuelle



(b) Représentation point fixe

Figure: Exemple 2, méthode de la corde, $\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$ avec $a = 0.50$, $b = 1.90$, $x_0 = 1.80$,



(a) Erreurs en fonctions des itérations

(b) Représentation en échelle logarithmique de e_{k+1} en fonction de e_k . Les pentes sont calculées numériquement

Figure: Exemples 1 et 2, méthode de la corde, $\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$

Exemple 1 : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2$ et $f'(\alpha) = 2 \Rightarrow$ convergence ordre 2.

Exemple 2 : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2.400 \neq f'(\alpha) = 2 \Rightarrow$ convergence ordre 1.

- 1 Recherche des zéros d'une fonction
 - Méthode de dichotomie ou de bisection
 - Points fixes d'une fonction (dimension 1)
 - Points fixes attractifs et répulsifs
 - Algorithme générique du point fixe
 - Points fixes pour la recherche de racines
 - Méthode de la corde
 - **La méthode de Newton**
 - Méthode de la sécante
- 2 Résolution de systèmes non linéaires
 - Point fixe
 - Méthode de Newton
 - Exemples

Proposition 4.4: convergence de la méthode de Newton

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un certain voisinage d'une racine simple α de f . Soit x_0 donné dans ce voisinage, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la méthode de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (17)$$

est localement convergente d'ordre 2.



Exercice 4.3:



En -1700 av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur $\sqrt{2}$, ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$\alpha = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est $|\alpha - \sqrt{2}| \approx 5.994e - 7$.



- Q.1** Comment feriez-vous pour trouver **à la main** une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant $\sqrt{2}$.
- Q.2** Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de \sqrt{a} où a est un réel positif.
- Q.3** Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt[n]{a}$ où a est un réel positif et $n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
 tol : la tolérance, $tol \in \mathbb{R}^+$,
 $kmax$: nombre maximum d'itérations, $kmax \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{tol}) - \alpha_{tol}| \leq tol$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{tol}) - \alpha_{tol}|}{|\alpha_{tol}|+1} \leq tol$)

- 1: **Fonction** $\alpha_{tol} \leftarrow \text{PTFIXE} (\Phi, x_0, tol, kmax)$
 - 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{tol} \leftarrow \emptyset$
 - 3: $x \leftarrow x_0,$
 - 4: $err \leftarrow tol + 1$
 - 5: **Tantque** $err > tol$ et $k \leq kmax$ **faire**
 - 6: $k \leftarrow k + 1$
 - 7: $xp \leftarrow x$
 - 8: $x \leftarrow \Phi(xp)$
 - 9: $err \leftarrow |x - xp|$ \triangleright ou $\frac{|xp-x|}{|x|+1}$
 - 10: **Fin Tantque**
 - 11: **Si** $err \leq tol$ **alors** \triangleright Convergence
 - 12: $\alpha_{tol} \leftarrow x$
 - 13: **Fin Si**
 - 14: **Fin Fonction**
-

Méthode de Newton :

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

- 1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PtFixe}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$
- 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$
- 3: $x \leftarrow x_0$,
- 4: $\text{err} \leftarrow \text{tol} + 1$
- 5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ **faire**
- 6: $k \leftarrow k + 1$
- 7: $x_p \leftarrow x$
- 8: $x \leftarrow \Phi(x_p)$
- 9: $\text{err} \leftarrow |x - x_p|$ \triangleright ou $\frac{|x_p - x|}{|x| + 1}$
- 10: **Fin Tantque**
- 11: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors** \triangleright Convergence
- 12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$
- 13: **Fin Si**
- 14: **Fin Fonction**

Algorithme 14 Méthode de Newton

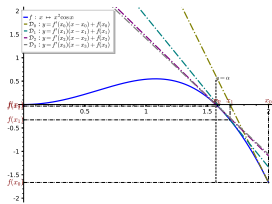
Données :

- f : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- df : la dérivée de f ,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

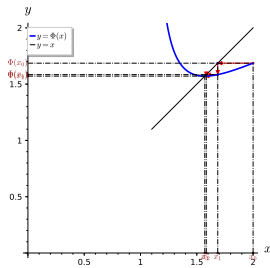
Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$

- 1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{Newton}(f, \text{df}, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$
- 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$
- 3: $x \leftarrow x_0$,
- 4: $\text{err} \leftarrow \text{tol} + 1$
- 5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ **faire**
- 6: $k \leftarrow k + 1$
- 7: $x_p \leftarrow x$
- 8: $x \leftarrow x_p - f(x_p)/\text{df}(x_p)$ $\triangleright \text{df}(x_p) \neq 0$
- 9: $\text{err} \leftarrow |x - x_p|$
- 10: **Fin Tantque**
- 11: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors** \triangleright Convergence
- 12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$
- 13: **Fin Si**
- 14: **Fin Fonction**

