

Exercice

On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$, vérifie $f(a)f(b) < 0$ et qu'il existe un unique $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Q. 1 1. Montrer que les suites (a_k) et (b_k) convergent vers α .

2. En déduire que la suite (x_k) converge vers α .

Q. 2 1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}$.

2. Soit $\epsilon > 0$. En déduire que si $k \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$ alors $|x_k - \alpha| \leq \epsilon$.

Correction Exercice

Q. 1 1. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(x_k) = 0$, (i.e. $x_k = \alpha$ car $x_k \in [a, b]$) alors par construction $a_{k+i} = b_{k+i} = x_{k+i} = \alpha$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Ceci assure la convergence des 3 suites vers α .

Supposons maintenant que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f(x_k) \neq 0$. Par construction, nous avons $a_k \leq a_{k+1} \leq b$, $a \leq b_{k+1} \leq b_k$ et $a_k \leq b_k$. La suite (a_k) est convergente car elle est croissante et majorée. La suite (b_k) est décroissante et minorée : elle est donc convergente. De plus $0 \leq b_k - a_k \leq \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}$ et donc $0 \leq b_k - a_k \leq \frac{b-a}{2^k}$. On en déduit que les suites (a_k) et (b_k) ont même limite. Comme par construction, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [a_k, b_k]$ ceci entraîne que α est la limite de ces 2 suites.

2. Par construction, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k \leq x_k \leq b_k$. D'après le théorème des gendarmes, les suites (a_k) et (b_k) convergeant vers α , on obtient la convergence de la suite (x_k) vers α .

Q. 2 1. On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ et $a_k \leq \alpha \leq b_k$ d'où $|x_k - \alpha| \leq \frac{b_k - a_k}{2}$. Ce qui donne

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{b - a}{2^{k+1}}.$$

2. Pour avoir $|x_k - \alpha| \leq \epsilon$, il suffit d'avoir $\frac{b-a}{2^{k+1}} \leq \epsilon$, et la fonction \log étant croissante on obtient

$$k \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1.$$

◇

