Ing. MACS 1/L3 MIM **Analyse Numérique I**
Sup'Galilée **Année 2019-2020**

Partiel du 14 janvier 2020

durée : 1h30.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barême est donné à titre indicatif

Exercice 1 (10 points)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible telle que ses éléments diagonaux soient tous non nuls et soit $\boldsymbol{b}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On souhaite résoudre le système linéaire

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{1}$$

en utilisant la méthode itérative suivante : α étant un réel non nul et le vecteur $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ étant donné, on construit la suite $\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ par la formule de récurrence

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\mathbb{I} - \alpha\mathbb{D}^{-1}\mathbb{A})\boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha\mathbb{D}^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{2}$$

où $\mathbb{I}$ est la matrice identité et $\mathbb{D}$ la matrice diagonale constituée de la diagonale de $\mathbb{A}$ ($D_{ii} = A_{ii}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$).

Q. 1 *Montrer que si la suite* $\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$*, alors* $\bar{\boldsymbol{x}}$ *est la solution du système linéaire* $\mathbb{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$.

Q. 2 *Soit* $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $\|\cdot\|_s$ *une norme matricielle subordonnée sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. Montrer que*

$$\rho(\mathbb{E}) \leqslant \|\mathbb{E}\|_s. \tag{3}$$

Q. 3 **(a)** *Exprimer les coefficients de la matrice* $(\mathbb{I} - \alpha\mathbb{D}^{-1}\mathbb{A})$ *en fonction des coefficients de* $\mathbb{A}$ *et de* α.

(b) *En déduire l'expression* $\boldsymbol{x}_i^{(k+1)}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, *en fonction de* α *et des coefficients de* $\mathbb{A}$, *de* $\boldsymbol{b}$ *et de* $\boldsymbol{x}^{(k)}$.

On suppose que $\mathbb{A}$ est à diagonale strictement dominante[1] et que $0 < \alpha \leqslant 1$.

Q. 4 **(a)** *On rappelle que pour* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, on a* $\|\mathbb{A}\|_\infty = \sup\limits_{\boldsymbol{x}\neq 0} \dfrac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}$. *Montrer que*

$$\|\mathbb{I} - \alpha\mathbb{D}^{-1}\mathbb{A}\|_\infty < 1. \tag{4}$$

(b) *En déduire que la suite* $(\boldsymbol{x}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers la solution de* (1).

Q. 5 (Algo) **(a)** *Ecrire une fonction* `RSLiterDSD` *permettant de résoudre le système* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *où* $\mathbb{A}$ *est à diagonale strictement dominante en utilisant la méthode itérative donnée par l'expression de* $\boldsymbol{x}_i^{(k+1)}$ *explicitée en* **Q. 3 (b)**. *La paramètre* α *devra être passé en paramètre.*

(b) *Ecrire une fonction* `matDSD`*, permettant de générer une matrice pseudo-aléatoire d'ordre* n *à diagonale strictement dominante dont les coefficients hors diagonale sont dans l'intervalle* $[a, b]$*. On pourra utiliser la fonction* `rand(p,q)` *qui retourne une matrice aléatoire de* $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ *dont les coefficients sont uniformément distribués sur* $[0, 1]$.

(c) *Rappeler* ***précisement*** *la formule du produit d'une matrice par un vecteur (avec hypothèses) et écrire une fonction* `ProdMatVec`*, retournant le produit d'une matrice par un vecteur.*

(d) *Proposer un programme permettant de tester la validité de la fonction* `RSLiterDSD`.

---

[1] Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite à diagonale strictement dominante si, $|A_{i,i}| > \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |A_{i,j}|, \forall i \in [\![1, n]\!]$.

EXERCICE 2 (10 POINTS)

Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ Une formule de quadrature élémentaire est donnée par :

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \tag{1}$$

avec $\forall j \in [\![0,n]\!]$ $w_j \in \mathbb{R}$ et $x_j \in [a,b]$, les x_j étant distincts deux à deux. Cette formule permet d'approcher l'intégrale de f entre a et b.
Par exemple la formule de quadrature élémentaire de Simpson est donnée par

$$\mathcal{Q}^{\text{simpson}}(f,a,b) = \frac{b-a}{6}\big(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\big). \tag{2}$$

Q. 1 **(a)** *Rappeler la définition du degré d'exactitude pour la formule de quadrature* (1).

(b) *Démontrer que la formule de quadrature élémentaire* (1) *à* $n+1$ *points a pour degré d'exactitude* k *si et seulement si*

$$(b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}, \quad \forall r \in [\![0,k]\!]. \tag{3}$$

(c) *On note* $\mathbb{H}$ *la matrice de* $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ *de composantes* $(\mathbb{H})_{i,j} = H_{i,j} = x_{i-1}^{j-1}$. *Démontrer que cette matrice est inversible.*

(d) *En déduire qu'il existe une unique formule de quadrature élémentaire* (1) *à* $n+1$ *points ayant pour degré d'exactitude* n *au moins.*

Q. 2 *On suppose les poids* w_i *donnés par*

$$w_i = \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}dt, \quad \forall i \in [\![0,n]\!] \tag{4}$$

avec $t_i = (x_i - a)/(b-a)$. *Montrer alors que la formule* (1) *a pour degré d'exactitude* n *au moins.*

On dit que la formule de quadrature (1) est **symétrique** si

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \tag{5}$$

Q. 3 **(a)** *Montrer que si la formule* (1) *est* ***symétrique*** *et exacte pour les polynômes de degré* $2m$ *alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré* $2m+1$.

(b) *Démontrer que la formule de Simpson* (2) *a pour degré d'exactitude* 3.

Soit $g \in \mathcal{C}^0([\alpha,\beta];\mathbb{R})$. On note $(z_i)_{i=0}^N$ la discrétisation régulière de l'intervalle $[\alpha,\beta]$ avec $N+1$ points.

Q. 4 *Expliquer le principe d'une méthode de quadrature* ***composée*** *associée à la formule élémentaire* (1) *pour le calcul d'une approximation de l'intégrale de* g *sur l'intervalle* $[\alpha,\beta]$.

Q. 5 **(a)** *Donner précisement la méthode de quadrature* ***composée*** *associée à la formule élémentaire de Simpson* (2) *pour le calcul d'une approximation de l'intégrale de* g *sur l'intervalle* $[\alpha,\beta]$ *en utilisant la discrétisation régulière* $(z_i)_{i=0}^N$ *de cet intervalle.*

(b) *Quel est le degré d'exactitude de cette méthode composée? Justifiez*

La méthode de quadrature **composée** des trapèzes est donnée par

$$\frac{\beta-\alpha}{2n}\sum_{k=1}^{N}(g(z_{k-1}) + g(z_k)). \tag{6}$$

Q. 6 (algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* `QuadTrap` *calculant une approximation de* $\int_\alpha^\beta g(x)dx$ *par la méthode de quadrature* ***composée*** *des trapèzes* (6). *Dans cette fonction il faudra minimiser le nombre d'appels à la fonction* g.

Q. 7 (algorithmique) *Proposer un algorithme permettant de vérifier/trouver numériquement le degré d'exactitude de* (6).