Ing. MACS 1/L3 MIM
Sup'Galilée

Analyse Numérique I
Année 2017-2018

Partiel du 7 novembre 2017

durée : 1h30.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 (7.5 points)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(a)\, f(b) < 0$. On définit par récurrence les trois suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suivantes :

- $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$.

- $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{k+1} = \begin{cases} a_k, & \text{si } f(a_k)\, f(x_k) < 0, \\ x_k & \text{sinon,} \end{cases} \qquad b_{k+1} = \begin{cases} x_k, & \text{si } f(a_k)\, f(x_k) < 0, \\ b_k & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \text{et} \quad x_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}.$$

Q. 1 *a. Montrer qu'il existe $\gamma \in [a, b]$ tel que $f(\gamma) = 0$.*

b. γ est-il unique ?

c. Que se passe-t-il si f n'est pas continue ?

Q. 2 *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$a_k < x_k < b_k \quad \textit{et} \quad f(a_k)f(b_k) \leqslant 0.$$

Q. 3 *Montrer que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante, que la suite est $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que, quel que soit $k \in \mathbb{N}$.*

$$b_k - a_k = \frac{(b-a)}{2^k}$$

En déduire que les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Q. 4 *Montrer que les trois suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et convergent vers la même limite α.*

Q. 5 *En utilisant la question 2, montrer que $f(\alpha) = 0$. Comparer α et γ.*

Q. 6 *Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b-a}{2^{k+1}}.$$

Q. 7 *Soit $\varepsilon > 0$ donné.*

a. Déterminer k pour avoir $|x_k - \alpha| \leqslant \varepsilon$.

b. Combien faut-il d'itérations supplémentaires pour avoir une majoration en $\dfrac{\varepsilon}{10}$?

Q. 8 *A l'aide de ce qui précéde, proposer une fonction algorithmique permettant de retourner une approximation d'un zéro de la fonction f.*

EXERCICE 2 (9 POINTS)

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q. 1 *Donner la définition mathématique d'une matrice triangulaire supérieure.*

Q. 2 *Montrer que* $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ *est triangulaire supérieure et que* $C_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

Q. 3 *A quelles conditions, sur ses coefficients, la matrice* $\mathbb{A}$ *est-elle inversible?*

Q. 4 *Montrer que si la matrice* $\mathbb{A}$ *est inversible alors son inverse est triangulaire supérieure et les éléments diagonaux de la matrice inverse sont les inverses des éléments diagonaux de la matrice* $\mathbb{A}$.

Q. 5 *Soit* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$.

a. Expliquer en détail la manière de résoudre le système

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

b. Ecrire une fonction algorithmique permettant de résoudre le système précédent.

Q. 6 *Soient* $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice triangulaire inférieure inversible et* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$.

a. Expliquer en détail la manière de résoudre le système

$$\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

b. Ecrire une fonction algorithmique permettant de résoudre le système précédent.

EXERCICE 3 (3.5 POINTS)

Q. 1 *Citer précisement le théorème de factorisation* $\mathbb{L}\mathbb{U}$.

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$.

Q. 2 *Démontrer que cette factorisation est alors unique (sans citer le théorème!)*

Q. 3 *Donner un exemple de matrice* $\mathbb{A}$ *inversible qui n'admet pas de factorisation* $\mathbb{L}\mathbb{U}$.

On dispose des fonctions algorithmiques $\boldsymbol{x} \leftarrow \text{ResTriSup}(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{x} \leftarrow \text{ResTriInf}(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$ et $[\mathbb{L}, \mathbb{U}] \leftarrow \text{LU}(\mathbb{A})$ permettant respectivement de résoudre un système triangulaire supérieur, de résoudre un système triangulaire inférieur et de déterminer la factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$ d'une matrice.

Q. 4 *Soit* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$. *Ecrire une fonction algorithmique* ResLU *permettant de retourner la solution du système* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.