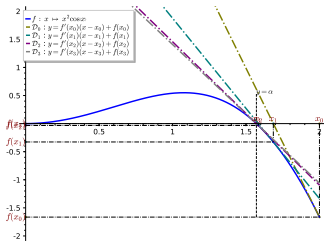


(a) représentation usuelle

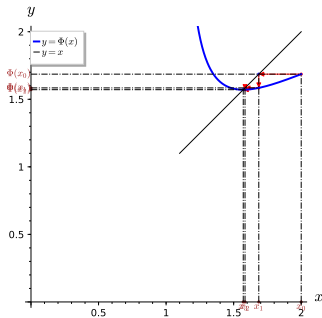


(b) Représentation point fixe,
 $\Phi : x \mapsto \frac{x^2 \cos(x)}{x^2 \sin(x) - 2x \cos(x)} + x$

Figure: Exemple 2, méthode de Newton, $\alpha = \frac{1}{2} \pi$, racine de $f : x \mapsto x^2 \cos(x)$ avec $x_0 = 0.40$,



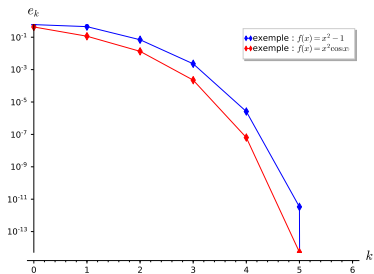
(a) représentation usuelle



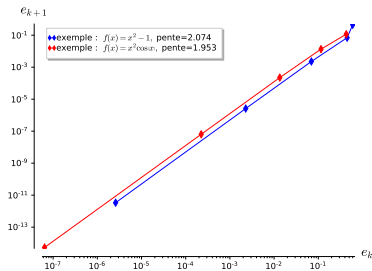
(b) Représentation point fixe,

$$\Phi : x \mapsto \frac{x^2 \cos(x)}{x^2 \sin(x) - 2x \cos(x)} + x$$

Figure: Exemple 2, méthode de Newton, $\alpha = \frac{1}{2} \pi$, racine de $f : x \mapsto x^2 \cos(x)$ avec $x_0 = 0.40$,



(a) Représentation de la convergence, e_k en fonction de k




(b) Représentation de l'ordre de convergence en échelle logarithmique, e_{k+1} en fonction de e_k . Ordre théorique 2

Figure: Méthode de Newton, convergence et ordre

- 1 Recherche des zéros d'une fonction
 - Méthode de dichotomie ou de bisection
 - Points fixes d'une fonction (dimension 1)
 - Points fixes attractifs et répulsifs
 - Algorithme générique du point fixe
 - Points fixes pour la recherche de racines
 - Méthode de la corde
 - La méthode de Newton
 - **Méthode de la sécante**
- 2 Résolution de systèmes non linéaires
 - Point fixe
 - Méthode de Newton
 - Exemples

Alternative à la méthode de Newton lorsque l'on ne connaît pas la dérivée de la fonction f :

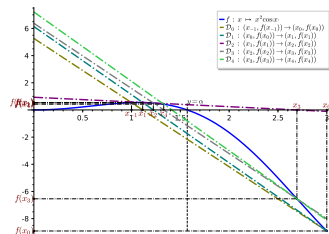
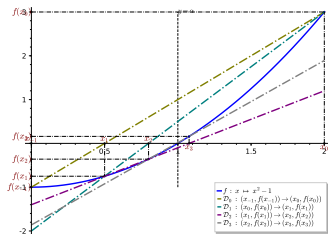
$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

 **Proposition 4.5: Convergence méthode de la sécante (Admis)**

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un certain voisinage d'une racine simple α de f . Soient x_{-1} et x_0 donnés dans ce voisinage tels que $f(x_{-1}) \neq f(x_0)$, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la méthode de la sécante

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (18)$$

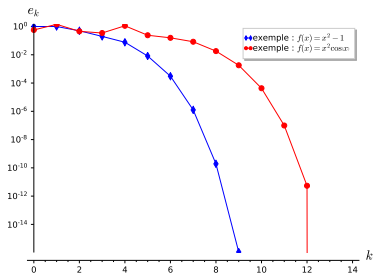
est localement convergente d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.



