Exercice

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ vérifiant $f(a)f(b) < 0$. et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Soit $x_0 \in [a,b]$ donné. La suite obtenue par la méthode de la corde est donnée par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

On note $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda}$.

Q. 1 *Montrer que si pour tout $x \in [a,b]$ on a*

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leqslant f(x) \leqslant \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \tag{P-1}$$

alors $\Phi([a,b]) \subset [a,b]$.

Q. 2 *Montrer que si pour tout $x \in [a,b]$ on a*

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \tag{P-2}$$

alors $|\Phi'(x)| < 1$.

Q. 3 *En déduire que sous les deux conditions précédentes la méthode de la corde converge vers l'unique solution $\alpha \in [a,b]$ de $f(x) = 0$.*

Correction Exercice

Q. 1 Si $\lambda > 0$, l'inéquation (P-1) devient

$$\begin{aligned}\lambda(x-b) \leqslant f(x) \leqslant \lambda(x-a) &\Leftrightarrow a \leqslant x - \frac{f(x)}{\lambda} \leqslant b \\ &\Leftrightarrow a \leqslant \Phi(x) \leqslant b.\end{aligned}$$

Si $\lambda < 0$, l'inéquation (P-1) devient

$$\begin{aligned}\lambda(x-a) \leqslant f(x) \leqslant \lambda(x-b) &\Leftrightarrow a \leqslant x - \frac{f(x)}{\lambda} \leqslant b\\ &\Leftrightarrow a \leqslant \Phi(x) \leqslant b.\end{aligned}$$

Q. 2 Si $\lambda > 0$, l'inéquation (P-2) devient

$$\begin{aligned}0 < f'(x) < 2\lambda &\Leftrightarrow 0 < \frac{f'(x)}{\lambda} < 2\\ &\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{f'(x)}{\lambda} < 1\\ &\Leftrightarrow -1 < \Phi'(x) < 1.\end{aligned}$$

Si $\lambda < 0$, l'inéquation (P-2) devient

$$\begin{aligned}2\lambda < f'(x) < 0 &\Leftrightarrow 0 < \frac{f'(x)}{\lambda} < 2\\ &\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{f'(x)}{\lambda} < 1\\ &\Leftrightarrow -1 < \Phi'(x) < 1.\end{aligned}$$

Q. 3 Sous les hypothèses (P-1) et (P-2) on a $\Phi([a,b]) \subset [a,b]$ et $\forall x \in [a,b]$, $|\Phi'(x)| < 1$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, la fonction Φ l'est aussi. La suite (x_k) est définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. Ainsi les hypothèses du théorème 2.4 sont vérifiées ce qui assure l'unicité du point fixe ainsi que la convergence de la suite (x_k) vers ce point fixe.

$\diamond$