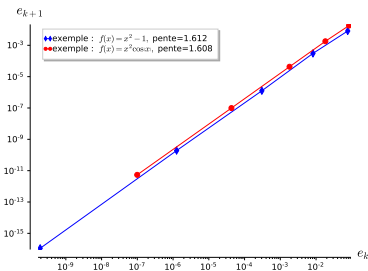
(a) $f(x) = x^2 - 1$, $x_{-1} = 0.000$ et $x_0 = 2.000$

(b) $f(x) = x^2 \cos(x)$, $x_{-1} = 1.000$ et $x_0 = 3.000$

Figure: Méthode de la sécante



(a) Représentation de la convergence, e_k en fonction de k



(b) Représentation de l'ordre de convergence en échelle logarithmique, e_{k+1} en fonction de e_k . Ordre théorique $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

Figure: Méthode de la sécante, convergence et ordre

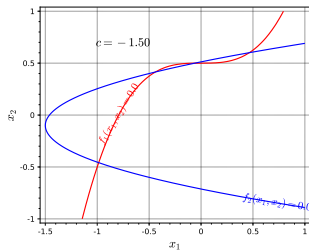
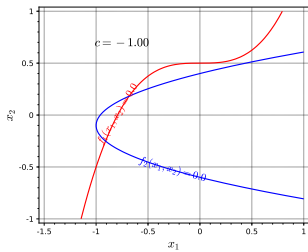
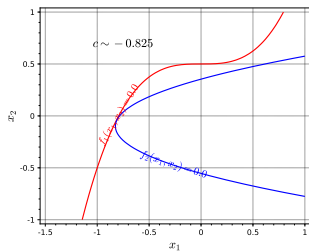
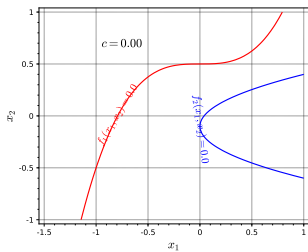
1 Recherche des zéros d'une fonction

2 Résolution de systèmes non linéaires

- Point fixe
- Méthode de Newton
- Exemples

Soit $c \in \mathbb{R}$ donné.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2 - \frac{1}{2} & = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{25} (10x_2 + 1)^2 + c - x_1 & = 0. \end{cases} \quad (19)$$



Soient $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^0(U; \mathbb{R}^N)$

Trouver $\alpha \in U \subset \mathbb{R}^N$ tel que

$$\mathbf{f}(\alpha) = 0 \iff \begin{cases} \mathbf{f}_1(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = 0 \\ \mathbf{f}_2(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = 0 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_N(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = 0 \end{cases}$$

On pose, par ex., $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})$, : $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \iff \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ Point fixe

Trouver $\alpha \in U \subset \mathbb{R}^N$ tel que

$$\Phi(\alpha) = \alpha \iff \begin{cases} \Phi_1(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \alpha_1 \\ \Phi_2(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \alpha_2 \\ \vdots \\ \Phi_N(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \alpha_N \end{cases}$$

- 1 Recherche des zéros d'une fonction
 - Méthode de dichotomie ou de bisection
 - Points fixes d'une fonction (dimension 1)
 - Points fixes attractifs et répulsifs
 - Algorithme générique du point fixe
 - Points fixes pour la recherche de racines
 - Méthode de la corde
 - La méthode de Newton
 - Méthode de la sécante
- 2 Résolution de systèmes non linéaires
 - Point fixe
 - Méthode de Newton
 - Exemples



Théorème 5.1: Point fixe de Banach



Soit \mathcal{B} un espace de Banach et $U \subset \mathcal{B}$ un sous-ensemble fermé. On suppose que $\Phi : U \rightarrow U$ est une application strictement contractante, i.e.

$$\exists L \in]0, 1[, \quad \|\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y})\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times U. \quad (20)$$

Alors

- 1 Φ admet un unique point fixe $\alpha \in U$ (i.e. unique solution de $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x})$).
- 2 La suite des itérés $\mathbf{x}^{[k+1]} = \Phi(\mathbf{x}^{[k]})$ converge vers α pour toute valeur initiale $\mathbf{x}^{[0]} \in U$.
- 3 Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\alpha - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq \frac{L^{k-l}}{1-L} \|\mathbf{x}^{[l+1]} - \mathbf{x}^{[l]}\|, \quad 0 \leq l \leq k \quad (21)$$

- 1 Recherche des zéros d'une fonction
 - Méthode de dichotomie ou de bisection
 - Points fixes d'une fonction (dimension 1)
 - Points fixes attractifs et répulsifs
 - Algorithme générique du point fixe
 - Points fixes pour la recherche de racines
 - Méthode de la corde
 - La méthode de Newton
 - Méthode de la sécante
- 2 Résolution de systèmes non linéaires
 - Point fixe
 - Méthode de Newton
 - Exemples

$\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction suffisamment régulière. On définit la **matrice Jacobienne de \mathbf{f}** , notée $\mathbb{J}_{\mathbf{f}}$, par

$$\mathbb{J}_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

On a alors $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$ à l'ordre 1

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}. \quad (22)$$

On a $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$ à l'ordre 1

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}).\mathbf{h}. \quad (23)$$

trouver $\boldsymbol{\alpha}$ tel que $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$.

Si $\mathbf{x}^{[k]}$ est proche de $\boldsymbol{\alpha}$, alors avec $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{[k]}$ et $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{h}$

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]}) + \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}).\mathbf{h}$$

On résoud le système linéarisé

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]}) + \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}).\tilde{\mathbf{h}} = 0 \Leftrightarrow \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}).\tilde{\mathbf{h}} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]}).$$

On pose $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - ((\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}))^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}))$. la méthode de Newton s'écrit alors

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \Phi(\mathbf{x}^{[k]}) = \mathbf{x}^{[k]} - \left((\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}))^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]}) \right) \quad (24)$$



Théorème 5.2: (Admis)

Soit $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. On suppose que la matrice Jacobienne appliquée en \mathbf{x} , $\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ est inversible dans un voisinage de $\boldsymbol{\alpha}$, avec $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$. Alors pour tout $\mathbf{x}^{[0]}$ suffisamment proche de $\boldsymbol{\alpha}$ la suite définie par

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]} - \left((\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}))^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]}) \right)$$

converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ et la convergence est d'ordre 2.

Comment fait-on pour calculer $-\left((\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}))^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]}) \right)$?



Théorème 5.3: (Admis)

Soit $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. On suppose que la matrice Jacobienne appliquée en \mathbf{x} , $\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ est inversible dans un voisinage de $\boldsymbol{\alpha}$, avec $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$. Alors pour tout $\mathbf{x}^{[0]}$ suffisamment proche de $\boldsymbol{\alpha}$ la suite définie par

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]} - \left((\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]})) \right)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]})$$

converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ et la convergence est d'ordre 2.

Comment fait-on pour calculer $-\left((\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]})) \right)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]})$?

On résoud le système linéaire

$$\left((\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]})) \right) \mathbf{h} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]})$$

Remarque : Si l'on ne connaît pas explicitement la Jacobienne de f , il est possible de calculer une approximation de celle-ci en utilisant des formules de dérivation numérique.

Méthode de Newton scalaire

Données :

- f : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 df : la dérivée de f ,
 x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
 tol : la tolérance, $tol \in \mathbb{R}^+$,
 $kmax$: nombre maximum d'itérations, $kmax \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que

- 1: **Fonction** $\alpha_{tol} \leftarrow \text{NEWTON} (f, df, x_0, tol, kmax)$
 - 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{tol} \leftarrow \emptyset$
 - 3: $x \leftarrow x_0,$
 - 4: $err \leftarrow tol + 1$
 - 5: **Tantque** $err > tol$ et $k \leq kmax$ **faire**
 - 6: $k \leftarrow k + 1$
 - 7: $xp \leftarrow x$
 - 8: $x \leftarrow xp - f(xp)/df(xp)$ $\triangleright x \leftarrow \Phi(xp)$
 - 9: $err \leftarrow |x - xp|$
 - 10: **Fin Tantque**
 - 11: **Si** $err \leq tol$ **alors**
 - 12: $\alpha_{tol} \leftarrow x$
 - 13: **Fin Si**
 - 14: **Fin Fonction**
-

Méthode de Newton *v*ectorielle :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - ((J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}))^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}))$$

Méthode de Newton scalaire

Données :

- f : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- df : la dérivée de f ,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que

- 1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{NEWTON} (f, \text{df}, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$
 - 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$
 - 3: $x \leftarrow x_0$,
 - 4: $\text{err} \leftarrow \text{tol} + 1$
 - 5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ **faire**
 - 6: $k \leftarrow k + 1$
 - 7: $x_p \leftarrow x$
 - 8: $x \leftarrow x - f(x_p)/\text{df}(x_p)$ $\triangleright x \leftarrow \Phi(x_p)$
 - 9: $\text{err} \leftarrow |x - x_p|$
 - 10: **Fin Tantque**
 - 11: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors**
 - 12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$
 - 13: **Fin Si**
 - 14: **Fin Fonction**
-

Algorithme 16 Méthode de Newton vectorielle

Données :

- f : $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$,
- Jf : la matrice Jacobienne de f ,
- $\mathbf{x0}$: donnée initiale, $\mathbf{x0} \in \mathbb{R}^N$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un élément de \mathbb{R}^N proche de α .

- 1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{NEWTON} (f, \text{Jf}, \mathbf{x0}, \text{tol}, \text{kmax})$
 - 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$
 - 3: $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x0}$,
 - 4: $\text{err} \leftarrow \text{tol} + 1$
 - 5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ **faire**
 - 6: $k \leftarrow k + 1$
 - 7: $\mathbf{xp} \leftarrow \mathbf{x}$
 - 8: $\mathbf{h} \leftarrow \text{SOLVE}(\text{Jf}(\mathbf{xp}), -f(\mathbf{xp}))$
 - 9: $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{xp} + \mathbf{h}$
 - 10: $\text{err} \leftarrow \text{NORM}(\mathbf{x} - \mathbf{xp})$
 - 11: **Fin Tantque**
 - 12: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors** \triangleright Convergence
 - 13: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \mathbf{x}$
 - 14: **Fin Si**
 - 15: **Fin Fonction**
-

Rappel : Point fixe scalaire. Et le cas vectoriel ... ???

Méthode de point fixe scalaire

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
 tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
 k_{\max} : nombre maximum d'itérations, $k_{\max} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXE}(\Phi, x_0, \text{tol}, k_{\max})$

2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$

3: $x \leftarrow x_0, \text{fx} \leftarrow \Phi(x_0)$,

4: $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x|$ \triangleright ou $\frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$

5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq k_{\max}$ **faire**

6: $k \leftarrow k + 1$

7: $x \leftarrow \text{fx}$

8: $\text{fx} \leftarrow \Phi(x)$

9: $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x|$ \triangleright ou $\frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$

10: **Fin Tantque**

11: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors** \triangleright Convergence

12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$

13: **Fin Si**

14: **Fin Fonction**

Algorithme 17 Méthode de Newton scalaire

Données :

f : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

df : la dérivée de f ,

x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,

tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,

k_{\max} : nombre maximum d'itérations, $k_{\max} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que

1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{NEWTON}(f, df, x_0, \text{tol}, k_{\max})$

2: $\Phi \leftarrow x \mapsto x - f(x)/df(x)$

3: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXE}(\Phi, x_0, \text{tol}, k_{\max})$

4: **Fin Fonction**

Rappel : Point fixe scalaire. Et le cas vectoriel ... ???

Méthode de point fixe scalaire

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXE}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$

2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$

3: $x \leftarrow x_0, \text{fx} \leftarrow \Phi(x_0)$,

4: $\text{err} \leftarrow |fx - x|$ \triangleright ou $\frac{|fx - x|}{|x| + 1}$

5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ **faire**

6: $k \leftarrow k + 1$

7: $x \leftarrow \text{fx}$

8: $\text{fx} \leftarrow \Phi(x)$

9: $\text{err} \leftarrow |fx - x|$ \triangleright ou $\frac{|fx - x|}{|x| + 1}$

10: **Fin Tantque**

11: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors** \triangleright Convergence

12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$

13: **Fin Si**

14: **Fin Fonction**

Méthode de point fixe vectorielle

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$,
- \mathbf{x}_0 : donnée initiale, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{K}^N$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $\|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}\| \leq \text{tol}$

1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXE}(\Phi, \mathbf{x}_0, \text{tol}, \text{kmax})$

2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$

3: $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{fx} \leftarrow \Phi(\mathbf{x}_0)$,

4: $\text{err} \leftarrow \|\mathbf{fx} - \mathbf{x}\|$

5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ **faire**

6: $k \leftarrow k + 1$

7: $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{fx}$

8: $\mathbf{fx} \leftarrow \Phi(\mathbf{x})$

9: $\text{err} \leftarrow \|\mathbf{fx} - \mathbf{x}\|$

10: **Fin Tantque**

11: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors**

12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \mathbf{x}$

13: **Fin Si**

14: **Fin Fonction**

Rappel : Point fixe scalaire. Et le cas vectoriel ... ???

Méthode de Newton vectorielle

Données :

- f : $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$,
Jf : la matrice Jacobienne de f ,
 $\mathbf{x0}$: donnée initiale, $\mathbf{x0} \in \mathbb{R}^N$,
tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un élément de \mathbb{R}^N proche de α .
- 1: Fonction $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{NEWTON}(f, Jf, \mathbf{x0}, \text{tol}, \text{kmax})$
 - 2: $\Phi \leftarrow \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - \text{SOLVE}(Jf(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}))$
 - 3: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXE}(\Phi, \mathbf{x0}, \text{tol}, \text{kmax})$
 - 4: Fin Fonction
-

Méthode de point fixe vectorielle

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$,
 $\mathbf{x0}$: donnée initiale, $\mathbf{x0} \in \mathbb{K}^N$,
tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $\|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}\| \leq \text{tol}$
- 1: Fonction $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXE}(\Phi, \mathbf{x0}, \text{tol}, \text{kmax})$
 - 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$
 - 3: $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x0}, \mathbf{fx} \leftarrow \Phi(\mathbf{x0})$,
 - 4: $\text{err} \leftarrow \|\mathbf{fx} - \mathbf{x}\|$
 - 5: Tantque $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ faire
 - 6: $k \leftarrow k + 1$
 - 7: $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{fx}$
 - 8: $\mathbf{fx} \leftarrow \Phi(\mathbf{x})$
 - 9: $\text{err} \leftarrow \|\mathbf{fx} - \mathbf{x}\|$
 - 10: Fin Tantque
 - 11: Si $\text{err} \leq \text{tol}$ alors
 - 12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \mathbf{x}$
 - 13: Fin Si
 - 14: Fin Fonction
-

- 1 Recherche des zéros d'une fonction
 - Méthode de dichotomie ou de bisection
 - Points fixes d'une fonction (dimension 1)
 - Points fixes attractifs et répulsifs
 - Algorithme générique du point fixe
 - Points fixes pour la recherche de racines
 - Méthode de la corde
 - La méthode de Newton
 - Méthode de la sécante
- 2 Résolution de systèmes non linéaires
 - Point fixe
 - Méthode de Newton
 - Exemples

Soit $c = -3/2$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2 - \frac{1}{2} \\ f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{25} (10x_2 + 1)^2 + c \end{cases}$$

Conclusion?

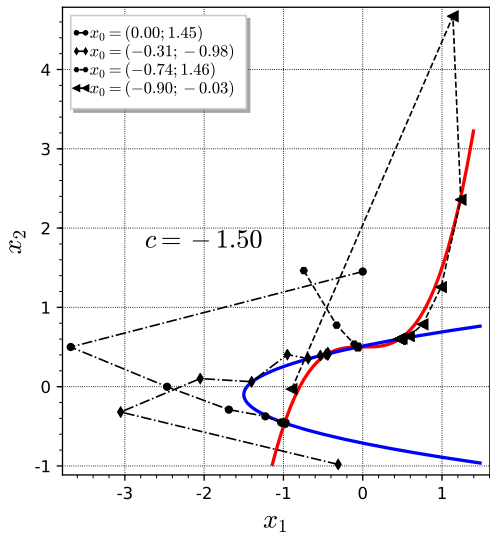


Figure: Représentation de 4 suites de Newton

Soit $c = -3/2$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2 - \frac{1}{2} \\ f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{25} (10x_2 + 1)^2 + c \end{cases}$$

Conclusion?

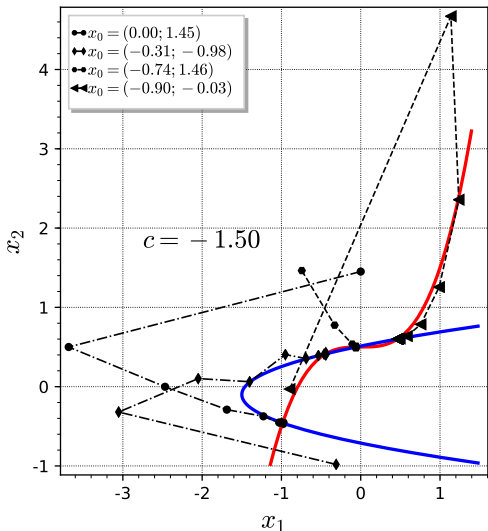
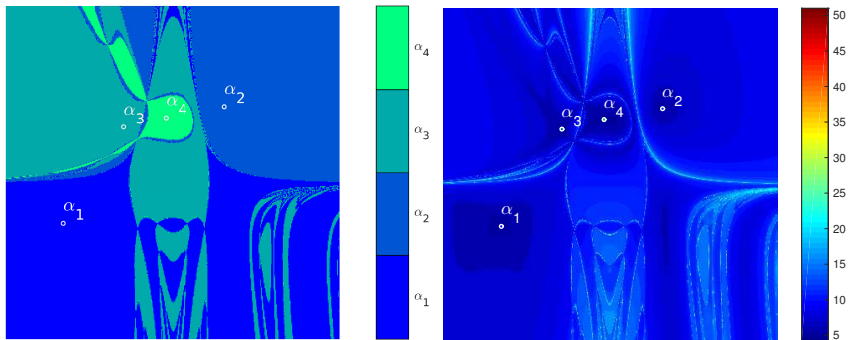


Figure: Représentation de 4 suites de Newton

Très difficile, si l'on n'est pas suffisamment proche d'un point fixe, de prédire vers lequel on converge.



(a) Bassin d'attraction des racines

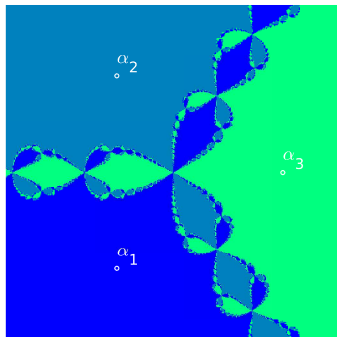
(b) Nombre d'itérations de convergence

Figure: Méthode de Newton

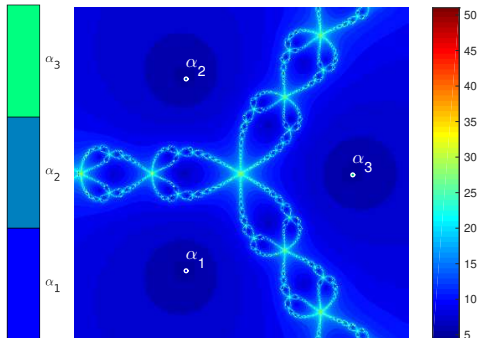
Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton

on peut poser $z = x + iy$, et le système équivalent devient

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 1 = 0 \\ f_2(x, y) = 3x^2y - x^3 = 0. \end{cases}$$

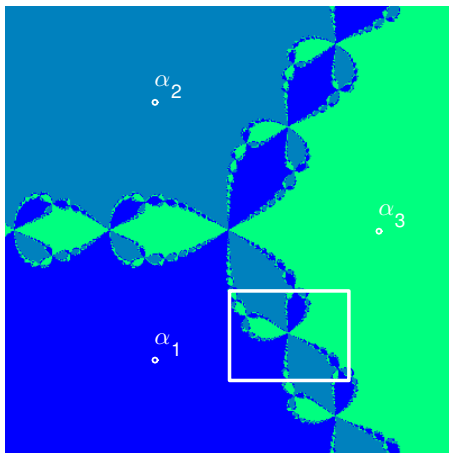


(a) Bassin d'attraction des racines



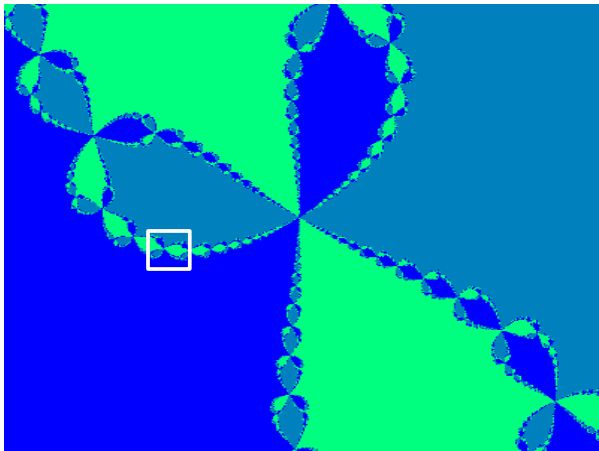
(b) Nombre d'itérations de convergence

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



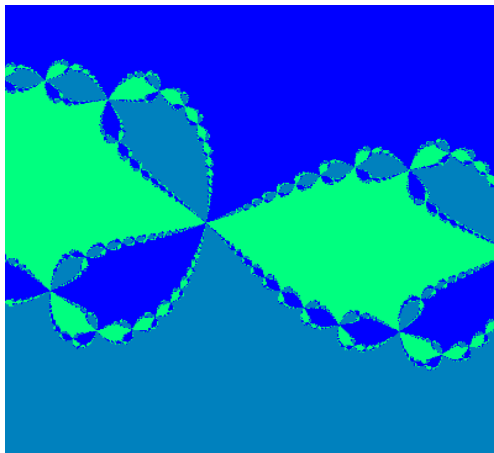
Méthode de Newton, zoom 1 sur les bassins d'attraction

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



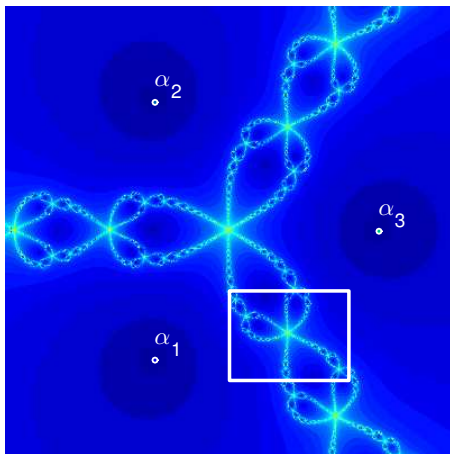
Méthode de Newton, zoom 2 sur les bassins d'attraction

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



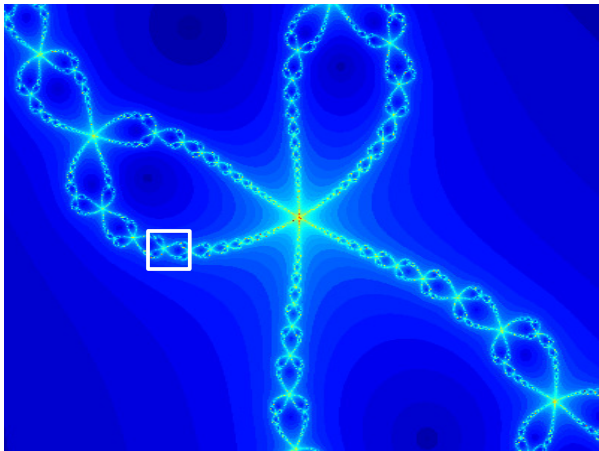
Méthode de Newton, zoom 3 sur les bassins d'attraction

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



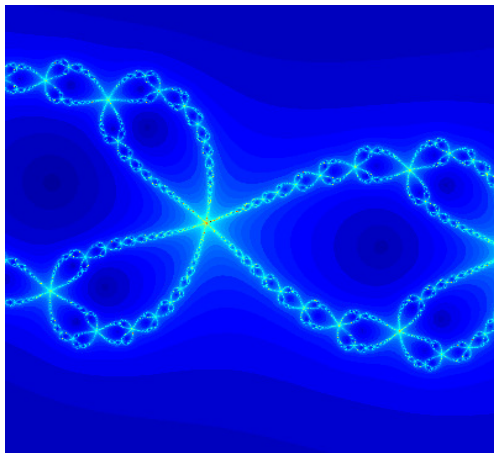
Méthode de Newton, zoom 1 sur les nombres d'itérations

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



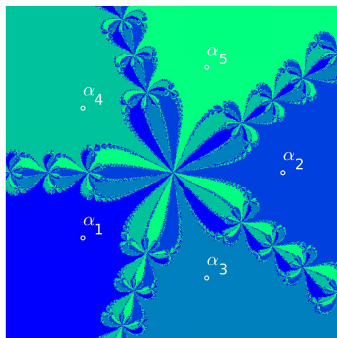
Méthode de Newton, zoom 2 sur les nombres d'itérations

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton

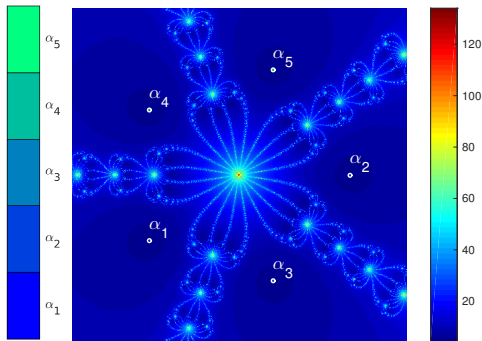


Méthode de Newton, zoom 3 sur les nombres d'itérations

Exemple complexe : $z^5 - 1 = 0$, fractale de Newton



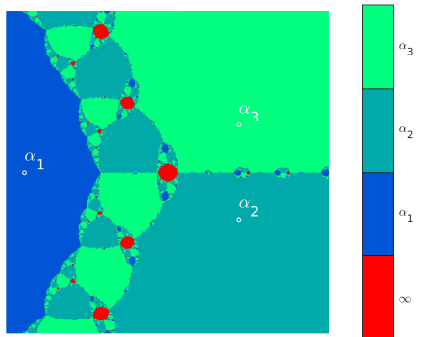
(a) Bassin d'attraction des racines



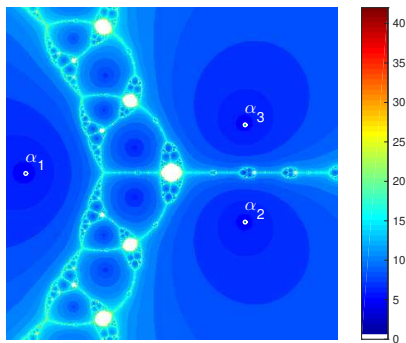
(b) Nombre d'itérations de convergence

$$[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$$

Exemple complexe : $z^3 - 2z + 2 = 0$, fractale de Newton



(a) Bassin d'attraction des racines. En rouge zone de divergence



(b) Nombre d'itérations de convergence. En blanc zone de divergence

$$[-2, 2] \times [-2, 2]$$